CONVERGENCIA PONTUAL E UNIFORME

Seja $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções a qual converge pontualmente num conjunto S para uma função limite f. Isso significa que:

Para cada $x \in S$ e para cada $\epsilon > 0$, existe um número natural N o qual depende de x, ϵ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \text{sempre que} \quad n \geq N.$$

• Se o mesmo N serve para todos os pontos $x \in S$, então a convergencia da sequência se diz *uniforme* em S.

Definição 1 Uma sequência de funções $\{f_n\}$ diz-se *convergir uniformemente* para f, num conjunto S, se para cada $\epsilon > 0$ existe um N (o qual depende unicamente de ϵ) tal que $n \geq N$ implica

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \text{para todo} \quad x \in S.$$

Definição 2

1) Se $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ e f_n converge pontualmente para f em S, então tem-se

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad \text{para cada} \quad x \in S.$$

Nesse caso, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ diz-se *convergir pontualmente* para a função soma f.

2) Se $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ e f_n converge uniformemente para f em S, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *converge uniformemente* para a função soma f.

Teorema 1 A soma de uma série uniformemente convergente de funções continuas é continua.

Isto é, se cada $u_n(x)$ é continua em $a \leq x \leq b$, então $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é continua, sempre que a série seja convergente uniformemente em $a \leq x \leq b$.

• O teorema 1) garante que para uma série uniformemente convergente podemos permutar o simbolo de limite com o simbolo somatorio, ou que podemos passar ao limite termo a termo. De fato:

Como $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é continua em todo $x \in [a, b]$, em particular num $x_o \in [a, b]$, temos por definição de continuidade que $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$. Também como por hipótese cada $u_n(x)$ é continua em x_o, temos que $\lim_{x\to x_o} u_n(x) = u_n(x_o)$. Logo segue-se que

$$\lim_{x\to x_o} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x_o) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_o) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_o} u_n(x).$$

Observação Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ tem a propriedade unicamente de ser convergente, e cada $u_n(x)$ é continua, isso não garante a continuidade da função soma $f(x)$.

Pois por exemplo para a série:

$$f(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1}), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

temos que a série converge, pois é soma de séries geométricas com $|x| < 1$. Note que cada função u_n é continua, e que a sequência das somas parciais é $\{S_n(x)\} = \{x^n\}$, a qual não converge uniformemente em $0 \leq x \leq 1$, segue-se que a série $x + \sum_{n=2}^{\infty}(x^n - x^{n-1})$ não converge uniformemente a $f(x)$ em $0 \leq x \leq 1$. Logo

$$x + \sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1}) = 0, \quad 0 \leq x < 1,$$

$$x + \sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1}) = 1, \quad x = 1.$$

E assim ha uma descontinuidade por salto em $x = 1$.

Teorema 2 Uma série de funções continuas uniformemente convergente é integrável termo a termo. Isso significa:

Se cada $u_n(x)$ é continua em $a \leq x \leq b$ e $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ em $a \leq x \leq b$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + ... + \int_a^b u_n(x)dx + ...$$

Teorema 3 (**Critério de Weierstrass para convergencia uniforme**): Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uma serie de funções definidas todas num conjunto E. Se existir uma série de numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ tal que

$$|u_n(x)| \leq M_n \qquad \text{para todo } \; x \in E,$$

então a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge absolutamente para cada $x \in E$ e será também uniformemente convergente em E.

EXEMPLO 1: Analise a convergencia da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

1. A série converge absolutamente pelo critério da razão quando $|x| < 1$.

2. Em $x = 1$: Temos a série $p = 2$-harmônica, a qual converge.

3. Em $x = -1$: Temos que a série converge pelo critério da série alternada.

Portanto intervalo máximo de convergência é $I = [-1, 1]$.

Mas a convergência é uniforme em $I = [-1, 1]$, pois vale

$$|\frac{x^n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2} = M_n \qquad \text{para todo } x \in [-1, 1],$$

pois a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente.

EXEMPLO 2: Analise a convergencia da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$$

Como

$$|\frac{\cos(nx)}{2^n}| \leq \frac{1}{2^n} = M_n \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ converge uniformemente em $x \in \mathbb{R}$ pois a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é a série numérica convergente com qual usamos o critério de Weierstrass.

Teorema 4 Pode-se derivar uma série convergente termo a termo, sempre que as funções $u_n(x)$ da série possuam derivadas continuas e que a série das derivadas seja uniformemente convergente.

