2020-1, "STATPHYS", AULA 06

OBJETIVOS: ESTUDAR SOMAS DE V.A.'S INDEPENDENTES, CULMINANDO NO TEOREMA CENTRAL DO LIMITE.

ONDE ESTAMOS: 1.2 ELEMENTOS DE PROBABILIDADE

INÍCIO DA AULA

* CASO GERAL

SEJA $\{X_i\}$, $i=1,\ldots,n$, UMA FAMÍLIA DE n V.A.'S MUTUAMENTE INDEPENDENTES,

$$\rho_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} \rho_{X_i}(x_i) .$$

ENTÃO, SE $S_n \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i$,

$$\boxed{\phi_{S_n}(K) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(K)} .$$

□ DEMONSTRAÇÃO:

$$\phi_{S_n}(k) = \int dx\, e^{ikx} \rho_{S_n}(x) =$$

$$= \int dx\, e^{ikx} \left\{ \int \dots \int dx_1 \dots dx_n \cdot \prod_{j=1}^{n} \rho_{X_j}(x_j) \cdot \delta\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - x\right) \right\} =$$

$$= \int \dots \int dx_1 \dots dx_n \prod_{j=1}^{n} \rho_{X_j}(x_j) \left\{ \int dx\, e^{ikx} \cdot \delta\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - x\right) \right\} =$$

$$\boxed{\{\} = e^{ik \sum_j x_j} = \prod_j e^{ikx_j}}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int dx_j\, \rho_{X_j}(x_j)\, e^{ikx_j} = \prod_{j=1}^{n} \phi_{X_j}(k) \quad \square$$

* CASO I.I.D. (INDEPENDENTES E IDENTICAMENTE DISTRIBUÍDAS)

$\{X_j\}$ I.I.D., $\langle X_j \rangle = \mu$, $\mathbb{V}(X_j) = \sigma^2$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$

$$\boxed{\langle S_n \rangle = n\mu} \qquad \boxed{\mathbb{V}(S_n) = n\sigma^2}$$

$$\boxed{\phi_{S_n}(k) = \left[\phi_{X_1}(k)\right]^n}$$

◇ EXEMPLOS:

(i) UMA V.A. DE BERNOULLI COM PARÂMETRO p É TAL QUE $\langle X\rangle = p$, $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$ E $g_X(z) = 1-p+pz$.

ASSIM, UMA BINOMIAL S_n É UMA SOMA DE n BERNOULLI'S INDEPENDENTES (CADA "TENTATIVA DE SUCESSO" É EQUIDISTRIBUÍDA): $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

É CLARO QUE $\langle S_n\rangle = np$, $\mathbb{V}(S_n) = np(1-p)$ E $g_{S_n}(z) = (1-p+pz)^n$.

(ii) UM PASSEIO ALEATÓRIO NA RETA (RANDOM WALK, "PASSEIO DO BÊBADO") É UMA BINOMIAL TRANSFORMADA. SÃO n PASSOS, CADA UM COM PROBABILIDADE p DE APONTAR PARA A DIREITA, $1-p$ PARA A ESQUERDA.

SEJA N_D A V.A. BINOMIAL "NÚMERO DE PASSOS À DIREITA". É CLARO QUE

$$\begin{cases} N_D + N_E = n \\ S_n = N_D - N_E \end{cases}$$

ONDE N_E É O "NÚMERO DE PASSOS À ESQUERDA" E S_n É A POSIÇÃO FINAL (ALEATÓRIA) APÓS OS n PASSOS. ASSIM,

$$S_n = 2N_D - n$$

E $\langle S_n \rangle = 2\langle N_D \rangle - n = 2np - n = n(2p-1)$,

$-n$ ($p=0$), 0 ($p=1/2$), $+n$ ($p=1$)

$\mathbb{V}(S_n) = 4\,\mathbb{V}(N_D) = 4np\underset{1-p}{\underset{\shortparallel}{q}}$. ◇

◆ EXERCÍCIOS:

(i) DETERMINE A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA DA POSIÇÃO DO ANDARILHO NO EXEMPLO (ii) LOGO ACIMA, $S_n = 2N_D - n$, A PARTIR DA CARACTERÍSTICA DE N_D.

