PNV3421 – Processos Estocásticos

Notas de Aula – Teoria de Filas 24/09/2020

1. Revisão da aula de 17/09/2020, com observações complementares

Autolocadora com 5 lojas numa região metropolitana – do exame dos dados de seus clientes, a empresa elaborou a tabela 1, que mostra o comportamento com relação ao local de devolução do veículo.

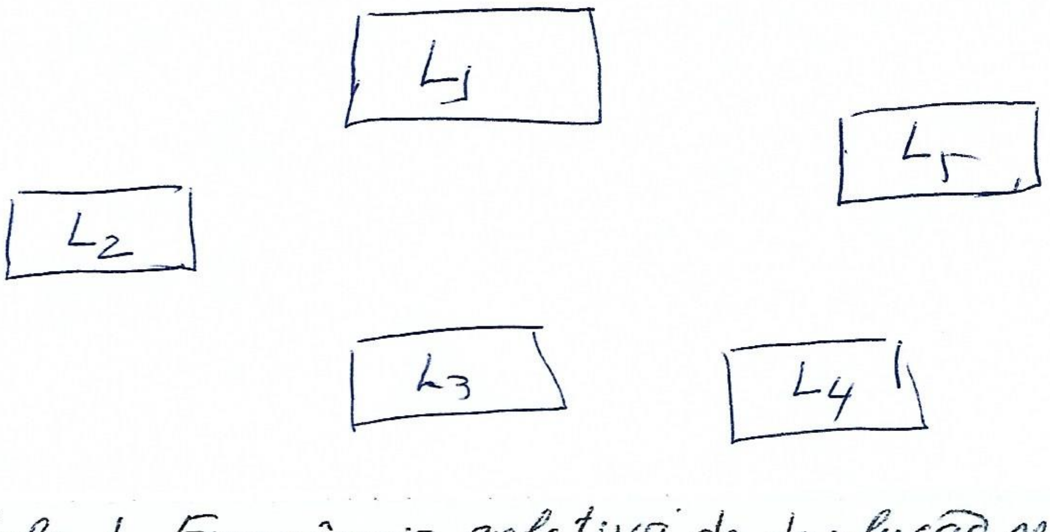

Tabela 1. Frequência relativa de devolução na loja j para um veículo retirado da loja i. (f_{ij})

loja i \ loja j	1	2	3	4	5
1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
2	0,1	0,4	0,2	0,1	0,2
3	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1
4	0,2	0,2	0,1	0,3	0,2
5	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2

A empresa está interessada em saber como o comportamento dos usuários, mostrado na Tabela 1, associado à demanda por veículos em cada uma das lojas deve moldar sua política de reposicionamento de veículos entre as diversas lojas.

Proposta para o tratamento do problema da auto locadora.

1_ Considere-se o processo estocástico em tempo discreto $\{X_n : n = 0, 1, 2, ..\}$ em que:

a) $X_0 = i$, $i = 1, \ldots, 5$, se, no instante inicial, antes da primeira locação, um dado veículo está na loja i; e

b) $X_n = j$, $j = 1, \ldots, 5$ se, após a locação n esse mesmo veículo é devolvido à loja n.

2\. Para acompanhar o percurso de um dado veículo ao longo de sucessivas locações, do ponde de vista probabilístico, admita-se que comportamento dos usuários com relação ao local de devolução obedecerá o padrão registhado na Tabela 1. Isto é,

$$p_{ij} \triangleq P[X_{n+1} = j / X_n = i] = f r_{ij} \qquad (1)$$

Fixada uma condição inicial $X_0 = i$, o intuito é calcular $P[X_n = j / X_0 = i]$, para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ e $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Para a primeira locação:

$$P[X_1 = j / X_0 = i] = p_{ij} \quad , j = 1, \ldots, 5 \qquad (2)$$

e para uma locação genérica n:

$$P[X_n = j / X_0 = i] = \sum_{k=1}^{5} P[X_{n-1} = k / X_0 = i] \cdot P[X_n = j / X_{n-1} = k]$$

$$n = 2, 3, \ldots ; \quad j = 1, \ldots 5 \qquad (3)$$

A Figura 1, abaixo, ilustra esquematicamente as relações (2) e (3).

