

CONVERGÊNCIA EM DISTRIBUIÇÃO.

Vanderlei da Costa Bueno

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo, SP. Brasil

Setembro de 2020

Exemplo 1 Uma variável aleatória Y é definida como degenerada se $Y = \theta$ com probabilidade 1 (θ : número real)
A sua função de distribuição é

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < \theta \\ 1 & \text{se } y \geq \theta \end{cases}$$

Exemplo 2

Sejam X_1, X_2, \dots iid com distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$, isto é, $X_1 \sim U(0, \theta)$ e defina $(Y_n)_{n \geq 1}$ por

$Y_n = \max \{X_1, X_2, \dots\}$. Portanto

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P(X_1 \leq y)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \left(\frac{y}{\theta}\right)^n & \text{se } 0 \leq y < \theta \\ 1 & \text{se } y \geq \theta \end{cases}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < \theta \\ 1 & \text{se } y \geq \theta \end{cases} = F_Y(y).$$

que é uma função de distribuição

Exemplo 3 Seja $(Y_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que $P(Y_n = n) = 1$

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < n \\ 1 & \text{se } y \geq n \end{cases}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(y) = 0$, que não é uma função de distribuição.

Exemplo 4 Sejam $(X_n)_{n \geq 1}$ tais que $P(X_n = \frac{1}{n}) = 1$

Observe que $X_n \xrightarrow{qc} 0$ e $X_n \xrightarrow{P} 0$. A função de distribuição de X_n é

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Convergência em distribuição

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{que não é função de distribuição}$$

contudo

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{é função de distribuição.}$$

Tais considerações motivam a seguinte definição

Definição 1

Seja $(F_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de funções de distribuições e F uma função de distribuição tal que, para todo número real x em que F é contínua em x , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x).$$

Então dizemos que $(F_n)_{n \geq 1}$ converge em distribuição para F .

$$F_n \rightarrow^D F.$$

Se X_n é v.a. com função de distribuição F_n e X é v.a. com função de distribuição F e $F_n \rightarrow^D F$, dizemos também que $X_n \rightarrow^D X$.

Teorema 1

Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ sequência de v.a.(s) com funções de distribuições absolutamente contínuas com funções de densidade de probabilidade $f_n(x)$.

Seja X v.a. com função de distribuição absolutamente contínua com função de densidade $f(x)$.

$$\text{Se } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

então

$$F_n \rightarrow^D F.$$

Prova

Primeiramente lembramos que se $f_n(x)$ é uniformemente contínua, então $\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx$.

Sejam $F_n(y)$ e $F(y)$ as funções de distribuições de X_n e X , respectivamente. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^y f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^y f_n(x) dx =$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^y \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^y f(x) dx = \int_{-\infty}^y f(x) dx = F(y).$$

Exemplo 5

Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $X_n \sim U(0, 1 - \frac{1}{n})$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-1/n} & \text{se } 0 < x < 1 - \frac{1}{n} \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

é a função densidade de uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$. Assim $F_n \rightarrow^D F$ e $X \sim U(0, 1)$.

Teorema 2

Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de v.a.(s) discretas que assumem valores no conjunto dos números naturais

$$P(X_n = k) = p_n(k), \quad k = 0, 1, \dots$$

e seja X uma v.a. que também assume valores em \mathbb{N}

$$\text{com } P(X = k) = p(k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Então $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k) = p(k)$ se e só se $F_n \rightarrow^D F$.

Convergência em distribuição

Prova

Observe que a função de distribuição de X_n é

$F_n(y) = \sum_{k \leq [y]} p_n(k)$ e a função de distribuição de X é

$F(y) = \sum_{k \leq [y]} p(k)$. Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \leq [y]} p_n(k) =$$

$$\sum_{k \leq [y]} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k) = \sum_{k \leq [y]} p(k) = F(y).$$

e a condição é necessária. (A segunda igualdade acima é devido ao teorema da convergência dominada).

Por outro lado, a condição é suficiente pois:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F_n(k) - F_n(k^-)) = F(k) - F(k^-) = p(k).$$

Observação 1

Se os valores de X_n não forem isolados o teorema pode não valer:

Sejam $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de v.a.(s) discretas com

$P(X_n = \frac{1}{n}) = 1$ e X uma variável aleatória com $P(X = 0) = 1$. A função de distribuição de X_n é

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

e a função de distribuição de X é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

de maneira que $X_n \rightarrow^D X$. Mas $p_n(0) = 0$ e $p(0) = 1$ de maneira que $p_n(k) \not\rightarrow p(k)$.

Convergência em distribuição

Exemplo 6

Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que

$X_n : 1, 2, 3, \dots, n$

com

$$P(X_n = k) = \frac{a}{2^k}$$

O valor de a é definido por:

$$1 = \sum_{k=1}^n P(X_n = k) = \sum_{k=1}^n \frac{a}{2^k} = a \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Concluimos que $a = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}}$, , portanto,

$$P(X_n = k) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \frac{1}{2^k}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = \frac{1}{2^k} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Observe que $X : 1, 2, \dots$, isto é, o suporte de X é \mathbb{N} ,

Teorema 3

Sejam $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória. Se $X_n \rightarrow^P X$ então $X_n \rightarrow^D X$.

