

Integração - MAT0234 Medida e Integração
Prof. Jorge Adrian Beloqui

1 Integração

Denotaremos por $M(X, \mathcal{A})$ o conjunto das funções mensuráveis de X em $\overline{\mathbb{R}}$ e $M^+(X, \mathcal{A})$ o das funções mensuráveis e positivas (não negativas).

Definição 1.1. Uma função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *simples* se sua imagem for finita. Ou seja, se $\varphi = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$ onde $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{R}$ são os diferentes valores de φ e $E_j = \varphi^{-1}(\alpha_j)$, com E_j mensuráveis. Note que $\varphi \neq +\infty$.

Exemplo. 1. As funções degrau. Como na soma inferior e soma superior de Riemann.

2. A função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ela pode ser representada como $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$.

Uma função simples φ admite várias representações. A que demos em sua definição chama-se *representação padrão*, com os E_j disjuntos 2 a 2.

Exemplo. A função simples dada por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 3, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 2, & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

tem como representação padrão $\varphi = \chi_{[0,1)} + 3\chi_{[1,2)} + 2\chi_{[2,3]}$. Ela também pode ser representada por $\varphi = \chi_{[0,2)} + 2\chi_{[1,3]}$.

Começamos agora com a definição de Integral

Definição 1.2. Seja $\varphi \in M^+$ simples, com representação padrão $\varphi = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$. Definimos sua integral como:

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(E_j)$$

Usaremos a convenção $0 \cdot \infty = 0$.

Exercício. Mostre que a definição independe da representação de φ .

A Integral da Função de Dirichlet é 0. Com efeito, se $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$ então $\int f(x) d\mu = 1 \cdot \mu(\mathbb{Q}) = 0$.

Observe que esta definição coincide com a definição de Integral para as funções degrau utilizadas no cálculo da Integral de Riemann. Vejamos algumas das propriedades da integral das funções simples.

Lema 1. Sejam $\varphi, \psi \in M^+$ simples:

1. Se $c \geq 0$ então $\int c \varphi d\mu = c \int \varphi d\mu$

$$2. \int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$$

3. A função $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\lambda(E) = \int_E \varphi d\mu = \int \varphi \chi_E d\mu$$

é uma medida.

Demonstração. Se $\varphi = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$, então $c \varphi = \sum_{j=1}^n c \alpha_j \chi_{E_j}$, logo:

$$\int c \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n c \alpha_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(E_j) = c \int \varphi d\mu$$

O que prova o primeiro item.

O segundo item fica como exercício.

Para o terceiro item: Observe que $\varphi \chi_E = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E \cap E_j}$, logo, $\lambda(E) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(E \cap E_j)$. Como μ_j definida por $\mu_j(E) = \mu(E \cap E_j)$ é uma medida, então λ é combinação linear de μ_j e, portanto, é uma medida (pode não ser finita!). \square

Agora, podemos definir a integral de uma função $f \in M^+$ qualquer:

Definição 1.3. Seja $f \in M^+$ com $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definimos:

$$\int f d\mu = \sup \int \varphi d\mu$$

Onde o supremo é tomado sobre as funções φ que são simples e que tais que $\varphi \leq f$. Se $E \in \mathcal{A}$, definimos:

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$$

Esta definição é natural considerando o espaço de medida $(E, \mathcal{A} \cap E, \mu_E)$ onde $\mu_E(F) = \mu(E \cap F)$.

Também $\int_E f d\mu = \sup_{\{\varphi \text{ simples}; \varphi \leq f, \text{ em } E\}} \int_E \varphi d\mu$. Mas $\int_E \varphi d\mu = \int_X \varphi \chi_E d\mu$. Daí que $\int_E f d\mu = \sup_{\{\varphi \text{ simples}; \varphi \leq f\}} \int_X \varphi \chi_E d\mu = \int_X f \chi_E d\mu$.

Note que:

1. diferentemente da Integral de Riemann, a definição "aparentemente" não leva em conta o que acontece com as funções simples ψ com $\psi \geq f$;
2. a integral de $f \in M^+$ existe sempre, finita ou infinita.
3. As funções degrau estão entre as funções simples. No caso de uma função g contínua em $[a, b]$ por exemplo, temos que a Integral de Riemann será igual à Integral de Lebesgue.

Nota Histórica: Lebesgue e Kolmogorov definem a Integral de modo diferente. Eles pegam a sequência não decrescente de funções φ_n da lista de Funções Mensuráveis, definem a Integral de φ_n como a das funções simples e passam ao limite. Lembramos que essas funções podem tomar enumeráveis valores, de modo diverso das funções simples aqui mencionadas. Depois mostram que o limite é independente da sequência φ_n .