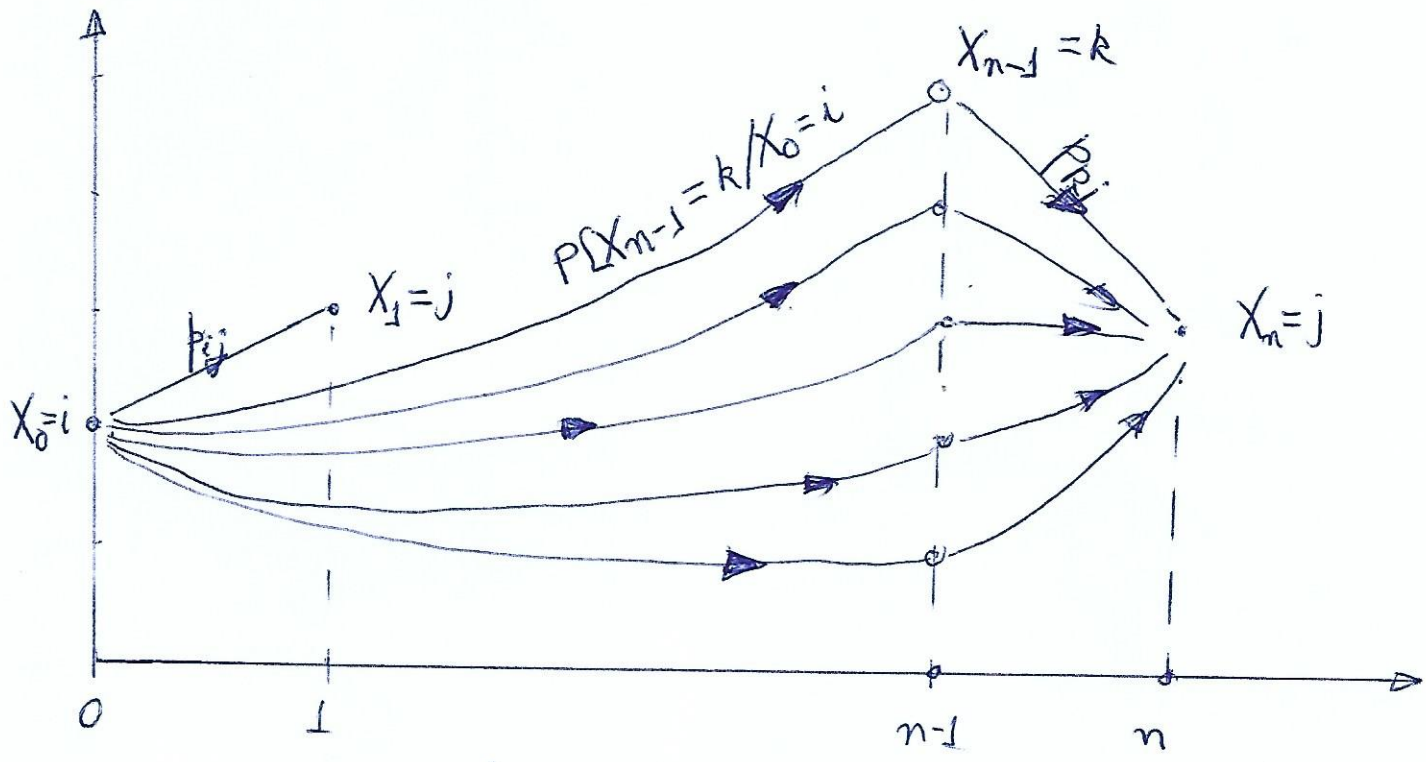

Figura 1 – Ilustração do cálculo de $P[X_n = j / X_0 = i]$

As Tabelas 2 e 3 mostram os resultados obtidos para $P[X_n = j / X_0 = i]$ para duas condições iniciais diferentes $X_0 = 2$ e $X_0 = 5$. Examinando-se os resultados dessas duas tabelas, a conjectura natural é que existe

$$\lim_{n \to \infty} P[X_n = j / X_0 = i] = \pi_j \qquad (4)$$

Tabela 2 Evolução de $P[X_n = j / X_0 = 2]$ com n

n \ j	1	2	3	4	5
1	0,1	0,4	0,2	0,1	0,2
2	0,14	0,32	0,21	0,15	0,18
3	0,147	0,303	0,206	0,165	0,179
4	0,1491	0,2991	0,2041	0,1683	0,1794
5	0,14968	0,29817	0,20358	0,16898	0,17959

Tabela 3. Evolução de $P[X_n = j / X_0 = 5]$ com n.

n \ j	1	2	3	4	5
1	0,2	0,30	0,2	0,1	0,2
2	0,15	0,30	0,21	0,16	0,18
3	0,149	0,299	0,205	0,168	0,179
4	0,1496	0,2982	0,2037	0,1690	0,1795

O passo seguinte nesse estudo do problema da autolocadora é o cálculo, de forma explícita, da distribuição estacionária de probabilidades π_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Da expressão (3), deixando $n \to \infty$, obtém-se

