1. **LISTA 5 - CLASSE.**

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis i.i.d, com função densidade de probabilidade

$$f(x) = e^{-(x+0,5)} \text{ se } x \geq -0,5 \text{ e } 0 \text{ cc.}$$

Prove que provar que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{P}{\Rightarrow} \infty$.

Solução:

1) $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis iid, com função densidade de probabilidade

$$f(x) = e^{-(x+0,5)} \text{ se } x \geq -0,5 \text{ e } 0 \text{ cc.}$$

Queremos provar que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{P}{\Rightarrow} \infty$. Utilizaremos um resultado importante:

Seja $f(x) = e^{-(x-\theta)},\ x \geq \theta$. Definindo $Y = X - \theta$, temos

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(X - \theta \leq y) = P(X \leq y + \theta) = F(y + \theta),$$

logo $g(y) = [F(y+\theta)]' = f(y+\theta) = e^{-(y+\theta-\theta)} = e^{-y} I_{(0,\infty)}(y)$
e portanto $Y \sim Exp(1)$ e $X = Y + \theta,\ \theta > 0$.

No nosso problema $\theta = -0,5$, portanto, $X_i = Y - 0,5$. Então

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[Y] - 0,5 = 1 - 0,5 = 0,5$$

assim temos que as variáveis X_i têm média $0,5$. Pela lei fraca de Khintchine

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{P}{\Rightarrow} 0,5.$$

Se uma sequência de variáveis converge em probabilidade para um valor então uma função contínua aplicada nesta mesma sequência convergirá em probabilidade para a função aplicada neste mesmo valor. Portanto nos é permitido multiplicar ambos os lados da convergência quase certa por n,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{P}{\Rightarrow} n * 0,5.$$

então

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{P}{\Rightarrow} \infty,$$

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis independentes com distribuições gama de parâmetros n e λ. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis independentes com distribuições normais com médias $\frac{\lambda}{n}$ e variâncias $n\lambda$. As sequências são independentes entre si. Qual o limite emm probabilidade de $\frac{X_n}{Y_n}$?

Solução:

$$X_n \overset{ind}{\sim} Gama(n,\lambda) \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad Y_n \overset{ind}{\sim} N\left(\frac{n}{\lambda}, n\lambda\right).$$

queremos mostrar que X_n/Y_n converge em probabilidade.

Note que podemos reescrever essas quantidades como:

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^*,\ X_i^* \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda) \qquad \text{e} \qquad Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i^*,\ Y_i^* \overset{iid}{\sim} N\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda\right)$$

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^*}{\sum_{i=1}^n Y_i^*} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^*}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^*}.$$

Pela lei fraca de Tchebyshev temos

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^* \overset{P}{\Rightarrow} \mathbb{E}[Exp(\lambda)] = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^* \overset{P}{\Rightarrow} \frac{1}{\lambda}$$

pois os X_i e Y_i são integráveis, isto é, $\mathbb{E}\,|X_i| < \infty$ e $\mathbb{E}\,|Y_i| < \infty$; e $\mathbb{E}\,[X_i] = \frac{1}{\lambda}$ e $\mathbb{E}\,[Y_i] = \frac{1}{\lambda}$.

Um resultado importante garante que a razão de duas sequências de variáveis aleatórias que convergem em probabilidade também converge em probabilidade se as sequências estão bem definidas.

Portanto,

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^*}{\sum_{i=1}^n Y_i^*} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^*}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^*} \overset{P}{\Rightarrow} \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = 1.$$

Então a razão converge em probabiidade para 1..

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis iid, com distribuição $N(0,1)$. Qual o limite em probabilidade de

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{(X_1-1)^2 + (X_2-1)^2 + \ldots + (X_2-1)^2}?$$

Solução:

$(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis iid $N(0,1)$. Queremos encontrar o limite em probabilidade de

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{(X_1-1)^2 + (X_2-1)^2 + \ldots + (X_2-1)^2}.$$

Note que podemos reescrever essa razão como

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i + 1)} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n + \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}{1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}.$$

Vale ressaltar que todos os momentos da distribuição normal são finitos e ela é integrável, portanto podemos aplicar a lei fraca dos grandes números na média das variáveis X_i. E

$$\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = \text{Var}\left(X_1\right) + \left(\mathbb{E}\left[X_1\right]\right)^2 = 1 + 0 = 1.$$

Como $\mathbb{E}\left[|X_1|^2\right] = \mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 1 < \infty$ então as variáveis X_1 e X_1^2 são integráveis. Pela lei fraca de Tchebychev

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \overset{P}{\Rightarrow} 0$$

e

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \overset{P}{\Rightarrow} 1.$$

Finalmente

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}{1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i} \overset{P}{\Rightarrow} \frac{1}{1+1-2*0} = \frac{1}{2},$$

pois um resultado importante garante que a razão de duas sequências de variáveis aleatórias que convergem em probabilidade também converge em probabilidade se as sequências estão bem definidas , então a razão de variáveis aleatórias converge em probabilidade para $1/2$.

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis i.i.d, com $\mathbb{E}\left[X_1\right] = \text{Var}\left(X_1\right) = 1$. Encontre o limite em probabilidade de

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^n X_i^2}} \overset{P}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}?$$

Solução:

$(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis i.i.d. com $\mathbb{E}\left[X_1\right] = \text{Var}\left(X_1\right) = 1$. Queremos encontrar o limite em probabilidade

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \overset{q.c.}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Note que

$$\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = \mathrm{Var}\left(X_1\right) + \left(\mathbb{E}\left[X_1\right]\right)^2 = 1 + 1 = 2.$$

Como $\mathbb{E}\left[|X_1|^2\right] = \mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 2 < \infty$ então as variáveis X_1 e X_1^2 são integráveis. Pela lei fraca de Tchebyshev temos

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{P}{\Rightarrow} 1$$

e

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \overset{P}{\Rightarrow} 2,$$

como a raiz quadrada é uma função contínua então vale

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \overset{P}{\Rightarrow} \sqrt{2},$$

e finalmente

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\frac{1}{n}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\frac{n}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \overset{P}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}},$$

pois um resultado importante garante que a razão de duas sequências de variáveis aleatórias que convergem em probabilidade também converge em probabilidade se as sequências estão bem definidas.

Email address: `bueno@@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil