DINÂMICA DE TRANSFORMAÇÕES DO CÍRCULO

Edson Vargas

Universidade de São Paulo

O CÍRCULO

1. $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ munido da soma $\mod 1$, a distância $\mathrm{d}(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$ e a medida de Lebesgue denotada por λ.

O CÍRCULO

1. $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ munido da soma $\mod 1$, a distância $\mathrm{d}(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$ e a medida de Lebesgue denotada por λ.
2. $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ munido da multiplicação, a distância é o comprimento do menor arco dividido por 2π e a medida de Lebesgue λ.

O CÍRCULO

1. $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ munido da soma $\mod 1$, a distância $\mathrm{d}(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$ e a medida de Lebesgue denotada por λ.
2. $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ munido da multiplicação, a distância é o comprimento do menor arco dividido por 2π e a medida de Lebesgue λ.
3. $x \mapsto e^{2\pi i x}$ é uma isometria dessas duas distâncias.

O CÍRCULO

1. $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ munido da soma $\bmod 1$, a distância $\mathrm{d}(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$ e a medida de Lebesgue denotada por λ.
2. $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ munido da multiplicação, a distância é o comprimento do menor arco dividido por 2π e a medida de Lebesgue λ.
3. $x \mapsto e^{2\pi i x}$ é uma isometria dessas duas distâncias.
4. $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $\Pi(x) = x \bmod 1,$ recobrimento.

O CÍRCULO

1. $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ munido da soma $\mod 1$, a distância $\mathrm{d}(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$ e a medida de Lebesgue denotada por λ.
2. $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ munido da multiplicação, a distância é o comprimento do menor arco dividido por 2π e a medida de Lebesgue λ.
3. $x \mapsto e^{2\pi i x}$ é uma isometria dessas duas distâncias.
4. $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $\Pi(x) = x \mod 1$, recobrimento.
5. $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ contínua, $\Rightarrow \text{existe}$ $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, *levantamento* de f, tal que $\Pi \circ F = f \circ \Pi$.

O CÍRCULO

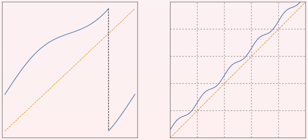
1. $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ munido da soma $\mod 1$, a distância $\mathrm{d}(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$ e a medida de Lebesgue denotada por λ.
2. $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ munido da multiplicação, a distância é o comprimento do menor arco dividido por 2π e a medida de Lebesgue λ.
3. $x \mapsto e^{2\pi i x}$ é uma isometria dessas duas distâncias.
4. $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $\Pi(x) = x \mod 1$, recobrimento.
5. $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ contínua, $\Rightarrow \text{existe } F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, *levantamento* de f, tal que $\Pi \circ F = f \circ \Pi$.

O CÍRCULO

1. $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ munido da soma $\bmod 1$, a distância $\mathrm{d}(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$ e a medida de Lebesgue denotada por λ.
2. $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ munido da multiplicação, a distância é o comprimento do menor arco dividido por 2π e a medida de Lebesgue λ.
3. $x \mapsto e^{2\pi i x}$ é uma isometria dessas duas distâncias.
4. $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $\Pi(x) = x \bmod 1$, recobrimento.
5. $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ contínua, $\Rightarrow$ existe $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, *levantamento* de f, tal que $\Pi \circ F = f \circ \Pi$.
   Se f é homeomorfismo, então $F(x + 1) = F(x) + 1$.

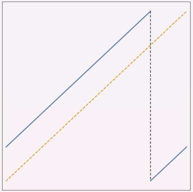
O CÍRCULO

1. $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ munido da soma $\mod 1$, a distância $\mathrm{d}(x, y) = \min\{|x-y|, 1-|x-y|\}$ e a medida de Lebesgue denotada por λ.
2. $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ munido da multiplicação, a distância é o comprimento do menor arco dividido por 2π e a medida de Lebesgue λ.
3. $x \mapsto e^{2\pi i x}$ é uma isometria dessas duas distâncias.
4. $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $\Pi(x) = x \mod 1$, recobrimento.
5. $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ contínua, $\Rightarrow$ existe $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, *levantamento* de f, tal que $\Pi \circ F = f \circ \Pi$.
   Se f é homeomorfismo, então $F(x+1) = F(x) + 1$.



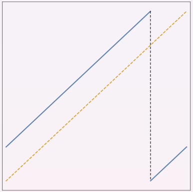
ROTAÇÃO RÍGIDA

1. $R_\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $R_\rho(x) = x + \rho \bmod 1$



ROTAÇÃO RÍGIDA

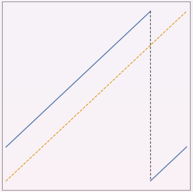
1. $\mathrm{R}_\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $\mathrm{R}_\rho(x) = x + \rho \bmod 1$



2. R_ρ preserva a distância d e a medida de Lebesgue λ.

ROTAÇÃO RÍGIDA

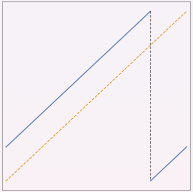
1. $\mathrm{R}_\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $\mathrm{R}_\rho(x) = x + \rho \bmod 1$



2. R_ρ preserva a distância d e a medida de Lebesgue λ.
3. $\rho = p/q \Longrightarrow \mathrm{R}_\rho^q = \mathrm{id}$

ROTAÇÃO RÍGIDA

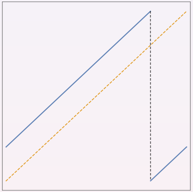
1. $\mathrm{R}_\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $\mathrm{R}_\rho(x) = x + \rho \bmod 1$



2. R_ρ preserva a distância d e a medida de Lebesgue λ.
3. $\rho = p/q \Longrightarrow \mathrm{R}_\rho^q = \mathrm{id}$
4. $\rho \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \mathrm{orb}^+(x)$ é densa em $\mathbb{S}^1$ (casa do pombo).

ROTAÇÃO RÍGIDA

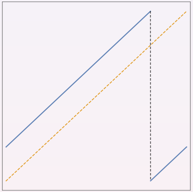
1. $\mathrm{R}_\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $\mathrm{R}_\rho(x) = x + \rho \bmod 1$



2. R_ρ preserva a distância d e a medida de Lebesgue λ.
3. $\rho = p/q \Longrightarrow \mathrm{R}_\rho^q = \mathrm{id}$
4. $\rho \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \mathrm{orb}^+(x)$ é densa em $\mathbb{S}^1$ (casa do pombo).

ROTAÇÃO RÍGIDA

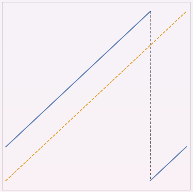
1. $\mathrm{R}_\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $\mathrm{R}_\rho(x) = x + \rho \bmod 1$



2. R_ρ preserva a distância d e a medida de Lebesgue λ.
3. $\rho = p/q \implies \mathrm{R}_\rho^q = \mathrm{id}$
4. $\rho \notin \mathbb{Q} \implies \mathrm{orb}^+(x)$ é densa em $\mathbb{S}^1$ (casa do pombo).
   $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ m < n \leq 1/\varepsilon < n+1$ com $\mathrm{d}(\mathrm{R}_\rho^n(x), \mathrm{R}_\rho^m(x)) < \varepsilon$

ROTAÇÃO RÍGIDA

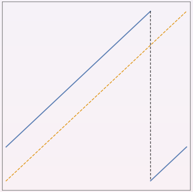
1. $\mathrm{R}_\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $\mathrm{R}_\rho(x) = x + \rho \mod 1$



2. R_ρ preserva a distância d e a medida de Lebesgue λ.
3. $\rho = p/q \Longrightarrow \mathrm{R}_\rho^q = \mathrm{id}$
4. $\rho \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \mathrm{orb}^+(x)$ é densa em $\mathbb{S}^1$ (casa do pombo).
   $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ m < n \leq 1/\varepsilon < n+1$ com $\mathrm{d}(\mathrm{R}_\rho^n(x), \mathrm{R}_\rho^m(x)) < \varepsilon$
   $\Longrightarrow \mathrm{d}(\mathrm{R}_\rho^{n-m}(x), x) < \varepsilon \Longrightarrow \mathrm{orb}^+(x)$ é ε densa.

ROTAÇÃO RÍGIDA

1. $\mathrm{R}_\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $\mathrm{R}_\rho(x) = x + \rho \bmod 1$



2. R_ρ preserva a distância d e a medida de Lebesgue λ.
3. $\rho = p/q \Longrightarrow \mathrm{R}_\rho^q = \mathrm{id}$
4. $\rho \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \mathrm{orb}^+(x)$ é densa em $\mathbb{S}^1$ (casa do pombo).
   $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, m < n \leq 1/\varepsilon < n+1$ com $\mathrm{d}(\mathrm{R}_\rho^n(x), \mathrm{R}_\rho^m(x)) < \varepsilon$
   $\Longrightarrow \mathrm{d}(\mathrm{R}_\rho^{n-m}(x), x) < \varepsilon \Longrightarrow \mathrm{orb}^+(x)$ é ε densa.
5. $\rho \notin \mathbb{Q}$ e Λ é fechado e invariante, então $\Lambda = \mathbb{S}^1$ (minimal).

Proposição (Número de Rotação)

Sejam $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F um levantamento de f. Então o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)-x}{n} = \rho(F)$ existe e depende apenas de F.

Proposição (Número de Rotação)

Sejam $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F um levantamento de f. Então o limite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F^n(x) - x}{n} = \rho(F)$ existe e depende apenas de F.

Prova.

$x \leq y < x + k \Longrightarrow F(x) \leq F(y) < F(x+k) = F(x) + k$

Proposição (Número de Rotação)

Sejam $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F um levantamento de f. Então o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^n(x) - x}{n} = \rho(F)$ existe e depende apenas de F.

Prova.

$$x \le y < x + k \Longrightarrow F(x) \le F(y) < F(x+k) = F(x) + k$$

$$\left| \frac{F^n(x) - x}{n} - \frac{F^n(y) - y}{n} \right| \le \frac{2k}{n} \Longrightarrow \text{ independe de } x.$$

Proposição (Número de Rotação)

Sejam $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F um levantamento de f. Então o limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \rho(F)$ existe e depende apenas de F.

Prova.

$x \leq y < x + k \Longrightarrow F(x) \leq F(y) < F(x+k) = F(x) + k$

$$\left| \frac{F^n(x) - x}{n} - \frac{F^n(y) - y}{n} \right| \leq \frac{2k}{n} \Longrightarrow \text{ independe de } x.$$

Se existem $x \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{Z}$ com $F^q(x) = x + p$

Proposição (Número de Rotação)

Sejam $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F um levantamento de f. Então o limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)-x}{n} = \rho(F)$ existe e depende apenas de F.

Prova.

$x \leq y < x+k \Longrightarrow F(x) \leq F(y) < F(x+k) = F(x)+k$

$\left|\dfrac{F^n(x)-x}{n} - \dfrac{F^n(y)-y}{n}\right| \leq \dfrac{2k}{n} \Longrightarrow$ independe de x.

Se existem $x \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{Z}$ com $F^q(x) = x+p$

$$\frac{F^n(x)-x}{n} = \frac{F^r F^{jq}(x)-x}{n} = \frac{F^r(x+jp)-x}{n} =$$
$$= \frac{F^r(x)+jp-x}{jq+r} \longrightarrow \frac{p}{q}$$

Proposição (Número de Rotação)

Sejam $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F um levantamento de f. Então o limite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F^n(x)-x}{n} = \rho(F)$ existe e depende apenas de F.

Prova.

$x \leq y < x+k \Longrightarrow F(x) \leq F(y) < F(x+k) = F(x)+k$

$\left|\dfrac{F^n(x)-x}{n} - \dfrac{F^n(y)-y}{n}\right| \leq \dfrac{2k}{n} \Longrightarrow$ independe de x.

Se existem $x \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{Z}$ com $F^q(x) = x+p$

$$\frac{F^n(x)-x}{n} = \frac{F^r F^{jq}(x)-x}{n} = \frac{F^r(x+jp)-x}{n} =$$

$$= \frac{F^r(x)+jp-x}{jq+r} \longrightarrow \frac{p}{q}$$

NÚMERO DE ROTAÇÃO

Se $F^q(x) \neq x + p$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$
$\forall\, n$ escolha $p_n \in \mathbb{N}$ com $p_n - 1 < F^n(x) - x < p_n$, $\forall\, x$.

NÚMERO DE ROTAÇÃO

Se $F^q(x) \neq x + p$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$
$\forall\, n$ escolha $p_n \in \mathbb{N}$ com $p_n - 1 < F^n(x) - x < p_n,\ \forall\, x$.

$$m(p_n - 1) < F^{mn}(x) - x = \sum_{j=0}^{m-1} \Big(F^n F^{jn}(x) - F^{jn}(x) \Big) < m p_n$$

NÚMERO DE ROTAÇÃO

Se $F^q(x) \neq x + p$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$
$\forall\, n$ escolha $p_n \in \mathbb{N}$ com $p_n - 1 < F^n(x) - x < p_n, \ \forall\, x$.

$$m(p_n - 1) < F^{mn}(x) - x = \sum_{j=0}^{m-1} \Big(F^n F^{jn}(x) - F^{jn}(x) \Big) < mp_n$$

$$\boxed{\frac{p_n - 1}{n} < \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} < \frac{p_n}{n}} \text{ e } \boxed{\frac{p_m - 1}{m} < \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} < \frac{p_m}{m}}$$

NÚMERO DE ROTAÇÃO

Se $F^q(x) \neq x + p$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$
$\forall\ n$ escolha $p_n \in \mathbb{N}$ com $p_n - 1 < F^n(x) - x < p_n$, $\forall\ x$.

$$m(p_n - 1) < F^{mn}(x) - x = \sum_{j=0}^{m-1} \Big(F^n F^{jn}(x) - F^{jn}(x) \Big) < mp_n$$

$$\boxed{\frac{p_n - 1}{n} < \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} < \frac{p_n}{n}} \text{ e } \boxed{\frac{p_m - 1}{m} < \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} < \frac{p_m}{m}}$$

$$\left| \frac{p_m}{m} - \frac{p_n}{n} \right| = \left| \frac{p_m}{m} - \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} + \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} - \frac{p_n}{n} \right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

NÚMERO DE ROTAÇÃO

Se $F^q(x) \neq x + p$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$
$\forall\, n$ escolha $p_n \in \mathbb{N}$ com $p_n - 1 < F^n(x) - x < p_n, \ \forall\, x.$

$$m(p_n - 1) < F^{mn}(x) - x = \sum_{j=0}^{m-1} \Big(F^n F^{jn}(x) - F^{jn}(x) \Big) < mp_n$$

$$\boxed{\frac{p_n - 1}{n} < \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} < \frac{p_n}{n}} \text{ e } \boxed{\frac{p_m - 1}{m} < \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} < \frac{p_m}{m}}$$

$$\left| \frac{p_m}{m} - \frac{p_n}{n} \right| = \left| \frac{p_m}{m} - \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} + \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} - \frac{p_n}{n} \right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

$\frac{p_n}{n}$ é Cauchy e $\boxed{\frac{p_n}{n} - \frac{1}{n} < \frac{F^n(x) - x}{n} < \frac{p_n}{n}}$

$\square$

NÚMERO DE ROTAÇÃO

1. Sejam $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F_1, F_2, levantamentos de f. Então $\rho(F_1) = \rho(F_2) + k$, onde $F_1 = F_2 + k$

NÚMERO DE ROTAÇÃO

1. Sejam $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F_1, F_2, levantamentos de f. Então $\rho(F_1) = \rho(F_2) + k$, onde $F_1 = F_2 + k$
2. $\rho(F^j) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^{nj}(x) - x}{n} = j \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^{nj}(x) - x}{nj} = j\,\rho(F)$

NÚMERO DE ROTAÇÃO

1. Sejam $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $F_1, F_2,$ levantamentos de f. Então $\rho(F_1) = \rho(F_2) + k$, onde $F_1 = F_2 + k$
2. $\rho(F^j) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^{nj}(x) - x}{n} = j \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^{nj}(x) - x}{nj} = j\,\rho(F)$
3. Existe $x \in [0,1]$ tal que $F^q(x) = x + p \Longrightarrow \rho(F) = p/q$

NÚMERO DE ROTAÇÃO

1. Sejam $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $F_1, F_2,$ levantamentos de f.
   Então $\rho(F_1) = \rho(F_2) + k$, onde $F_1 = F_2 + k$
2. $\rho(F^j) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{F^{nj}(x) - x}{n} = j \lim_{n\to\infty} \dfrac{F^{nj}(x) - x}{nj} = j\,\rho(F)$
3. Existe $x \in [0,1]$ tal que $F^q(x) = x + p \Longrightarrow \rho(F) = p/q$
4. Se $\rho(F) = p/q$ e $x \in \mathbb{R}$ é periódico, então $F^q(x) = x + p$
   Em particular, todo ponto periódico tem período q.

NÚMERO DE ROTAÇÃO

1. Sejam $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F_1, F_2, levantamentos de f. Então $\rho(F_1) = \rho(F_2) + k$, onde $F_1 = F_2 + k$
2. $\rho(F^j) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{F^{nj}(x) - x}{n} = j \lim_{n\to\infty} \dfrac{F^{nj}(x) - x}{nj} = j\,\rho(F)$
3. Existe $x \in [0,1]$ tal que $F^q(x) = x + p \Longrightarrow \rho(F) = p/q$
4. Se $\rho(F) = p/q$ e $x \in \mathbb{R}$ é periódico, então $F^q(x) = x + p$
   Em particular, todo ponto periódico tem período q.
5. O *número de rotação* de f: $\boxed{\rho(f) = \Pi(\rho(F))}$

NÚMERO DE ROTAÇÃO

1. Sejam $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F_1, F_2, levantamentos de f. Então $\rho(F_1) = \rho(F_2) + k$, onde $F_1 = F_2 + k$
2. $\rho(F^j) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^{nj}(x) - x}{n} = j \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^{nj}(x) - x}{nj} = j\,\rho(F)$
3. Existe $x \in [0,1]$ tal que $F^q(x) = x + p \Longrightarrow \rho(F) = p/q$
4. Se $\rho(F) = p/q$ e $x \in \mathbb{R}$ é periódico, então $F^q(x) = x + p$
   Em particular, todo ponto periódico tem período q.
5. O *número de rotação* de f: $\boxed{\rho(f) = \Pi(\rho(F))}$
6. $F(x) = x + \rho$ é um levantamento de R_ρ.

$$\frac{F^n(x) - x}{n} = \frac{x + n\rho - x}{n} = \rho \Longrightarrow \rho(\mathrm{R}_\rho) = \rho$$

Proposição (Número de Rotação)

Se $f \in \mathrm{Hom}^{+}(\mathbb{S}^1)$ e $\rho(f) = p/q \Rightarrow$ existe levantamento F de f tal que $F^q(x) = x + p$, algum $x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \Pi(x)$ é q - periódico.

PROPOSIÇÃO (NÚMERO DE ROTAÇÃO)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho(f) = p/q \Rightarrow$ existe levantamento F de f tal que $F^q(x) = x + p$, algum $x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \Pi(x)$ é q - periódico.

Prova. F_1 e F_2 levantamentos de $f \implies F_2 = F_1 + \ell$
$\implies F_2^q = F_1^q + \ell q$.

Proposição (Número de Rotação)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho(f) = p/q \Rightarrow$ existe levantamento F de f tal que $F^q(x) = x + p$, algum $x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \Pi(x)$ é q - periódico.

Prova. F_1 e F_2 levantamentos de $f \implies F_2 = F_1 + \ell$
$\implies F_2^q = F_1^q + \ell q$.

Se $\rho(f) = p/q$, escolha F tal que $p \leq F^q(0) < q + p$.

Proposição (Número de Rotação)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho(f) = p/q \Rightarrow$ existe levantamento F de f tal que $F^q(x) = x + p$, algum $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Pi(x)$ é q - periódico.

Prova. F_1 e F_2 levantamentos de $f \implies F_2 = F_1 + \ell$ $\implies F_2^q = F_1^q + \ell q$.

Se $\rho(f) = p/q$, escolha F tal que $p \leq F^q(0) < q + p$.

AF. Existe $x \in [0, 1]$ tal que $F^q(x) - x \in \mathbb{Z}$

Proposição (Número de Rotação)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho(f) = p/q \Rightarrow$ existe levantamento F de f tal que $F^q(x) = x + p$, algum $x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \Pi(x)$ é q - periódico.

Prova. F_1 e F_2 levantamentos de $f \implies F_2 = F_1 + \ell$
$\implies F_2^q = F_1^q + \ell q$.

Se $\rho(f) = p/q$, escolha F tal que $p \leq F^q(0) < q + p$.

AF. Existe $x \in [0, 1]$ tal que $F^q(x) - x \in \mathbb{Z}$

Senão $\boxed{p < F^q(x) - x < q + p}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição (Número de Rotação)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho(f) = p/q \Rightarrow$ existe levantamento F de f tal que $F^q(x) = x + p$, algum $x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \Pi(x)$ é q - periódico.

Prova. F_1 e F_2 levantamentos de $f \implies F_2 = F_1 + \ell$
$\implies F_2^q = F_1^q + \ell q$.

Se $\rho(f) = p/q$, escolha F tal que $p \leq F^q(0) < q + p$.

AF. Existe $x \in [0, 1]$ tal que $F^q(x) - x \in \mathbb{Z}$

Senão $\boxed{p < F^q(x) - x < q + p}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\exists\, \delta > 0$ tal que $\boxed{p + \delta < F^q(x) - x < q + p - \delta}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Proposição (Número de Rotação)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho(f) = p/q \Rightarrow$ existe levantamento F de f tal que $F^q(x) = x + p$, algum $x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \Pi(x)$ é q - periódico.

Prova. F_1 e F_2 levantamentos de $f \implies F_2 = F_1 + \ell$
$\implies F_2^q = F_1^q + \ell q$.

Se $\rho(f) = p/q$, escolha F tal que $p \leq F^q(0) < q + p$.

AF. Existe $x \in [0, 1]$ tal que $F^q(x) - x \in \mathbb{Z}$

Senão $\boxed{p < F^q(x) - x < q + p}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\exists\, \delta > 0$ tal que $\boxed{p + \delta < F^q(x) - x < q + p - \delta}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{p}{q} + \frac{\delta}{q} = \frac{j(p+\delta)}{jq} < \frac{F^{jq}(x) - x}{jq} < \frac{j(q+p-\delta)}{jq} = \frac{p}{q} + 1 - \frac{\delta}{q}.$$

Então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $F^q(x) = x + p$. $\square$

Proposição (Invariante Topológico)

O número de rotação é invariante por conjugação.

PROPOSIÇÃO (INVARIANTE TOPOLÓGICO)

O número de rotação é invariante por conjugação.

Prova. Se F e H são levantamentos $f, g \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$, então $G = HFH^{-1}$ é levantamento de $g = h\,f\,h^{-1}$

Proposição (Invariante Topológico)

O número de rotação é invariante por conjugação.

Prova. Se F e H são levantamentos $f,\, g \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$, então $G = HFH^{-1}$ é levantamento de $g = h\,f\,h^{-1}$

$$\frac{G^n(x)-x}{n} = \frac{(HFH^{-1})^n(x)-x}{n} = \frac{HF^nH^{-1}(x)-x}{n} =$$

$$\frac{HF^nH^{-1}(x)-F^nH^{-1}(x)}{n} + \frac{F^nH^{-1}(x)-H^{-1}(x)}{n} + \frac{H^{-1}(x)-x}{n}$$

$\square$

Proposição (Invariante Topológico)

O número de rotação é invariante por conjugação.

Prova. Se F e H são levantamentos $f, g \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$, então $G = HFH^{-1}$ é levantamento de $g = h\,f\,h^{-1}$

$$\frac{G^n(x) - x}{n} = \frac{(HFH^{-1})^n(x) - x}{n} = \frac{HF^nH^{-1}(x) - x}{n} =$$

$$\frac{HF^nH^{-1}(x) - F^nH^{-1}(x)}{n} + \frac{F^nH^{-1}(x) - H^{-1}(x)}{n} + \frac{H^{-1}(x) - x}{n}$$

$\square$

Proposição

O número de rotação depende continuamente de $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ na topologia C^0.

Proposição (Ordem no Círculo)

Seja $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com número de rotação $\rho = p/q$. Se $x \in \mathbb{S}^1$ é q-período, então $\{x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)\}$ e $\{0, p/q, \dots, (q-1)p/q\}$ possuem a mesma ordem em $\mathbb{S}^1$.

Proposição (Ordem no Círculo)

Seja $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com número de rotação $\rho = p/q$. Se $x \in \mathbb{S}^1$ é q-período, então $\{x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)\}$ e $\{0, p/q, \dots, (q-1)p/q\}$ possuem a mesma ordem em $\mathbb{S}^1$.

Prova. Se x é q-periódico e $f^i(x)$ é o primeiro em $\mathrm{orb}_f^+(x)$ tal que $x < f^i(x) \Longrightarrow x < f^i(x) < f^{2i}(x) < \dots < f^{(q-1)i}(x)$.

Proposição (Ordem no Círculo)

Seja $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com número de rotação $\rho = p/q$. Se $x \in \mathbb{S}^1$ é q-período, então $\{x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\}$ e $\{0, p/q, \ldots, (q-1)p/q\}$ possuem a mesma ordem em $\mathbb{S}^1$.

Prova. Se x é q-periódico e $f^i(x)$ é o primeiro em $\mathrm{orb}_f^+(x)$ tal que $x < f^i(x) \Longrightarrow x < f^i(x) < f^{2i}(x) < \ldots < f^{(q-1)i}(x)$.

q intervalos em $\mathbb{S}^1$ e f^i aplica cada um no vizinho.

Proposição (Ordem no Círculo)

Seja $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com número de rotação $\rho = p/q$. Se $x \in \mathbb{S}^1$ é q-período, então $\{x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\}$ e $\{0, p/q, \ldots, (q-1)p/q\}$ possuem a mesma ordem em $\mathbb{S}^1$.

Prova. Se x é q-periódico e $f^i(x)$ é o primeiro em $\mathrm{orb}_f^+(x)$ tal que $x < f^i(x) \Longrightarrow x < f^i(x) < f^{2i}(x) < \ldots < f^{(q-1)i}(x)$.

q intervalos em $\mathbb{S}^1$ e f^i aplica cada um no vizinho.

Levantamento $\tilde{F}$ de f^i tal que $\tilde{F}^q(x) = x + 1$

PROPOSIÇÃO (ORDEM NO CÍRCULO)

Seja $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com número de rotação $\rho = p/q$. Se $x \in \mathbb{S}^1$ é q-período, então $\{x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\}$ e $\{0, p/q, \ldots, (q-1)p/q\}$ possuem a mesma ordem em $\mathbb{S}^1$.

Prova. Se x é q-periódico e $f^i(x)$ é o primeiro em $\mathrm{orb}_f^+(x)$ tal que $x < f^i(x) \Longrightarrow x < f^i(x) < f^{2i}(x) < \ldots < f^{(q-1)i}(x)$.

q intervalos em $\mathbb{S}^1$ e f^i aplica cada um no vizinho.

Levantamento $\tilde{F}$ de f^i tal que $\tilde{F}^q(x) = x + 1$

Levantamento F de f tal que $F^q(x) = x + p$

Proposição (Ordem no Círculo)

Seja $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com número de rotação $\rho = p/q$. Se $x \in \mathbb{S}^1$ é q-período, então $\{x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\}$ e $\{0, p/q, \ldots, (q-1)p/q\}$ possuem a mesma ordem em $\mathbb{S}^1$.

Prova. Se x é q-periódico e $f^i(x)$ é o primeiro em $\mathrm{orb}_f^+(x)$ tal que $x < f^i(x) \Longrightarrow x < f^i(x) < f^{2i}(x) < \ldots < f^{(q-1)i}(x)$.

q intervalos em $\mathbb{S}^1$ e f^i aplica cada um no vizinho.

Levantamento $\tilde{F}$ de f^i tal que $\tilde{F}^q(x) = x + 1$

Levantamento F de f tal que $F^q(x) = x + p$

Então F^i é levantamento de f^i e $F^i = \tilde{F} + k$

Proposição (Ordem no Círculo)

Seja $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com número de rotação $\rho = p/q$. Se $x \in \mathbb{S}^1$ é q-período, então $\{x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\}$ e $\{0, p/q, \ldots, (q-1)p/q\}$ possuem a mesma ordem em $\mathbb{S}^1$.

Prova. Se x é q-periódico e $f^i(x)$ é o primeiro em $\mathrm{orb}_f^+(x)$ tal que $x < f^i(x) \Longrightarrow x < f^i(x) < f^{2i}(x) < \ldots < f^{(q-1)i}(x)$.

q intervalos em $\mathbb{S}^1$ e f^i aplica cada um no vizinho.

Levantamento $\tilde{F}$ de f^i tal que $\tilde{F}^q(x) = x + 1$

Levantamento F de f tal que $F^q(x) = x + p$

Então F^i é levantamento de f^i e $F^i = \tilde{F} + k$

$x + ip = F^{q\,i}(x) = (\tilde{F} + k)^q(x) = \tilde{F}^q(x) + qk = x + 1 + qk$

Proposição (Ordem no Círculo)

Seja $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com número de rotação $\rho = p/q$. Se $x \in \mathbb{S}^1$ é q-período, então $\{x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\}$ e $\{0, p/q, \ldots, (q-1)p/q\}$ possuem a mesma ordem em $\mathbb{S}^1$.

Prova. Se x é q-periódico e $f^i(x)$ é o primeiro em $\mathrm{orb}_f^+(x)$ tal que $x < f^i(x) \Longrightarrow x < f^i(x) < f^{2i}(x) < \ldots < f^{(q-1)i}(x)$.

q intervalos em $\mathbb{S}^1$ e f^i aplica cada um no vizinho.

Levantamento $\tilde{F}$ de f^i tal que $\tilde{F}^q(x) = x + 1$

Levantamento F de f tal que $F^q(x) = x + p$

Então F^i é levantamento de f^i e $F^i = \tilde{F} + k$

$x + ip = F^{q\,i}(x) = (\tilde{F} + k)^q(x) = \tilde{F}^q(x) + qk = x + 1 + qk$

$0 < i < q$ é o único tal que $i\,p = 1 \bmod q$

Proposição (Ordem no Círculo)

Seja $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com número de rotação $\rho = p/q$. Se $x \in \mathbb{S}^1$ é q-período, então $\{x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\}$ e $\{0, p/q, \ldots, (q-1)p/q\}$ possuem a mesma ordem em $\mathbb{S}^1$.

Prova. Se x é q-periódico e $f^i(x)$ é o primeiro em $\mathrm{orb}_f^+(x)$ tal que $x < f^i(x) \Longrightarrow x < f^i(x) < f^{2i}(x) < \ldots < f^{(q-1)i}(x)$.

q intervalos em $\mathbb{S}^1$ e f^i aplica cada um no vizinho.

Levantamento $\tilde{F}$ de f^i tal que $\tilde{F}^q(x) = x + 1$

Levantamento F de f tal que $F^q(x) = x + p$

Então F^i é levantamento de f^i e $F^i = \tilde{F} + k$

$x + ip = F^{q\,i}(x) = (\tilde{F} + k)^q(x) = \tilde{F}^q(x) + qk = x + 1 + qk$

$0 < i < q$ é o único tal que $i\,p = 1 \bmod q$

$\{0, p/q, \ldots, (q-1)p/q\}$ é ordenado como

$$\boxed{\{0, i\,p/q, , \ldots, (q-1)\,i\,p/q\} \Rightarrow \{0, 1/q, , \ldots, (q-1)/q\}}$$ □

Lema (Conjunto Minimal)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, existe compacto $\Lambda \subseteq \mathbb{S}^1$ tal que $\alpha(x) = \omega(x) = \Lambda$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$. $\mathrm{Int}(\Lambda) \neq \emptyset \implies \Lambda = \mathbb{S}^1$ e $\mathrm{Int}(\Lambda) = \emptyset \implies \Lambda$ é um conjunto de Cantor.

Lema (Conjunto Minimal)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, existe compacto $\Lambda \subseteq \mathbb{S}^1$ tal que $\alpha(x) = \omega(x) = \Lambda$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$. $\mathrm{Int}(\Lambda) \neq \emptyset \implies \Lambda = \mathbb{S}^1$ e $\mathrm{Int}(\Lambda) = \emptyset \implies \Lambda$ é um conjunto de Cantor.

Prova. $y \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \Lambda = \omega(y)$ é compacto e $f(\Lambda) = \Lambda$.

LEMA (CONJUNTO MINIMAL)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, existe compacto $\Lambda \subseteq \mathbb{S}^1$ tal que $\alpha(x) = \omega(x) = \Lambda$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$. $\mathrm{Int}(\Lambda) \neq \emptyset \implies \Lambda = \mathbb{S}^1$ e $\mathrm{Int}(\Lambda) = \emptyset \implies \Lambda$ é um conjunto de Cantor.

Prova. $y \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \Lambda = \omega(y)$ é compacto e $f(\Lambda) = \Lambda$.

A órbita de $x \in \mathbb{S}^1 \setminus \Lambda$ tem no máximo um ponto em cada componente de $\mathbb{S}^1 \setminus \Lambda$.

Lema (Conjunto Minimal)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, existe compacto $\Lambda \subseteq \mathbb{S}^1$ tal que $\alpha(x) = \omega(x) = \Lambda$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$. $\mathrm{Int}(\Lambda) \neq \emptyset \implies \Lambda = \mathbb{S}^1$ e $\mathrm{Int}(\Lambda) = \emptyset \implies \Lambda$ é um conjunto de Cantor.

Prova. $y \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \Lambda = \omega(y)$ é compacto e $f(\Lambda) = \Lambda$.

A órbita de $x \in \mathbb{S}^1 \setminus \Lambda$ tem no máximo um ponto em cada componente de $\mathbb{S}^1 \setminus \Lambda$.

Portanto, $x \in \mathbb{S}^1 \implies \alpha(x), \omega(x) \subseteq \omega(y) = \Lambda \implies$

Lema (Conjunto Minimal)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, existe compacto $\Lambda \subseteq \mathbb{S}^1$ tal que $\alpha(x) = \omega(x) = \Lambda$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$. $\mathrm{Int}(\Lambda) \neq \emptyset \implies \Lambda = \mathbb{S}^1$ e $\mathrm{Int}(\Lambda) = \emptyset \implies \Lambda$ é um conjunto de Cantor.

Prova. $y \in \mathbb{S}^1 \;\Rightarrow\; \Lambda = \omega(y)$ é compacto e $f(\Lambda) = \Lambda$.

A órbita de $x \in \mathbb{S}^1 \setminus \Lambda$ tem no máximo um ponto em cada componente de $\mathbb{S}^1 \setminus \Lambda$.

Portanto, $x \in \mathbb{S}^1 \implies \alpha(x), \omega(x) \subseteq \omega(y) = \Lambda \implies$

$\implies \alpha(x) = \omega(x) = \Lambda$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$

LEMA (CONJUNTO MINIMAL)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, existe compacto $\Lambda \subseteq \mathbb{S}^1$ tal que $\alpha(x) = \omega(x) = \Lambda$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$. $\mathrm{Int}(\Lambda) \neq \emptyset \implies \Lambda = \mathbb{S}^1$ e $\mathrm{Int}(\Lambda) = \emptyset \implies \Lambda$ é um conjunto de Cantor.

Prova. $y \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \Lambda = \omega(y)$ é compacto e $f(\Lambda) = \Lambda$.

A órbita de $x \in \mathbb{S}^1 \setminus \Lambda$ tem no máximo um ponto em cada componente de $\mathbb{S}^1 \setminus \Lambda$.

Portanto, $x \in \mathbb{S}^1 \implies \alpha(x), \omega(x) \subseteq \omega(y) = \Lambda \implies$

$\implies \alpha(x) = \omega(x) = \Lambda$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$

Λ não possui pontos isolados, Λ é perfeito.

LEMA (CONJUNTO MINIMAL)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, existe compacto $\Lambda \subseteq \mathbb{S}^1$ tal que $\alpha(x) = \omega(x) = \Lambda$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$. $\mathrm{Int}(\Lambda) \neq \emptyset \implies \Lambda = \mathbb{S}^1$ e $\mathrm{Int}(\Lambda) = \emptyset \implies \Lambda$ é um conjunto de Cantor.

Prova. $y \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \Lambda = \omega(y)$ é compacto e $f(\Lambda) = \Lambda$.

A órbita de $x \in \mathbb{S}^1 \setminus \Lambda$ tem no máximo um ponto em cada componente de $\mathbb{S}^1 \setminus \Lambda$.

Portanto, $x \in \mathbb{S}^1 \implies \alpha(x), \omega(x) \subseteq \omega(y) = \Lambda \implies$

$\implies \alpha(x) = \omega(x) = \Lambda$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$

Λ não possui pontos isolados, Λ é perfeito.

Se $\mathrm{Int}(\Lambda) \neq \emptyset \implies$ todo ponto de Λ é ponto interior e $\Lambda = \mathbb{S}^1$

$\square$

LEMA

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{S}^1$ e inteiros $m > n$, então toda órbita positiva intersecta $I = [f^m(x), f^n(x)]$.

LEMA

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{S}^1$ e inteiros $m > n$, então toda órbita positiva intersecta $I = [f^m(x), f^n(x)]$.

Prova. Basta mostrar que $\mathbb{S}^1 \subset \cup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(I)$. Senão, a união

$$\cup_{k=0}^{\infty} f^{-k(m-n)}(I) = \cup_{k=0}^{\infty}[f^{-(k-1)m+kn}(x), f^{-km+(k+1)n}(x)]$$

não cobre $\mathbb{S}^1$. Como $f^{-k(m-n)}(I)$ são adjacentes, $f^{-k(m-n)}(f^n(x))$ converge para um ponto z que é fixo para f^{m-n}, contradição.

$\leftrightsquigarrow$

$\square$

LEMA

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ e $x, y \in \mathbb{S}^1$, então $\omega(x) = \omega(y)$ e $\omega(x) = \mathbb{S}^1$ ou $\omega(x)$ é um conjunto de Cantor.

LEMA

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ e $x, y \in \mathbb{S}^1$, então $\omega(x) = \omega(y)$ e $\omega(x) = \mathbb{S}^1$ ou $\omega(x)$ é um conjunto de Cantor.

Prova. Suponha que $f^{j_n}(x) \to x_0 \in \omega(x)$, para $j_n \to \infty$. Existe i_n tal que $f^{i_n}(y) \in [f^{j_{n-1}}(x), f^{j_n}(x)]$. Então $f^{i_n}(y) \to x_0$ e $\omega(y) \subset \omega(x)$. Por simetria $\omega(x) = \omega(y)$.

Lema

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ com $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ e $x, y \in \mathbb{S}^1$, então $\omega(x) = \omega(y)$ e $\omega(x) = \mathbb{S}^1$ ou $\omega(x)$ é um conjunto de Cantor.

Prova. Suponha que $f^{j_n}(x) \to x_0 \in \omega(x)$, para $j_n \to \infty$. Existe i_n tal que $f^{i_n}(y) \in [f^{j_{n-1}}(x), f^{j_n}(x)]$. Então $f^{i_n}(y) \to x_0$ e $\omega(y) \subset \omega(x)$. Por simetria $\omega(x) = \omega(y)$.

Se $\omega(x) \neq \mathbb{S}^1$, então $\partial\omega(x)$ é não-vazio, fechado e invariante. Se $z \in \partial\omega(x)$, então $\omega(x) = \omega(z) \subseteq \partial\omega(x)$ e $\omega(x)$ tem interior vazio.

$\square$

LEMA

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F um levantamento de f tal que $\rho(F) = \rho(f) = \rho \notin \mathbb{Q}$. Então, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2 \iff F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$$

LEMA

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F um levantamento de f tal que $\rho(F) = \rho(f) = \rho \notin \mathbb{Q}$. Então, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,
$n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2 \iff F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$

Prova. $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$
(ou $F^{n_1 - n_2}(x) < x + m_2 - m_1$)
ocorre para algum x, ocorre $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F^{n_1 - n_2}(0) < m_2 - m_1$

LEMA

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F um levantamento de f tal que $\rho(F) = \rho(f) = \rho \notin \mathbb{Q}$. Então, $\forall\ x \in \mathbb{R}$,
$n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2 \iff F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$

Prova. $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$

(ou $F^{n_1-n_2}(x) < x + m_2 - m_1$)

ocorre para algum x, ocorre $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1$

Indutivamente, $F^{j(n_1-n_2)}(0) < j(m_2 - m_1)$

Lema

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F um levantamento de f tal que $\rho(F) = \rho(f) = \rho \notin \mathbb{Q}$. Então, $\forall\ x \in \mathbb{R}$,
$n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2 \iff F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$

Prova. $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$

(ou $F^{n_1-n_2}(x) < x + m_2 - m_1$)

ocorre para algum x, ocorre $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1$

Indutivamente, $F^{j(n_1-n_2)}(0) < j(m_2 - m_1)$

$$n_1 - n_2 > 0 \Rightarrow \frac{F^{j(n_1-n_2)}(0) - 0}{j(n_1 - n_2)} < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2} \implies$$

$$\implies \rho < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

LEMA

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e F um levantamento de f tal que $\rho(F) = \rho(f) = \rho \notin \mathbb{Q}$. Então, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,
$n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2 \iff F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$

Prova. $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$
(ou $F^{n_1 - n_2}(x) < x + m_2 - m_1$)
ocorre para algum x, ocorre $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F^{n_1 - n_2}(0) < m_2 - m_1$
Indutivamente, $F^{j(n_1 - n_2)}(0) < j(m_2 - m_1)$

$$n_1 - n_2 > 0 \Rightarrow \frac{F^{j(n_1 - n_2)}(0) - 0}{j(n_1 - n_2)} < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2} \implies$$

$$\implies \rho < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

Análogo para $n_1 - n_2 < 0$
A recíproca segue trocando a desigualdade. $\square$

Teorema (Poincaré)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho = \rho(f) \notin \mathbb{Q}$, então f é semi-conjugado a R_ρ, isto é: existe $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ contínua, crescente e sobrejetiva tal que $hf = \mathrm{R}_\rho h$. Se f é transitivo, então f é conjugado a R_ρ, isto é: h é um homeomorfismo.

Teorema (Poincaré)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho = \rho(f) \notin \mathbb{Q}$, então f é semi-conjugado a R_ρ, isto é: existe $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ contínua, crescente e sobrejetiva tal que $hf = \mathrm{R}_\rho h$. Se f é transitivo, então f é conjugado a R_ρ, isto é: h é um homeomorfismo.

Prova. Sejam F um levantamento de f e $x \in \mathbb{R}$. Sejam $A = \{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{n\rho + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$

Teorema (Poincaré)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho = \rho(f) \notin \mathbb{Q}$, então f é semi-conjugado a R_ρ, isto é: existe $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ contínua, crescente e sobrejetiva tal que $hf = \mathrm{R}_\rho h$. Se f é transitivo, então f é conjugado a R_ρ, isto é: h é um homeomorfismo.

Prova. Sejam F um levantamento de f e $x \in \mathbb{R}$. Sejam $A = \{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{n\rho + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$

Defina $H : A \to B$ por $H(F^n(x) + m) = n\rho + m$.

Teorema (Poincaré)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho = \rho(f) \notin \mathbb{Q}$, então f é semi-conjugado a R_ρ, isto é: existe $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ contínua, crescente e sobrejetiva tal que $hf = \mathrm{R}_\rho h$. Se f é transitivo, então f é conjugado a R_ρ, isto é: h é um homeomorfismo.

Prova. Sejam F um levantamento de f e $x \in \mathbb{R}$. Sejam $A = \{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{n\rho + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$

Defina $H : A \to B$ por $H(F^n(x) + m) = n\rho + m$.

H preserva ordem e é bijetiva (estritamente crescente).

Teorema (Poincaré)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho = \rho(f) \notin \mathbb{Q}$, então f é semi-conjugado a R_ρ, isto é: existe $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ contínua, crescente e sobrejetiva tal que $hf = \mathrm{R}_\rho h$. Se f é transitivo, então f é conjugado a R_ρ, isto é: h é um homeomorfismo.

Prova. Sejam F um levantamento de f e $x \in \mathbb{R}$. Sejam $A = \{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{n\rho + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$

Defina $H : A \to B$ por $H(F^n(x) + m) = n\rho + m$.

H preserva ordem e é bijetiva (estritamente crescente).