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{5} \pi_k \, p_{kj} \quad , \quad j = 1, \ldots, 5 \qquad (5)$$

ou ainda

$$\pi = \pi P \qquad (5')$$

em que $\pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5]$

e P é a matriz das probabilidades de transição (matriz das freqüências relativas de devolução na loja para um veículo retirado da loja i. Para os dados da tabela 1, as 5 equações do sistema (4) são:

$$S \left\{ \begin{array}{l} -0{,}8\pi_1 + 0{,}1\pi_2 + 0{,}1\pi_3 + 0{,}2\pi_4 + 0{,}2\pi_5 = 0 \\ 0{,}2\pi_1 - 0{,}6\pi_2 + 0{,}3\pi_3 + 0{,}2\pi_4 + 0{,}3\pi_5 = 0 \\ 0{,}2\pi_1 + 0{,}2\pi_2 - 0{,}7\pi_3 + 0{,}1\pi_4 + 0{,}2\pi_5 = 0 \\ 0{,}2\pi_1 + 0{,}1\pi_2 + 0{,}2\pi_3 - 0{,}7\pi_4 + 0{,}1\pi_5 = 0 \\ 0{,}2\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}1\pi_3 + 0{,}2\pi_4 - 0{,}8\pi_5 = 0 \end{array} \right.$$

Somando-se as equações do sistema S, obtém-se

$$0\pi_1 + 0\pi_2 + 0\pi_3 + 0\pi_4 + 0\pi_5 = 0$$

mostrando que existe redundância nesse sistema de equações. (Caso as 5 equações fossem independentes, a solução seria $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = 0$)

A redundância decorre de que, em cada linha da matriz P, a soma das probabilidades de transição é igual a 1. Assim, uma das equações do sistema S deve ser substituída pela equação

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$$

obtendo-se a solução: $\pi_1 = 0{,}14987$;

$\pi_2 = 0{,}29788$; $\pi_3 = 0{,}20342$; $\pi_4 = 0{,}16916$;

e $\pi_5 = 0{,}17967$.

2 – Cadeia de Markov – definição

Um processo estocástico em tempo discreto $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$, com espaço de estados enumerável (finito ou não) é uma cadeia de Markov se, para quaisquer valores de $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j$, e n,

$$P[X_{n+1} = j / X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i] =$$

$$= P[X_{n+1} = j / X_n = i] \qquad (6)$$

Conforme ilustra a Figura 2, $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ podem ser interpretados como estados passados, X_n como estado presente e X_{n+1} como estado futuro e, assim, a expressão (6) implica que a probabilidade condicional de um estado futuro, dados os estados passados e o estado presente, não depende dos estados passados.