(ii) SE AS V.A.'S

$$Y_i = \begin{cases} +1, & p \\ -1, & 1-p \end{cases}$$

SÃO INDEPENDENTES, MOSTRE QUE A POSIÇÃO DO ANDARILHO É DADA DIRETAMENTE (EM CONTRASTE À DEFORMAÇÃO DE N_D) COMO $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. CALCULE $\langle Y_i \rangle$, $\mathbb{V}(Y_i)$ E $\phi_{Y_i}(k)$. UTILIZE ISSO PARA OBTER NOVAMENTE OS RESULTADOS $\langle S_n \rangle$, $\mathbb{V}(S_n)$ E $\phi_{S_n}(k)$ DOS EXEMPLOS E EXERCÍCIOS ANTERIORES.

iii) RECONHECENDO UMA V.A. DE PASCAL COMO UMA SOMA DE V.A.'s GEOMÉTRICAS I.I.D. ("O TEMPO DE ESPERA ATÉ O K-ÉSIMO SUCESSO É A SOMA DO TEMPO DA 1ª ESPERA, COM A NOVA ESPERA ATÉ O 2º SUCESSO, ETC."), OBTENHA A DISTRIBUIÇÃO ~~GEOMÉTRICA~~ DE PASCAL A PARTIR DA GEOMÉTRICA.

* AMOSTRA ALEATÓRIA E INFERÊNCIA

- POPULAÇÃO: CONJUNTO "ENORME", INACESSÍVEL NA PRÁTICA, MAS CARACTERIZADO POR ALGUMA DISTRIBUIÇÃO, COM PARÂMETROS

- AMOSTRA: CONJUNTO PEQUENO DE OBSERVAÇÕES DE ELEMENTOS DA POPULAÇÃO

- AMOSTRA ALEATÓRIA: $\{X_i\}$ I.I.D.

- ESTIMADOR: V.A. FORMADA COM A AMOSTRA ALEATÓRIA, $f(\{X_i\})$.

- ESTIMATIVA: CADA REALIZAÇÃO DE UM ESTIMADOR. DE QUEM? DE UM PARÂMETRO.

$$\langle X_i \rangle = \mu \; ; \; \mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$$