Então H possui extensão contínua e crescente $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Teorema (Poincaré)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho = \rho(f) \notin \mathbb{Q}$, então f é semi-conjugado a R_ρ, isto é: existe $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ contínua, crescente e sobrejetiva tal que $hf = \mathrm{R}_\rho h$. Se f é transitivo, então f é conjugado a R_ρ, isto é: h é um homeomorfismo.

Prova. Sejam F um levantamento de f e $x \in \mathbb{R}$. Sejam $A = \{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{n\rho + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$

Defina $H : A \to B$ por $H(F^n(x) + m) = n\rho + m$.

H preserva ordem e é bijetiva (estritamente crescente).

Então H possui extensão contínua e crescente $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$H(y) = \sup\{n\rho + m : F^n(x) + m < y\}$
$H(y) = \inf\{n\rho + m : F^n(x) + m > y\}$.

TEOREMA (POINCARÉ)

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho = \rho(f) \notin \mathbb{Q}$, então f é semi-conjugado a R_ρ, isto é: existe $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ contínua, crescente e sobrejetiva tal que $hf = \mathrm{R}_\rho h$. Se f é transitivo, então f é conjugado a R_ρ, isto é: h é um homeomorfismo.

Prova. Sejam F um levantamento de f e $x \in \mathbb{R}$. Sejam $A = \{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{n\rho + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$

Defina $H : A \to B$ por $H(F^n(x) + m) = n\rho + m$.

H preserva ordem e é bijetiva (estritamente crescente).

Então H possui extensão contínua e crescente $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$H(y) = \sup\{n\rho + m : F^n(x) + m < y\}$
$H(y) = \inf\{n\rho + m : F^n(x) + m > y\}$.

Como B é denso em $\mathbb{R}$, H é sobrejetiva.

Se $\overline{A} = \mathbb{R} \Rightarrow H$ é um homeomorfismo.

Se $\overline{A} = \mathbb{R} \;\Rightarrow\; H$ é um homeomorfismo.

Se existe $I = c.c.(\mathbb{R} \setminus \overline{A}) \;\Rightarrow\; H$ é constante em I.

Se $\overline{A} = \mathbb{R} \ \Rightarrow \ H$ é um homeomorfismo.

Se existe $I = c.c.(\mathbb{R} \setminus \overline{A}) \ \Rightarrow \ H$ é constante em I.

$$H(F^n(x) + m + 1) = n\rho + m + 1 = H(F^n(x) + m) + 1$$

Se $\overline{A} = \mathbb{R} \;\Rightarrow\; H$ é um homeomorfismo.

Se existe $I = c.c.(\mathbb{R} \setminus \overline{A}) \;\Rightarrow\; H$ é constante em I.

$$H(F^n(x) + m + 1) = n\rho + m + 1 = H(F^n(x) + m) + 1$$

$H(y+1) = H(y) + 1$, para todo $y \in \mathbb{R}$

Se $\overline{A} = \mathbb{R} \Rightarrow H$ é um homeomorfismo.

Se existe $I = c.c.(\mathbb{R} \setminus \overline{A}) \Rightarrow H$ é constante em I.

$$H(F^n(x) + m + 1) = n\rho + m + 1 = H(F^n(x) + m) + 1$$

$H(y + 1) = H(y) + 1$, para todo $y \in \mathbb{R}$

$$H(F(F^n(x) + m)) = H(F^{n+1}(x) + m)) = (n + 1)\rho + m = H(F^n(x) + m) + \rho$$

Se $\overline{A} = \mathbb{R} \;\Rightarrow\; H$ é um homeomorfismo.

Se existe $I = c.c.(\mathbb{R} \setminus \overline{A}) \;\Rightarrow\; H$ é constante em I.

$H(F^n(x) + m + 1) = n\rho + m + 1 = H(F^n(x) + m) + 1$

$H(y + 1) = H(y) + 1$, para todo $y \in \mathbb{R}$

$H(F(F^n(x) + m)) = H(F^{n+1}(x) + m)) = (n+1)\rho + m =$
$H(F^n(x) + m) + \rho$

$H(F(y)) = H(y) + \rho$, para todo $y \in \mathbb{R}$

Se $\overline{A} = \mathbb{R} \Rightarrow H$ é um homeomorfismo.

Se existe $I = c.c.(\mathbb{R} \setminus \overline{A}) \Rightarrow H$ é constante em I.

$$H(F^n(x) + m + 1) = n\rho + m + 1 = H(F^n(x) + m) + 1$$

$H(y + 1) = H(y) + 1$, para todo $y \in \mathbb{R}$

$H(F(F^n(x) + m)) = H(F^{n+1}(x) + m)) = (n+1)\rho + m = H(F^n(x) + m) + \rho$

$H(F(y)) = H(y) + \rho$, para todo $y \in \mathbb{R}$

$\Pi HF(y) = h\Pi F(y) = hf\Pi(y) = \Pi(H(y) + \rho) = \mathrm{R}_\rho \Pi(H(y)) = \mathrm{R}_\rho h\Pi(y)$

H se projeta em $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $hf = \mathrm{R}_\rho h$.

f é transitivo se, e somente se, A é denso em $\mathbb{R}$ e H é um homeomorfismo.

$\square$

TEOREMA

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho = \rho(f) \notin \mathbb{Q}$, então f é unicamente ergódico e é metricamente isomorfo à rotação R_ρ.

TEOREMA

Se $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ e $\rho = \rho(f) \notin \mathbb{Q}$, então f é unicamente ergódico e é metricamente isomorfo à rotação R_ρ.

COROLÁRIO

Todo homeomorfismo $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ possui entropia topológica nula.

TEOREMA

Se $\rho \notin \mathbb{Q}$, então a rotação R_ρ é unicamente ergódica.

TEOREMA

Se $\rho \notin \mathbb{Q}$, então a rotação R_ρ é unicamente ergódica.

Prova. $\chi_m(x) = e^{2\pi i m x}, \quad m \in \mathbb{N}$ é denso no conjunto das funções contínuas com a topologia uniforme.
Se $m \neq 0$, $\chi_m(\mathrm{R}_\rho(x)) = e^{2\pi i m (x+\rho)} = e^{2\pi i m \rho} \chi_m(x)$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_m(\mathrm{R}_\rho^j(x))\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i m j \rho}\right| = \frac{1}{n}\frac{|1-e^{2\pi i m n \rho}|}{|1-e^{2\pi i m \rho}|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\frac{2}{|1-e^{2\pi i m \rho}|} \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

$\square$