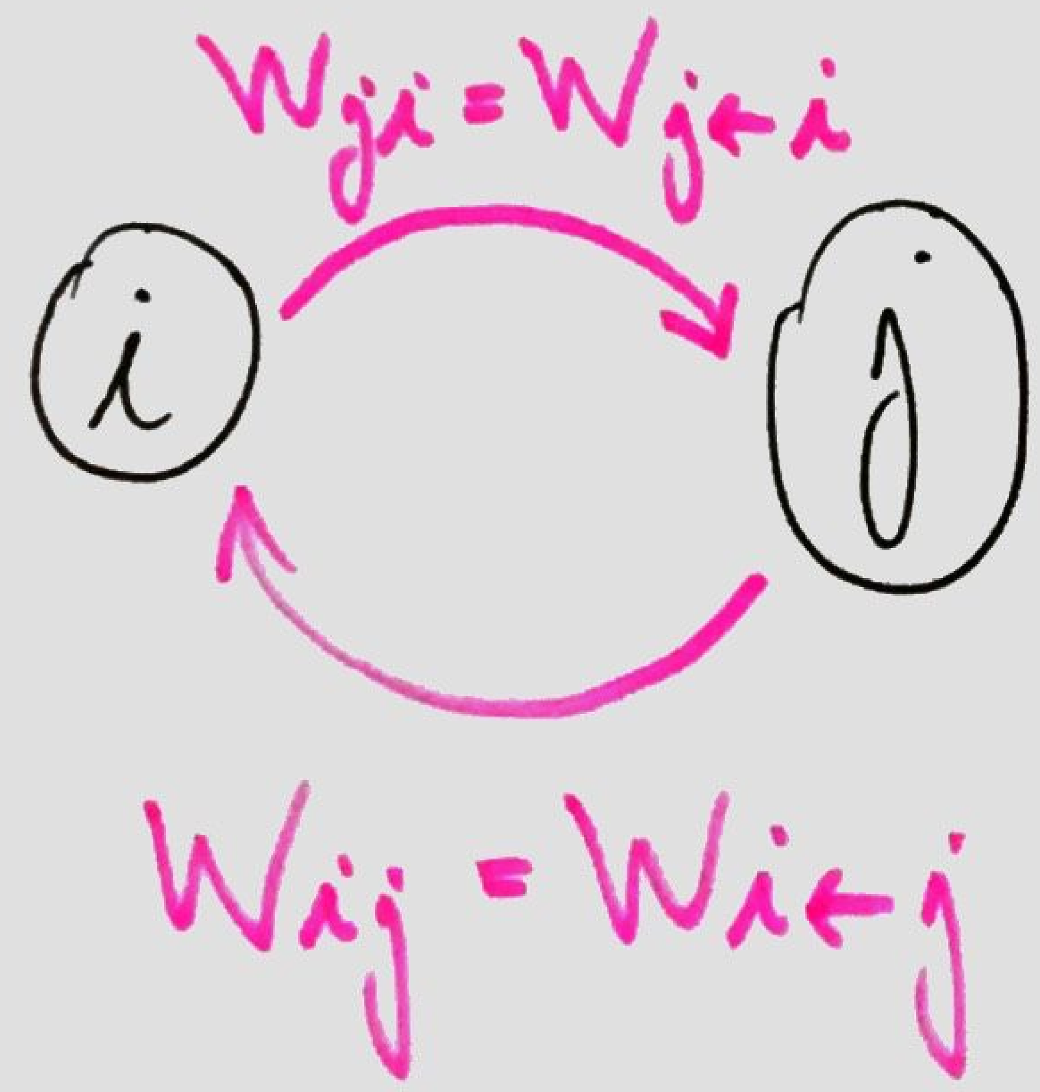
2020-1, "STATPHYS", AULA 16

OBJETIVO: APRESENTAR MAIS DUAS TÉCNICAS DE SOLUÇÃO DE EQS. MESTRAS

ONDE ESTAMOS: 2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS, 2.3 EQUAÇÕES MESTRAS

(iii) EQ. MESTRA "GERAL" (EQ. DIFERENCIAL DE "ALTA" DIMENSIONALIDADE - INFINITA?)



$$\boxed{\dot{p}_i = \sum_{j \neq i} \left(p_j W_{ij} - p_i W_{ji} \right)}$$

→ SISTEMA DE EDO's LINEARES

→ $\sum_j p_j W_{ij} = (W\vec{p})_i$

↳ INCLUINDO i

MAS $\nexists\, W_{ii}$!!!