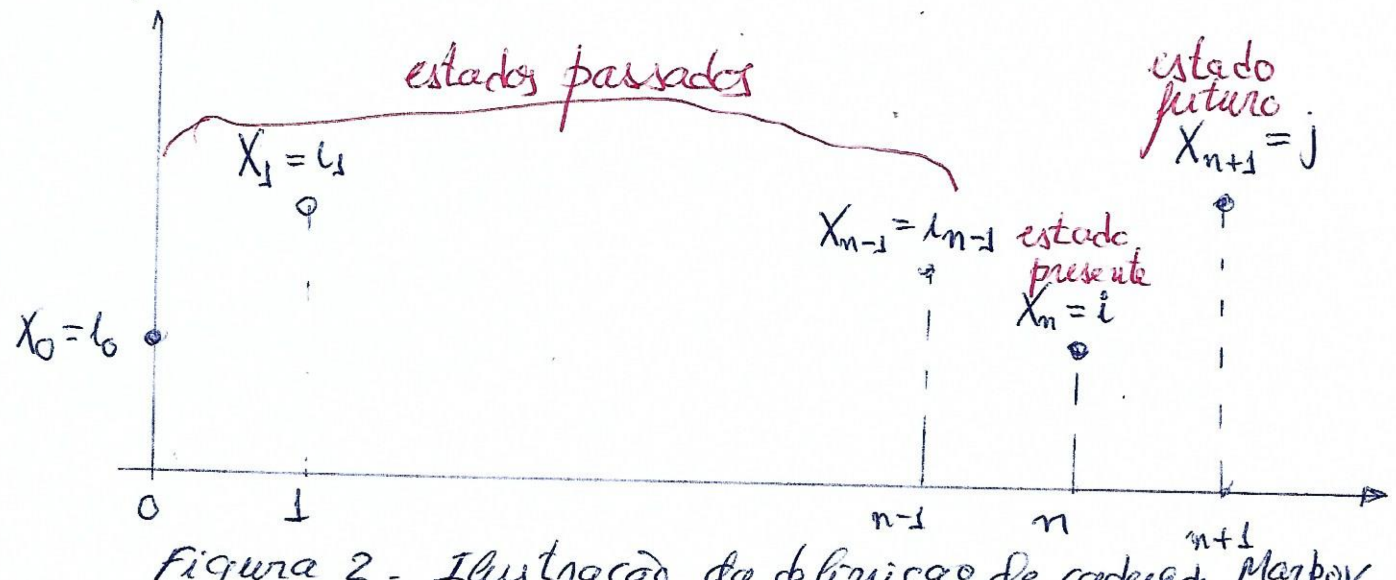

Figura 2 - Ilustração da definição de cadeia de Markov

Quando, para quaisquer i e j, a probabilidade de transição $P[X_{n+1} = j / X_n = i] = p_{ij}$, para qualquer valor de n, diz-se que a cadeia de Markov tem probabilidades de transição estacionárias. Somente cadeias de Markov com tal característica serão objeto de estudo nesta disciplina.

No caso do processo estocástico $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ utilizado para acompanhar o movimento de um veículo entre as diversas lojas da empresa autolocadora, ao longo de sucessivas locações, foi admitido, implicitamente, que tal processo era uma cadeia de Markov - um cliente, ao retirar um veículo da loja i, iria devolvê-lo, de acordo com seu interesse, em uma loja j e que, por análise estatística do comportamento dos usuários, a probabilidade de devolução na loja j seria $p_{ij} = fr_{ij}$, sem nenhuma interferência do percurso realizado pelo veículo até chegar à loja i e explicitamente que as probabilidades de transição eram estacionárias.

Convém mencionar que cadeia de Markov é um caso particular de processo Markoviano, definido anteriormente, em que tanto o conjunto índice quanto o espaço de estados são enumeráveis.

3. Outros Exemplos de Cadeia de Markov

3.1 Duas urnas A e B e N bolas

Há N bolas, numeradas de 1 a N, distribuídas entre duas urnas A e B e realiza-se uma sequência de experimentos. Em cada experimento, sorteia-se aleatoriamente um número entre 1 e N e a bola com tal número (número sorteado) é transferida da urna em que está para a outra urna. Seja, então, o processo estocástico $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ em que X_n é o número de bolas na urna A após o experimento n. Este processo estocástico é uma cadeia de Markov pois se:

1. o estado presente é $X_n = i$, $0 < i < N$, o estado futuro X_{n+1} será ou $X_{n+1} = i+1$, caso seja sorteada uma bola da urna B, evento com probabilidade $(N-i)/N$, ou $X_{n+1} = i-1$, caso seja sorteada uma bola da urna A, evento com probabilidade i/N;
2. o estado presente é $X_n = 0$, o estado futuro será $X_{n+1} = 1$, com probabilidade igual a 1, pois todas as bolas estão na urna B; e

3 – o estado presente é $X_n = N$, então o estado futuro será $X_{n+1} = N-1$, com probabilidade igual a 1, pois todas as bolas estão na urna A.

Em todos os casos, a transição para o estado futuro dispensa totalmente o conhecimento dos estados passados $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$. A Tabela 4 mostra a matriz das probabilidades de transição p_{ij} para esta cadeia de Markov. Este exemplo com duas urnas A e B e N bolas é uma analogia com o modelo de difusão de Ehrenfest, no qual um recipiente é separado por uma membrana em duas câmaras A e B. No modelo de Ehrenfest, uma transição corresponde à passagem de uma molécula através da membra de uma câmara para a outra.

Tabela 4. Matriz das probabilidades de transição para a cadeia de Markov do exemplo com urnas A e B e N bolas

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & & & & & & & \\
1/N & 0 & \frac{N-1}{N} & & & & & & \\
 & 2/N & 0 & \frac{N-2}{N} & & & & & \\
 & & \frac{3}{N} & 0 & \frac{N-3}{N} & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & \frac{N-3}{N} & 0 & 3/N & & \\
 & & & & & \frac{N-2}{N} & 0 & 2/N & \\
 & & & & & & \frac{N-1}{N} & 0 & 1/N \\
 & & & & & & & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

3.2 Duas Urnas A e B, N bolas brancas e N bolas vermelhas

Há N bolas brancas e N bolas vermelhas distribuídas entre duas urnas A e B e realiza-se uma sequência de experimentos. Em cada experimento, sorteiam-se aleatoriamente e simultaneamente uma bola na urna A e uma bola na urna B. Cada bola sorteada é transferida de urna. Na condição inicial, o número total de bolas em cada urna é igual a N. Considere o processo estocástico $\{X_n = 0, 1, 2, \cdots\}$ em que X_n é o número de bolas vermelhas na urna B após o experimento n. Este processo estocástico é uma cadeia de Markov? Quais são as probabilidades de transição? Questão a ser resolvida pelos alunos em aula - 24/09/2020

Espaço de estados para o processo estocástico acima definido {0, 1, 2, ... N-1, N}. Para os casos extremos $X_n = 0$ ou $X_n = N$, as probabilidades de transição são:

$$P[X_{n+1} = 1 / X_n = 0] = 1$$

$$P[X_{n+1} = N-1 / X_n = N] = 1$$

De fato, no primeiro caso, a bola sorteada na urna B é branca, com probabilidade igual a 1, e a bola sorteada na urna A é vermelha, com certeza. De maneira análoga, no segundo caso, sorteia-se, com probabilidades iguais a 1, uma bola vermelha na urna B e uma bola branca na urna A.

Considere-se, agora um caso qualquer $X_n = i$, $0 < i < N$. A Figura 3 ilustra as transições possíveis quando se faz o experimento $(n+1)$. Caso a bola sorteada na urna B seja vermelha, evento com probabilidade igual a i/N, dado que das N bolas na urna B, i são vermelhas, e a bola sorteada na urna B seja branca, evento com probabilidade igual a i/N, dado que das N bolas na urna B, $(N-i)$ são vermelhas e i são brancas, então $X_{n+1} = i-1$. Assim,

$$P[X_{n+1} = i-1 / X_n = i] = (i/N)^2$$

Por sua vez, a transição de $X_n = i$ para $X_{n+1} = i+1$ ocorre quando a bola sorteada na urna B é branca e a bola sorteada na urna A é vermelha, ambos eventos com probabilidade igual a $(N-i)/N$. Logo,

$$P[X_{n+1} = i+1 / X_n = i] = ((N-i)/N)^2$$

E, por fim, a transição de $X_n = i$ para $X_{n+1} = i$ ocorre ou quando as bolas sorteadas em A e B são ambas vermelhas ou quando ambas são brancas; assim,

$$P[X_{n+1} = i / X_n = i] = \frac{(N-i)}{N} \times \frac{i}{N} + \frac{i}{N} \times \frac{N-i}{N} = \frac{2i(N-i)}{N^2}$$

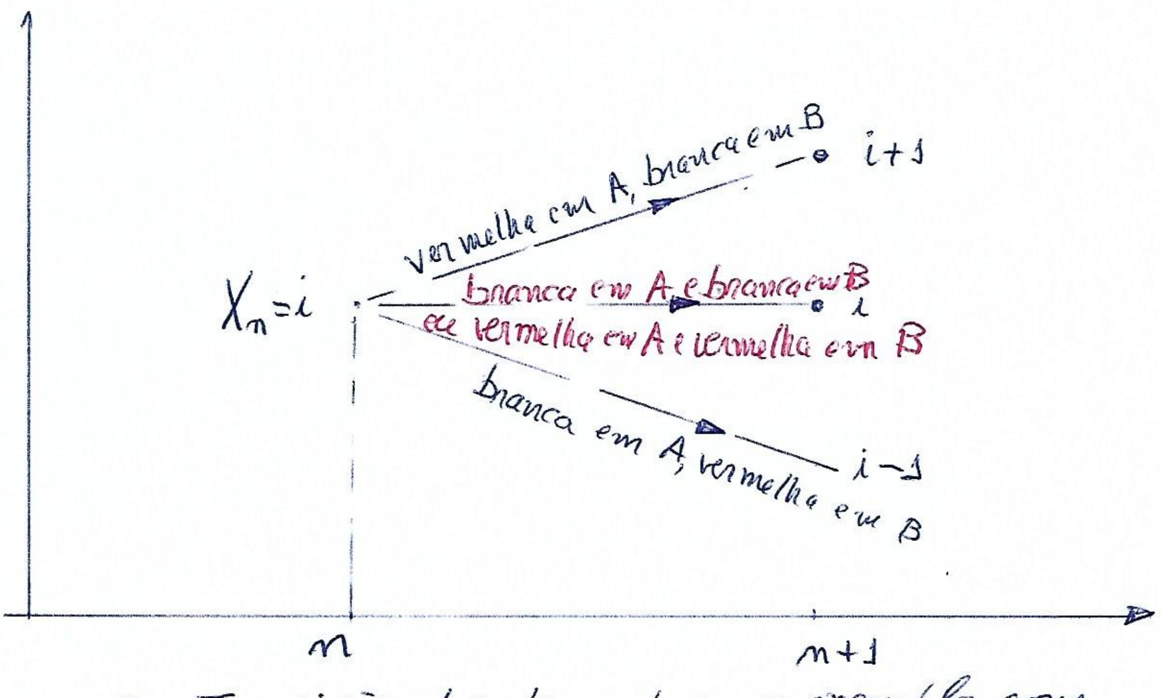

Figura 3 - Transições possíveis para o exemplo com urnas A e B e N bolas brancas e N bolas vermelhas