Prova Sejam F_n : função de distribuição de X_n

F : função de distribuição de X

x : ponto de continuidade de F

$\{X \leq X_n + \varepsilon\}$ ou $\{X > X_n + \varepsilon\}$ é verdade.

Em $\{X_n \leq x\}$ temos $\{X \leq x + \varepsilon\}$ ou $\{X - X_n > \varepsilon\}$

$\{X_n \leq x\} \subset \{X \leq x + \varepsilon\}$ ou $\{|X - X_n| > \varepsilon\}$

$P(X_n \leq x) \leq P\{X \leq x + \varepsilon\} + P\{|X - X_n| > \varepsilon\}$

$$F_n(x) \leq F(x + \varepsilon) + P\{|X - X_n| > \varepsilon\}.$$

Com argumento semelhante

$\{X_n \leq X + \varepsilon\}$ ou $\{X_n > X + \varepsilon\}$ é verdade.

Em $\{X \leq x - \varepsilon\}$ temos $\{X_n \leq x\}$ ou $\{X_n - X > \varepsilon\}$

$$\{X \leq x - \varepsilon\} \subset \{X_n \leq x\} \cup \{|X_n - X| > \varepsilon\}$$

$$P\{X \leq x - \varepsilon\} \leq P\{X_n \leq x\} + P\{|X_n - X| > \varepsilon\}$$

$$F(x - \varepsilon) \leq F_n(x) + P\{|X_n - X| > \varepsilon\}.$$

Convergência em distribuição

Combinando (15) e (16) temos

$$F(x-\varepsilon) - P\{|X_n - X| > \varepsilon\} \leq F_n(x) \leq F(x+\varepsilon) + P\{|X_n - X| > \varepsilon\}$$

fazendo $n \rightarrow \infty$

$$F(x - \varepsilon) \leq \liminf F_n(x) \leq \limsup F_n(x) \leq F(x + \varepsilon)$$

como x é ponto de continuidade, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$

$$F(x) \leq \lim F_n(x) \leq F(x).$$

Convergência em distribuição

Exemplo 7

Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias identicamente distribuídas como X , em que

X / X_n	0	1	$P(X_n = j)$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$P(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Assim $X_n \xrightarrow{D} X$ pois X_n e X tem mesma função de distribuição.

Contudo ($\varepsilon < 1$),

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) = P(|X_n - X| = 1)$$

$$= P(X_n = 0 \text{ e } X = 1) + P(X_n = 1 \text{ e } X = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \neq 0$$

e portanto X_n não converge em probabilidade para X .

Assim, convergência em distribuição não implica convergência em probabilidade.

Teorema 4 Sejam $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias e k uma constante. Se $X_n \xrightarrow{D} k$ então $X_n \xrightarrow{P} k$.

Prova Seja

$$\text{(hipótese)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq k \\ 0 & \text{se } x < k \end{cases}$$

Convergência em distribuição

Contudo ($\varepsilon < 1$),

$$P\{|X_n - k| \leq \varepsilon\} = P\{k - \varepsilon \leq X_n \leq k + \varepsilon\} \geq$$

$$P\{k - \varepsilon < X_n \leq k + \varepsilon\} = F_n(k + \varepsilon) - F_n(k - \varepsilon).$$

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - k| \leq \varepsilon\} \geq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(k + \varepsilon) - \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(k - \varepsilon) = 1 - 0 = 1.$$

Teorema 5, Teorema de Slutsky

Sejam $(X_n)_{n \geq 1}$ e $(Y_n)_{n \geq 1}$, X , v.a.(s) tais que $X_n \rightarrow^D X$, $Y_n \rightarrow^P k$ então:

- 1 $X_n \pm Y_n \rightarrow^D X \pm k$
- 2 $X_n Y_n \rightarrow^D kX$
- 3 Se $k \neq 0$ e $P(Y_n \neq 0) = 1$

$$\frac{X_n}{Y_n} \rightarrow^D \frac{X}{k}$$

Exemplo 8 Seja $(Z_n)_{n \geq 1}$ sequência de v.a.(s) tais que

$$P(Z_n = n) = \frac{1}{n} \qquad P(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

Será que Z_n converge em distribuição ?

Exemplo 9

Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ iid com distribuição $U(0, 1)$. Seja

$Y_n = n \min \{X_1, \dots, X_n\}$. Qual o limite em distribuição de Y_n ?

Exemplo 10

Sejam X_1, X_2, \dots , v.a.(s) com funções de distribuição dadas por

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -n \\ \frac{x+n}{2n} & \text{se } -n \leq x < n \\ 1 & \text{se } x \geq n \end{cases}$$

$X_n \rightarrow^D?$

Observe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x+n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2n} + \frac{n}{2n} \right) = \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

consequentemente não é função de distribuição e X_n não converge em distribuição.

Qual o limite em distribuição de $Z_n + Y_n$ onde Z_n e Y_n são como acima?