INVENTEMOS!!!

→ COMO ASSIM "NÃO EXISTE" TAXA DE PERMANÊNCIA?! VAMOS EXAMINAR A <u>NORMALIZAÇÃO</u> DAS PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO A PARTIR DE UM ESTADO GENÉRICO i EM UM "PEQUENO" INTERVALO TEMPORAL Δt.

$$1 = W_{1i} \cdot \Delta t + W_{2i} \cdot \Delta t + \dots + W_{i-1,i} \Delta t + $$
$$+ W_{i+1,i} \Delta t + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RESTANTE} \\ \text{DE } S}}{\dots} + \mathbb{P}(\text{FICAR EM } i \text{ APÓS } \Delta t) + $$
$$+ \mathcal{O}[(\Delta t)^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{"PERMANÊNCIA"}) = 1 - \left(\sum_{j \neq i} W_{ji}\right) \Delta t + $$
$$+ \mathcal{O}[(\Delta t)^2]$$

NÃO <u>PODE</u> SER LINEAR EM Δt.

NÃO EXISTE <u>TAXA</u> DE PERMANÊNCIA EM i, NO SENTIDO EM QUE $W_{ii} \cdot \Delta t = \mathbb{P}(\text{"PERMANÊNCIA"})$.

→ INVENTAREMOS W_{ii} QUE NÃO SERÁ TAXA, MAS QUE SEJA "CONVENIENTE".

O QUE QUER QUE SEJA, $p_i W_{ii} = p_i W_{ii}$,
NÃO?

$$\dot{p}_i = \sum_{j \neq i} (p_j W_{ij} - p_i W_{ji}) = \sum_{j} (p_j W_{ij} - p_i W_{ji}) =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_j p_j W_{ij} \right)}_{(W\vec{p})_i} - p_i \underbrace{\left(\sum_{j \neq i} W_{ji} + \underset{-\sum_{j \neq i} W_{ji}}{\underset{|||}{W_{ii}}} \right)}_{=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{p}_i = (W\vec{p})_i \quad \therefore \quad \boxed{\dot{\vec{p}} = W\vec{p}}$$

W CTE

$W = W(t)$

$$\vec{p}(t) = e^{Wt} \cdot \vec{p}(0)$$

MATRIZ!

$$\vec{p}(t) = e^{\int_0^t W(t')\,dt'} \cdot \vec{p}(0)$$

INFINITA?

DIFÍCIL...

W NÃO SIMÉTRICA... DIAGONALIZÁVEL?

(10) SIMULAÇÃO: MONTE CARLO CINÉTICO OU "ALGORITMO DE GILLESPIE"

→ SE W FOR INFINITA, COMO NA ENORME MAIORIA DOS CASOS, É IMPOSSÍVEL RESOLVER NUMERICAMENTE A "EDO" $\dot{\vec{p}} = W p$. ALÉM DISSO, MESMO NO CASO FINITO, TAL SOLUÇÃO SERIA INTEGRADA/GLOBAL, INCAPAZ DE GERAR TRAJETÓRIAS ESTOCÁSTICAS, "EVENTO A EVENTO".

→ EM CONTRASTE, DISCUTIREMOS UM ALGORITMO QUE SIMULA CADA EVENTO, SEM PROBLEMAS COM ESPAÇOS INFINITOS DE ESTADOS!

→ FATO BÁSICO: NÃO FAZ SENTIDO DISCRETIZAR O TEMPO! EM Δt

"PEQUENO", É QUASE CERTO QUE NADA ACONTEÇA!

→ ESTRATÉGIA: DIVIDIR EM DUAS ETAPAS A OCORRÊNCIA DE CADA EVENTO, A. "QUANDO" E B. "QUAL".

A. INSTANTE DE OCORRÊNCIA DO "PRÓXIMO" EVENTO, QUALQUER QUE SEJA

DIGAMOS QUE, A PARTIR DE UM CERTO ESTADO, HAJA n TRANSIÇÕES POSSÍVEIS, COM TAXAS λ_i, $i = 1, \ldots, n$.

$P_0(t)$: PROB. DE QUE NENHUM EVENTO OCORRA NO INTERVALO TEMPORAL t

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) \cdot P_0(\Delta t) =$$

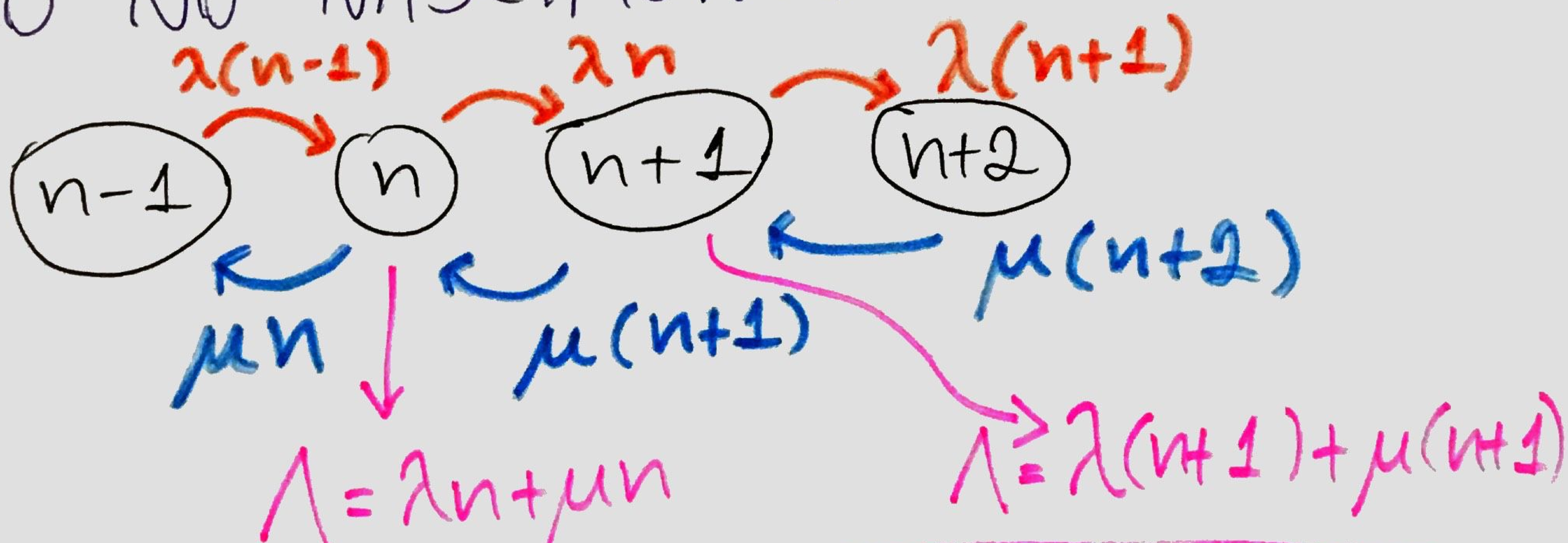
$$= P_0(t) \left[\prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i \Delta t) \right] + \mathcal{O}[(\Delta t)^2]$$

$$= P_0(t) \left\{ 1 - \Delta t \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}_{\equiv \Lambda} \right\} + \mathcal{O}[(\Delta t)^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -\Lambda P_0(t) + \frac{O[(\Delta t)^2]}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{P}_0(t) = -\Lambda . P_0(t) \quad \therefore \quad \boxed{P_0(t) = e^{-\Lambda t}}$$

Λ: TAXA GLOBAL DE TRANSIÇÃO, CONSTANTE APENAS ENTRE EVENTOS! SE "ESTAMOS" EM j, $\lambda_i \leftarrow W_{ij}$. EXEMPLO NO "NASCIMENTO E MORTE":



$P_\Lambda(t)$: DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE, APÓS ESPERAR t, OCORRER ALGUM EVENTO

$$P_\Lambda(t).\Delta t = P_0(t).\mathbb{P}(\text{EVENTO EM } \Delta t)$$
$$= P_0(t).[\Lambda.\Delta t]$$
$$= e^{-\Lambda t}\Lambda\Delta t$$

$$\therefore \boxed{P_\Lambda(t) = \Lambda e^{-\Lambda t}}$$ EXPONENCIAL!