3.3 Ruína do jogador

Considere-se o seguinte combate entre um jogador e uma banca; em cada rodada, a aposta é de 1 unidade monetária, sendo p a probabilidade de o jogador ganhar. Admita-se que o capital inicial do jogador seja K e o da banca N, $N \gg K$; admita-se ainda que o jogo não possa prosseguir caso um dos competidores fique com capital igual a zero. Considere-se, então, o processo estocástico $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ em que X_n é o capital do jogador após a rodada n. O espaço de estados deste processo é $\{0, 1, 2, \dots, K+N\}$. Ele é uma cadeia de Markov, com as seguintes probabilidades de transição:

1) para $0 < i < K+N$

$$P[X_{n+1} = i+1 / X_n = i] = p$$

e

$$P[X_{n+1} = i-1 / X_n = i] = 1-p$$

2) $P[X_{n+1} = 0 / X_n = 0] = 1$

3) $P[X_{n+1} = K+N / X_n = K+N] = 1$

Ao contrário dos 3 exemplos anteriores de cadeia de Markov para os quais todos os estados da cadeia se comunicavam entre si, sendo possível ir de um estado qualquer i para outro estado qualquer j, não interessando o número de transições, neste caso não é possível acessar outros estados se o processo atingir o estado zero ou K+N. Estes estados são chamados de estados absorventes. O principal interesse neste problema é determinar a probabilidade de se atingir o estado zero, que caracteriza a ruína do jogador.

4 - Cadeias de Markov em processos de fila

4.1 Cadeia de Markov para a fila M/M/1

Considere-se uma fila com as seguintes características:

- o processo de chegada de clientes é Poisson, com taxa λ;
- os tempos de atendimento dos clientes são variáveis aleatórias exponenciais independentes com média $1/\mu$.
- há um único posto para atendimento dos clientes

Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ o número de clientes no instante; a Figura 4 apresenta uma amostra do processo estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$; quando há uma chegada de cliente ao sistema, há uma transição de uma unidade para cima no valor de $N(t)$ e, quando há a saída de um cliente (fim de atendimento de um cliente, a transição corresponde à queda de uma unidade no valor de $N(t)$. Chamando de transições as chegadas e saídas de clientes e utilizando um índice n para as transições, define-se o processo estocástico $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ em que X_0 é o número de clientes no sistema no instante inicial e, para $n \geq 1$, X_n é o número de clientes após a transição n. A Figura 5 mostra os valores de X_n associados à amostra de $N(t)$ da Figura 4.

