LEI FORTE DOS GRANDES NÚMEROS

Vanderlei da Costa Bueno

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo, SP. Brasil

Setembro de 2020

Lei forte dos grandes números

Teorema 1
Lei Forte dos Grandes Números para variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com média finita e existência do quarto momento central.

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E[X_1] = \mu < \infty$ e $E[(X - \mu)^4] = \gamma < \infty$.Então

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{qc} \mu.$$

Lei forte dos grandes números

Prova

Observe que

$$E[(\overline{X_n}-\mu)^4]=E[\frac{1}{n^4}(\sum_{i=1}^{n}X_i-n.\mu)^4]=E[\frac{1}{n^4}(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^4)]=$$

$$\frac{1}{n^4}E\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^4+\sum_{i<j}(X_i-\mu)^3.(X_j-\mu)$$

$$+\sum_{i<j}(X_i-\mu)^2.(X_j-\mu)^2+\sum_{i<j<k}(X_i-\mu)^2.(X_j-\mu).(X_k-\mu)$$

$$+\sum_{i<j<k<l}(X_i-\mu).(X_j-\mu).(X_k-\mu).(X_l-\mu)\}=$$

Lei forte dos grandes números

$$\frac{1}{n^4}\{\sum_{i=1}^{n}\gamma+\sum_{i<j}0+\sum_{i<j}\sigma^2\sigma^2+\sum_{i<j<k}0+\sum_{i<j<k<l}0\}=$$

$$\frac{1}{n^4}\{n\gamma+n.(n-1)\sigma^4\}=\frac{\gamma}{n^3}+\frac{(n-1)\sigma^4}{n^3}\leq\frac{\gamma}{n^3}+\frac{\sigma^4}{n^2}.$$

Lei forte dos grandes números

Portanto, pela desigualdade de Markov temos

$$P(|\overline{X_n}-\mu| > \varepsilon) = P((\overline{X_n}-\mu)^4 > \varepsilon^4) \leq \frac{E[(X-\mu)^4]}{\varepsilon^4} \leq \frac{\gamma}{\varepsilon^4 n^3}+\frac{\sigma^4}{\varepsilon^4 n^2}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\overline{X_n}-\mu| > \varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{\varepsilon^4 n^3}+\frac{\sigma^4}{\varepsilon^4 n^2}\right) < \infty.$$

Pelo Lema de Borel Cantelli concluimos que

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \rightarrow^{qc} \mu.$$

Observação 1
Observe que

$$(X - \mu)^4 = X^4 - 4.X^3.\mu + 6.X^2.\mu^2 - 4.X.\mu^3 + \mu^4$$

e

$$E[(X - \mu)^4] = E[X^4] - 4.\mu.E[X^3] + 6.\mu^2.E[X^2] - 4.\mu^3.E[X] + \mu^4.$$

Lei forte dos grandes números

Exemplo 1 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X. Se X é uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro $p, 0 < p < 1$, então $E[X^k] = p, \forall k$ e

$$E[(X-\mu)^4] = p - 4p^2 + 6P^3 - 4P^4 + p^4 < \infty$$

$$\text{e } \overline{X_n} \xrightarrow{qc} p.$$

Lei forte dos grandes números

Exemplo 2 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X. Se X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$, então

$$E[X^k] = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

e

$$E[(X-0,5)^4] = E[X^4] - 4.0,5.E[X^3] + 6.0,25.E[X^2] -$$

$$4.0,125.E[X] + 0,0625 =$$

$$0,2 - 0,5 + 0,5 - 0,25 + 0,0625 = 0,0125 < \infty$$

e $\overline{X_n} \xrightarrow{qc} 0,5.$

Lei forte dos grandes números

Exemplo 3 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X. Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial e parâmetro λ então

$$E[X^k] = \int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{k!}{\lambda^k} \int_0^\infty \frac{x^k \lambda e^{-\lambda x}}{k!} dx = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

e

$$E[(X - \frac{1}{\lambda})^4] = \frac{4!}{\lambda^4} - 4.\frac{1'}{\lambda}\frac{3!}{\lambda^3} + 6.(\frac{1}{\lambda})^2\frac{2!}{\lambda^2} - 4.(\frac{1}{\lambda})^3.\frac{1}{\lambda} + (\frac{1}{\lambda})^4 = \frac{9}{\lambda^4} < \infty$$

$$\text{e } \bar{X}_n \xrightarrow{qc} \tfrac{1}{\lambda}$$

Lei forte dos grandes números

Exemplo 4 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X.
Se X é uma variável aleatória com distribuição normal de média μ e variância σ^2, então $E[(X-\mu)^{2n+1}] = 0$ e
$E[(X-\mu)^{2n}] = \sigma^{2n}.[(2n-1).(2n-3)....3.1]$.

Assim $E([(X-\mu)^4] = 3.\sigma^4$ e $\overline{X_n} \xrightarrow{qc} \mu$.

Lei forte dos grandes números

No que segue as Leis Fortes de Kolmogorov são enunciadas. O leitor encontrará as provas respectivas provas no livro *Probabilidade: um curso em nível intermediário; Barry, R. James.*

Teorema 2 Primeira Lei Forte de Kolmogorov.
Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e integráveis e suponha que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty.$$

Então

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \frac{E[X_1] + ... + E[X_n]}{n} \xrightarrow{qc} 0$$

Lei forte dos grandes números

Teorema 3 A Lei Forte de Kolmogorov.
Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuidas e integráveis com $E[X_n] = \mu$. Então

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{qc} \mu.$$

Exemplo 5 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. comm função densidade de probabilidade

$$f(x) = e^{-x+\theta} \quad se \quad x \geq \theta \quad e \quad 0 \quad c.c.$$

Prove que $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \xrightarrow{P} 1+\theta$.

Observe que

$$E[X] = \int_{\theta}^{\infty} xe^{-(x-\theta)}dx = \int_0 2^{\infty}(y+\theta)e^{-y}dy = 1+\theta.$$

Pela Lei Fraca dos Grandes números concluimos o exercício.

Lei forte dos grandes números

Exemplo 6 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Seja $Z_n = (\pi_{i=1}^{n} X_i)^{\frac{1}{n}}$, a média geométrica de $X_1, ..., X_n, 1 \leq n < \infty$. Mostre que $Z_n \to k$. Qual o valor de k?

Observe que $-\ln Z_n = -\ln[(\pi_{i=1}^{n} X_i)^{\frac{1}{n}}] = \frac{\sum_{i=1}^{n} -\ln X_i}{n}$ e que $-\ln X_i$ tem distribuição exponencial padrão. Portanto, pela Lei Fraca dos Grandes Números, $-\ln Z_n \xrightarrow{P} 1$.

Como a função exponencial, a inversa da função logaritmo neperiano, é contínua, concluimos que $Z_n \xrightarrow{P} e$.

Lei forte dos grandes números

Exemplo 7

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d., com $E[X_1] = Var(X_1) = 1$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n.\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \xrightarrow{qc} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Lei forte dos grandes números

Observe que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n.\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}{\sqrt{\frac{n.\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n^2}}}.$$

Pela Lei Forte dos Grandes Números temos $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{qc} 1$ e $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \xrightarrow{qc} 2$.

A convergência quase certa é fechada por quocientes (quando possível) e a raiz quadrada é função contínua.

Lei forte dos grandes números

Exemplo 8 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d., com distribuição normal com média μ e variância σ^2. Qual o limite quase certo de

$$\sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})^2}{(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2}}?$$