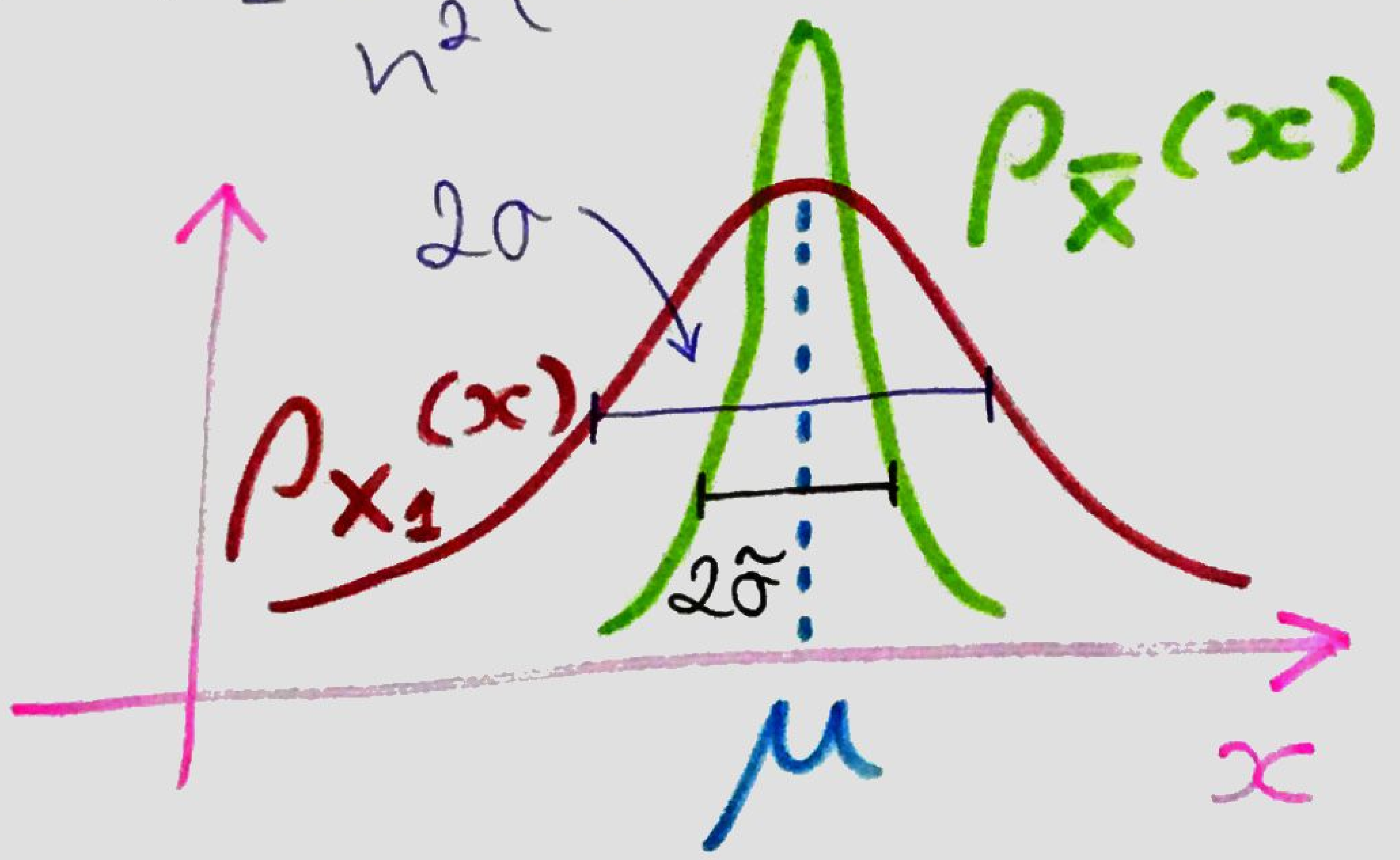
$\overline{X}$: MÉDIA AMOSTRAL, V.A.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

$$\langle \overline{X} \rangle = \frac{1}{n}(\langle X_1 \rangle + \dots + \langle X_n \rangle) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