Do modo em que definimos a integral, para calcular $\int f d\mu$ deveríamos levar em conta TODAS as funções simples $\varphi \leq f$. Isto pode ser trabalho! Portanto, mostraremos a aditividade da integral depois do Teorema da Convergência Monótona.

Lema 2. *Sejam $f, g \in M^+$,*

1. *Se $f \leq g$ então $\int f d\mu \leq \int g d\mu$*
2. *Se $E, F \in \mathcal{A}$ com $E \subset F$, então $\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$*

Demonstração. Defina $\mathcal{C}(f) = \{\varphi \mid \varphi \text{ é simples e } \varphi \leq f\}$ e $\mathcal{C}(g) = \{\psi \mid \psi \text{ é simples e } \psi \leq g\}$. Se $\varphi \leq f$, então $\varphi \leq g$, ou seja $\mathcal{C}(f) \subset \mathcal{C}(g)$ porque $f \leq g$, logo: Para o segundo item: Como $f \chi_E \leq f \chi_F$ segue a afirmação a partir do primeiro item. □

Notação:

1. quando (X, \mathcal{A}, μ) forem claros, omitiremos $d\mu$ na integral
2. Escreveremos $\int f d\mu = \int_X f d\mu$ omitindo o conjunto onde integramos
3. Como $\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$, geralmente também omitiremos o conjunto onde integramos.

Proposição 3 (Desigualdade de Chebyshev). *(versão mais simples) Seja $f \in M^+$ e $c > 0$, então:*

$$\int f d\mu \geq c \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq c\})$$

Demonstração. Defina $A_c = \{x \in X \mid f(x) \geq c\}$, então A_c é mensurável. Seja φ a função simples dada por $\varphi = c \chi_{A_c}$, então $\int \varphi d\mu = c \mu(A_c)$, do segundo item da proposição anterior $\int f d\mu \geq \int f \chi_{A_c} d\mu = \int_{A_c} f d\mu$. Por construção $\int f \chi_{A_c} d\mu \geq \int \varphi d\mu = c \mu(A_c)$ ou seja:

$$\int f d\mu \geq c \mu(A_c) = c \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq c\})$$

□

Esta desigualdade é muito útil!

Proposição 4. *Seja $f \in M^+$ e $\int f d\mu = 0$, então $f = 0$ q.t.p.*

Demonstração. Defina $A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Note que $A_n \subseteq A_{n+1}$. Pela desigualdade de Chebyshev: $0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(A_n) \geq 0$, ou seja, $\mu(A_n) = 0$ para todo n . Como $A_0 = \{x \in X \mid f(x) > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, temos que $\mu(A_0) = \mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) = \lim \mu(A_n) = 0$. □

Definição 1.4. Observe que podemos ter $\int f d\mu = +\infty$. Dizemos que uma função f é *integrável* se $\int f d\mu < +\infty$. Neste caso escrevemos $f \in L^+(X, \mathcal{A})$.

Consequência: Se $f \leq g$; $f, g \in M^+$ e g integrável, então f é integrável.

Proposição 5. *Se $f \in M^+$ é integrável (ou seja, se $\int f d\mu < +\infty$), então $\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = 0$.*

Demonstração. Seja $A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq n\}$. Por Chebyshev, $+\infty > \int f d\mu \geq n\mu(A_n)$, ou seja: $\mu(A_n) \leq \frac{\int f d\mu}{n}$ e assim $\mu(A_n)$ é finita e $\rightarrow 0$. Como $A_{n+1} \subseteq A_n$ e $\mu(A_n) \rightarrow 0$ temos: $\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = \mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim \mu(A_n) = 0$. □

Agora, o que acontece com uma função que tem valores positivos e negativos? Escrevemos $f = f^+ - f^-$, com $f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = \max(-f, 0)$, então $f^+, f^- \in M^+$ e definimos:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Observe que para a expressão ter sentido, não podemos ter $\int f^+ d\mu$ e $\int f^- d\mu$ dando $+\infty$.

Definição 1.5. Dizemos que f é *semi-integrável* se uma das integrais $\int f^+ d\mu$, $\int f^- d\mu$ for $+\infty$ e a outra for finita.

Definição 1.6. Se as duas forem finitas, então $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ pode ser definida sem problemas. Neste caso dizemos que f é integrável, e escrevemos $f \in L(X, \mathcal{A})$.