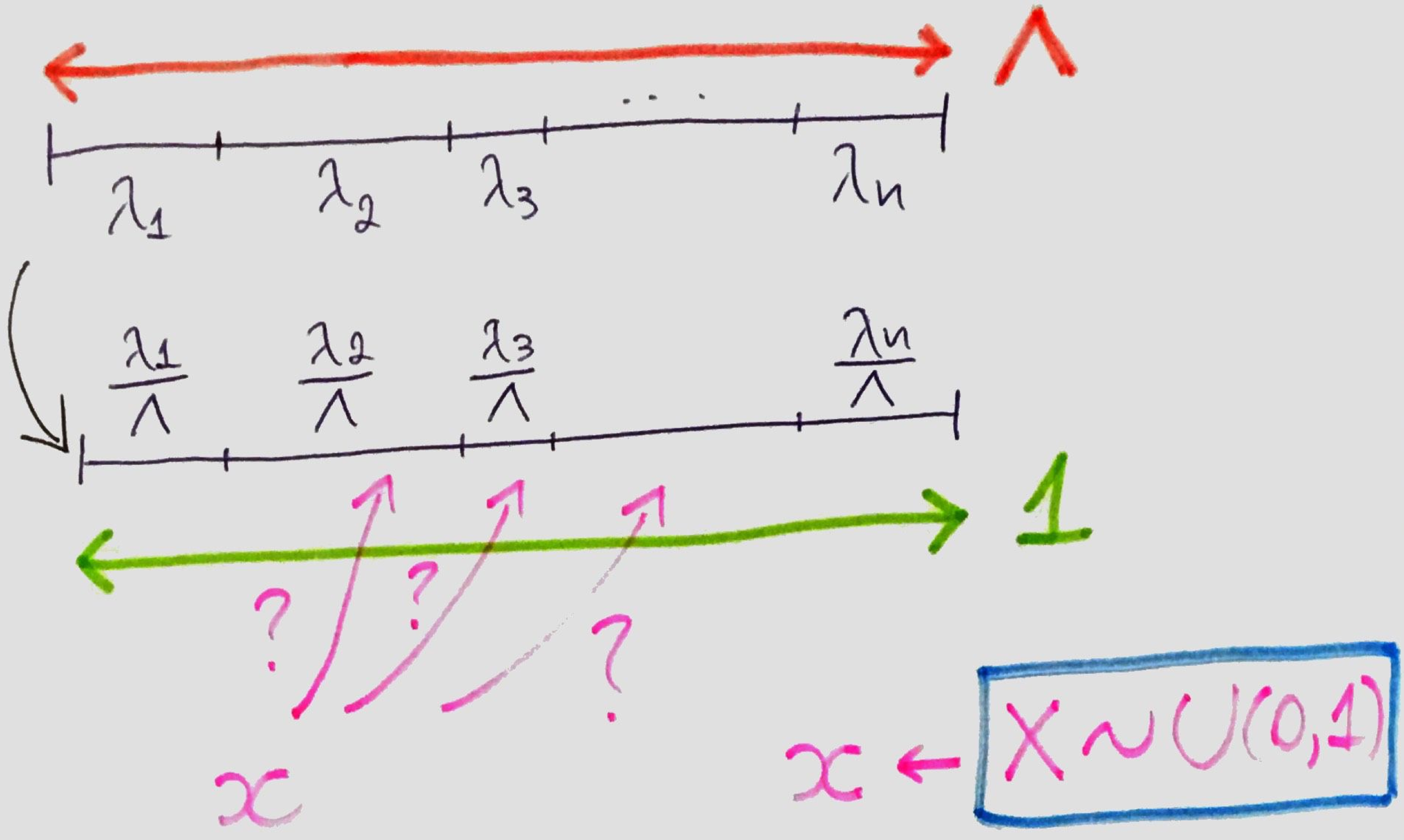
$x \leftarrow X \sim U(0,1)$] $t = -\dfrac{\log x}{\Lambda}$

B. TIPO DE EVENTO

$P_i(t)$: PROB. CONDICIONAL DE QUE, DADO QUE OCORRERÁ UM EVENTO ENTRE t E $t+\Delta t$ APÓS UMA ESPERA DE t, O EVENTO SEJA DO TIPO i

$$P_i(t) = \frac{\mathbb{P}(\text{OCORRA } i \text{ EM } (t, t+\Delta t) \text{ APÓS ESPERAR } t)}{\mathbb{P}(\text{OCORRA ALGO EM } (t, t+\Delta t) \text{ APÓS ESPERAR } t)} =$$

$$= \frac{P_0(t)\lambda_i\Delta t}{P_0(t).\Lambda\Delta t} \qquad \therefore \boxed{P_i(t) = \frac{\lambda_i}{\Lambda}}$$


Λ
λ1
λ2
λ3
λn
λ1/Λ
λ2/Λ
λ3/Λ
λn/Λ
1
?
?
?
x
x
X ~ U(0,1)