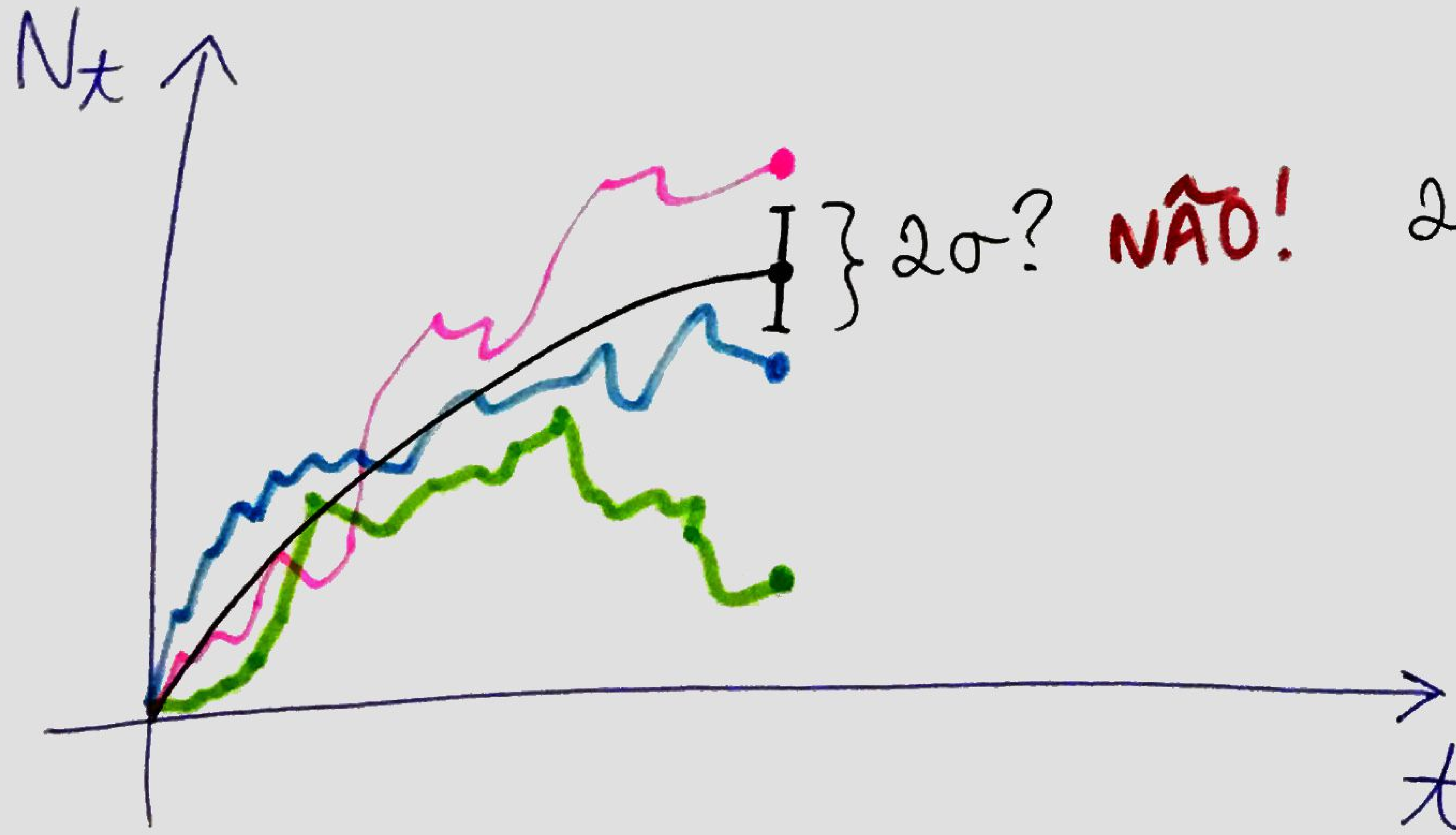
$$\mathbb{V}(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}(\mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n)) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$



LEI DOS GRANDES NÚMEROS

◇ SIMULAÇÕES ESTOCÁSTICAS



} 2σ? NÃO! $\quad 2\tilde{\sigma} = 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

* TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

$\{X_i\}$ I.I.D. , $\langle X_i \rangle = \mu$, $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$

$$S_n \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i \ , \quad Z_n \equiv \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$\boxed{Z_n \xrightarrow{n\to\infty} Z \sim N(0,1)}$$

□ DEMONSTRAÇÃO: (i) $\phi_{S_n}(k) = [\phi_{X_1}(k)]^n$

(ii) $\Psi_Y(k) = \log \phi_Y(k)$ (iii) $\phi_{a+X}(k) = e^{ika}\phi_X(k)$

(iv) $\phi_{bX}(k) = \phi_X(bk)$

$$\Psi_{Z_n}(k) \overset{iv}{=} \Psi_{S_n - n\mu}\left(\frac{k}{\sigma\sqrt{n}}\right) \overset{ii}{\underset{iii}{=}} i\left(\frac{k}{\sigma\sqrt{n}}\right)(-n\mu) + \Psi_{S_n}\left(\frac{k}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$

$$\overset{i}{\underset{ii}{=}} -ik\mu\frac{\sqrt{n}}{\sigma} + n\Psi_{X_1}\left(\frac{k}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$

$$\Psi_Y(k) = ik\langle Y \rangle + \frac{i^2k^2}{2!}\mathbb{V}(Y) + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{i^j k^j}{j!} c_j^Y$$

$$= \cancel{-ik\mu\frac{\sqrt{n}}{\sigma}} + n\left\{\cancel{i\frac{k}{\sigma\sqrt{n}}\mu} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\sigma^2\right\} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= -k^2/2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = ik.0 + \frac{i^2k^2}{2!}1^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \square$$