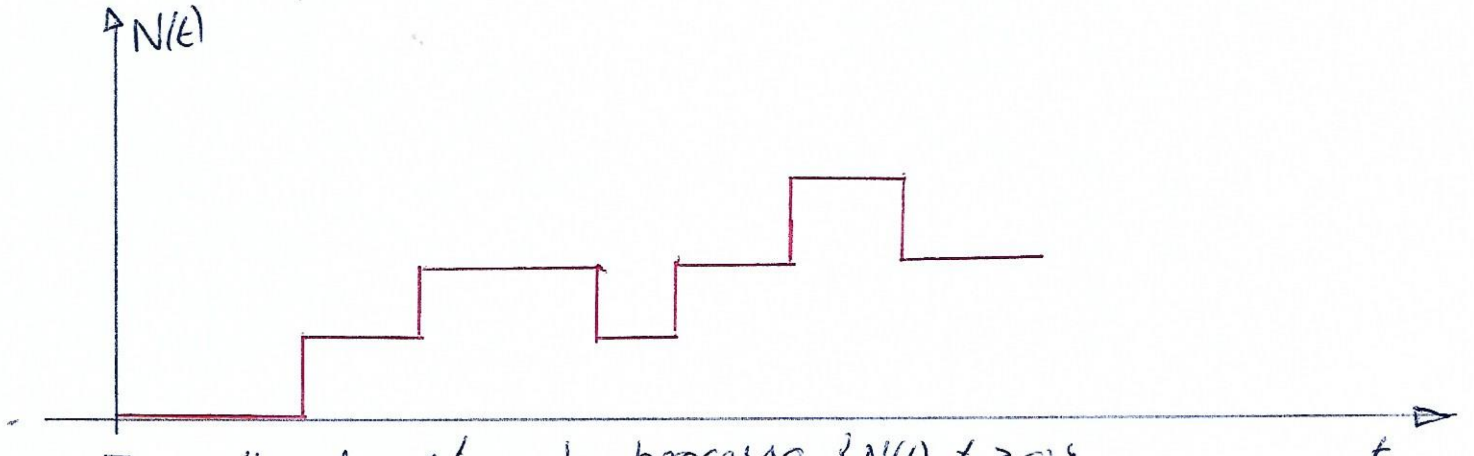

Figura 4 - Amostra do processo $\{N(t), t \geq 0\}$

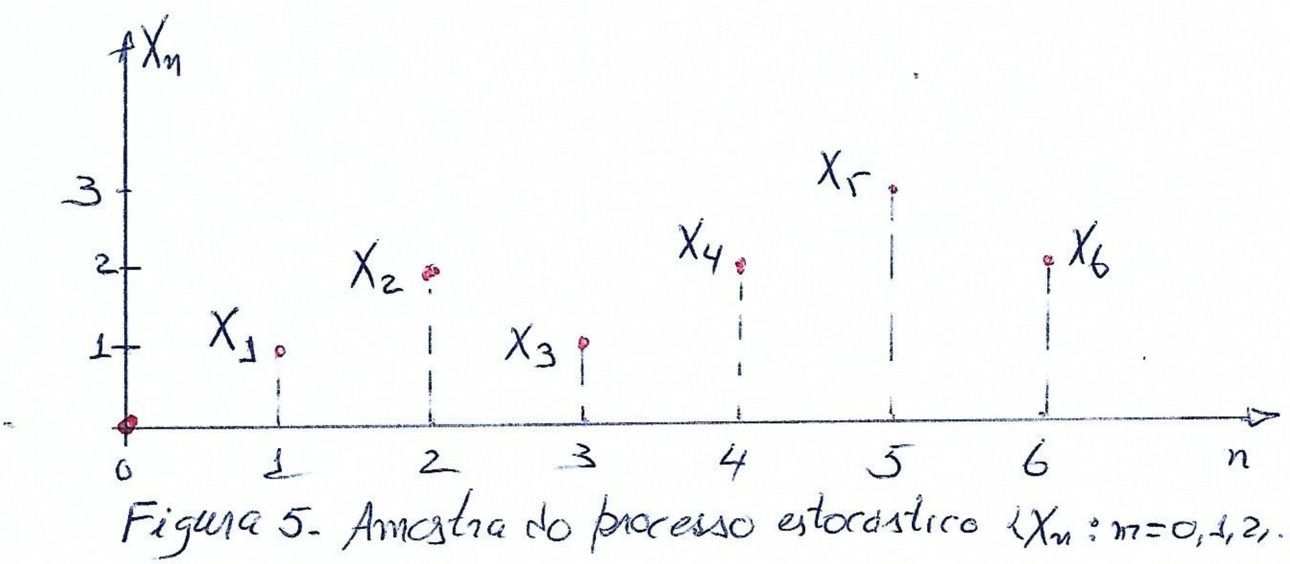

Figura 5 - Amostra do processo estocástico $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$

A seguir, será mostrado que o processo estocástico $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ é uma cadeia de Markov e serão calculadas as probabilidades de transição entre estados desta cadeia. Seja t_n o instante da transição; caso $X_n = 0$, a próxima transição será uma chegada, com certeza e

$$P[X_{n+1} = 1 / X_n = 0] = 1$$

Para examinar o caso em que $X_n = i > 0$, considere-se a Figura 6. Admita-se, inicialmente, que a transição n tenha sido uma chegada - a chegada de índice m e que $X_n > 1$, o que implica que há um cliente sendo atendido. Seja este o cliente de índice ℓ, cujo início de atendimento se deu no instante s_ℓ; sejam V_ℓ o tempo de atendimento do cliente ℓ e θ_ℓ o tempo residual de atendimento desse cliente, medido a partir do instante t_m. Como o tempo de atendimento V_ℓ é uma variável aleatória exponencial - sem memória, de média $1/\mu$, o tempo residual de atendimento θ_ℓ também é uma variável exponencial com média $1/\mu$. Por sua vez, o intervalo τ_{m+1} até a próxima chegada é uma variável exponencial de média $1/\lambda$. Desta forma, a transi será de $X_n = i$ para $X_{n+1} = i+1$, caso a variável θ_ℓ seja maior que a variável τ_{m+1}, e de $X_n = i$ para $X_{n+1} = i-1$, caso $\tau_{m+1} > \theta_\ell$, não dependendo dos estados passados $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$. Assim,

$$P[X_{n+1} = i+1 / X_n = i] = P[\theta_\ell > \tau_{m+1}]$$

$$P[X_{n+1} = i-1 / X_n = i] = P[\tau_{m+1} > \theta_\ell]$$

Conforme mostrado em aulas anteriores,

$$P[\theta_\ell > \tau_{m+1} / \tau_{m+1} = t] = e^{-\mu t}$$

e

$$P[\theta_\ell > \tau_{m+1}] = \int_0^\infty P[\theta_\ell > \tau_{m+1} / \tau_{m+1} = t] f_{\tau_{m+1}}(t)\,dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \int_0^\infty (\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu)t} dt = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Logo,

$$P[X_{n+1} = i+1 / X_n = i] = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

e

$$P[X_{n+1} = i-1 / X_n = i] = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