Isto é: Se $u_n'(x) = \frac{du_n}{dx}$ é continua em $a \leq x \leq b$, e se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge em $a \leq x \leq b$ para a função $f(x)$, e se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ converge uniformemente em $a \leq x \leq b$ então

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \qquad em \qquad a \leq x \leq b.$$

PROVA Seja $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, $a \leq x \leq b$. Como $u_n'(x)$ é continua, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ converge uniformemente, logo segue-se que $g(x)$ é continua. Pelo teorema 2) de integração termo a termo, temos para $x_1 \in [a, b]$, que

$$\int_a^{x_1} g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{x_1} u_n'(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x))|_a^{x_1} = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x_1) - u_n(a)) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_1) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = f(x_1) - f(a).$$

Agora derivamos em relação a x_1 para obter:

$$g(x_1) = f'(x_1) \;\text{ para } a \leq x_1 \leq b$$

isto é

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Teorema 5 Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ são uniformemente convergentes em $a \leq x \leq b$, e se $h(x)$ é uma função continua em $a \leq x \leq b$, então as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n(x) + v_n(x)), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(u_n(x) - v_n(x)) \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(h(x)u_n(x))$$

são uniformemente convergentes em $a \leq x \leq b$.

• **Outro resultado importante**: Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente e se

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq M_n \quad \text{para todo } \; x \in E,$$

então a sequência $\{f_n(x)\}$ é uniformemente convergente para todo $x \in E$.

EXEMPLO 3: A sequência

$$\{\frac{n+x}{n}\}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

é uniformemente convergente no intervalo indicado.
De fato:
$f_n(x) = \frac{n+x}{n}$, $f_{n+1}(x) = \frac{n+1+x}{n+1}$ logo

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \frac{|-x|}{n(n+1)} = \frac{x}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} = M_n \quad \text{em } \; 0 \leq x \leq 1.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente (pois é convergente pelo critério de comparação com a $p = 2$-série), temos pelo Resultado anterior que a sequência $\{\frac{n+x}{n}\}$ converge uniformemente em $0 \leq x \leq 1$.

Resto ou Erro na aproximação da série:

O caso mais comum de convergencia uniforme é aquele onde as funções $u_n(x)$ são continuas num intervalo fechado $a \leq x \leq b$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge nesse intervalo para uma função continua $f(x)$.

Agora vamos substituir a função $f(x)$ pela soma parcial n-ésima $f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots.. + u_n(x)$ então temos um resto da série, o qual denotamos por

$$R_n(x) = f(x) - f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

Logo o erro absoluto, denotado por $|R_n(x)|$, proveniente da substituição de $f(x)$ pela soma parcial é dado por: $|R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)|$ e é evidentemente continua para $a \leq x \leq b$, e tem um máximo $\bar{R}_n(x)$ bem definido nesse intervalo por:

$$\bar{R}_n(x) = Max_{a \leq x \leq b}|f(x) - f_n(x)| = Max_{a \leq x \leq b}|R_n(x)|.$$

$\bar{R}_n(x)$ é simplesmente o maior erro absoluto possivel nesse intervalo. Logo

A convergencia uniforme da uma série em $a \leq x \leq b$ é então equivalente a condição de

$$\lim_{n\to\infty} \bar{R}_n(x) = 0.$$

Pois $\lim_{n\to\infty} \bar{R}_n(x) = 0$ significa que $|R_n(x)| < \epsilon$ para $n \geq N(\epsilon)$ e isso é equivalente á:

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon \qquad para \qquad n \geq N(\epsilon).$$

EXEMPLO 4: A série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para quando $|x| < 1$ e sua soma nesse intervalo é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Observe que a soma parcial em $x \neq 1$ é $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$, logo o resto é

$$R_n(x) = f(x) - f_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1-(1-x^n)}{1-x} = \frac{x^n}{1-x}$$

Assim

$$|R_n(x)| = \frac{|x^n|}{|1-x|}.$$

Determinemos se a série é uniformemente convergente no intervalo $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$?

Como

$$\bar{R}_n(x) = Max_{-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}} |R_n(x)| = Max_{-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}} \frac{|x^n|}{|1-x|} = \frac{(1/2)^n}{|1-1/2|} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

pois $|x^n|$ atinge seu valor máximo em $x = 1/2$ e $|1-x|$ atinge seu valor minimo em $x = 1/2$.

Logo segue-se que $\lim_{n\to\infty} \bar{R}_n(x) = 0$. Portanto a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad converge \quad uniformemente \quad em \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$