No caso em que a transição n fosse a chegada m e $X_n = 1$, a comparação seria entre V_m, tempo de atendimento do cliente m, e τ_{m+1} e o resultado para as probabilidades de transição seria o mesmo. Caso a transição n fosse a saída do cliente l, em lugar da chegada do cliente m, haveria a comparação entre o tempo de atendimento do cliente (l+1), variável exponencial de média 1/u, com o intervalo residual até a chegada de um próximo cliente. Como os intervalos entre chegadas consecutivas são variáveis exponenciais, sem memória, de média 1/λ, qualquer intervalo residual até a chegada do próximo cliente também é variável exponencial de média 1/λ. Neste caso, também chega-se aos mesmos resultados para as probabilidades de transição.

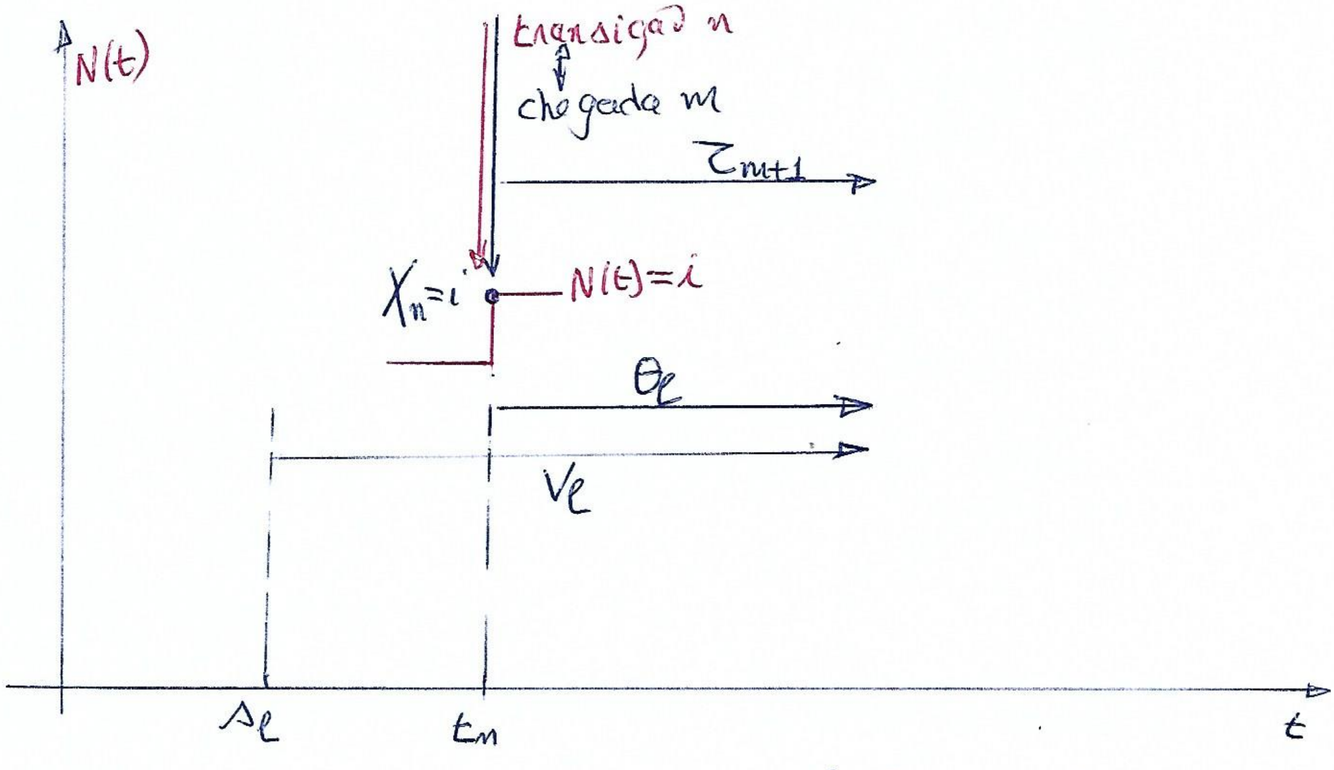

Figura 6 Ilustração para cálculo das probabilidades de transição da cadeia de Markov da fila M/M/1