PME3100 Mecânica I

2 – Cinemática do ponto

2.1 – Trajetória, velocidade e aceleração

A posição de um ponto P, em relação a um referencial suposto fixo no espaço, descrita em termos de um sistema de coordenadas cartesiano (*O, x, y, z*) também fixo, fica univocamente determinada através de suas três coordenadas (*x, y, z*). Se sua posição varia com o tempo, então as equações:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

definem a trajetória do ponto e são chamadas de equações paramétricas, em *t*, dessa trajetória. Eventualmente, pode-se obter as equações dessa trajetória, simplesmente eliminando-se essa variável *t*.

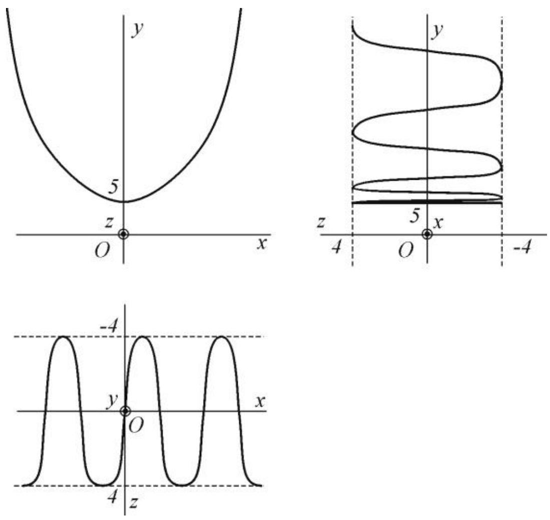
Exemplo 2.1:

$$x = 2t$$
$$y = 3t^2 + 5$$
$$z = 4\sin t$$

Tendo $t = x/2$ da primeira expressão e substituindo nas outras duas, obtemos a curva que representa a trajetória, descrita pelas equações:

$$y = \frac{3x^2}{4} + 5$$
$$z = 4\sin\frac{x}{2}$$

onde o parâmetro *t* não aparece. Graficamente, o aspecto da curva seria:



Prosseguindo, vamos chamar o vetor posição $(P - O)$ de $\vec{r} = \vec{r}(t)$. A trajetória é definida por:

$$P = O + \vec{r}(t) = O + x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

Vamos indicar as derivadas em relação ao tempo por um ponto, ou seja:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \ ; \ \frac{dx}{dt} = \dot{x} \ ; \ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \quad ; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \ ; \quad \text{etc.}$$

A velocidade de P é definida por:

$$\vec{v} = \frac{dP}{dt} = \dot{\vec{r}}\,(t)$$

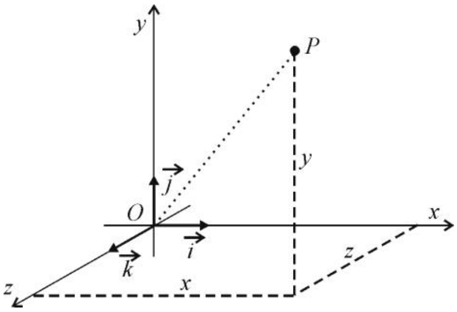
e a sua aceleração por:

$$\vec{a} = \frac{d^2P}{dt^2} = \dot{\vec{v}}\,(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Considerando alguns sistemas de coordenadas, vejamos as respectivas componentes.

1) <u>Coordenadas cartesianas</u>

$P - O = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$



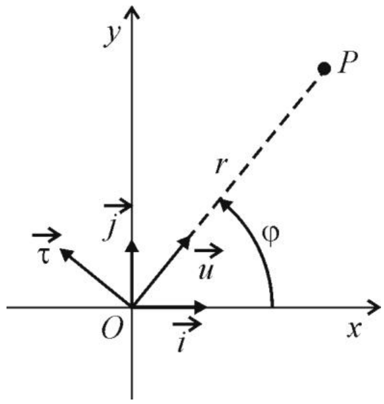
Com $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ fixos:

$\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$

e $\vec{a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$

2) <u>Coordenadas polares no plano</u>

$P - O = r\vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d(P-O)}{dt} = \frac{dP}{dt} = \dot{r}\vec{u} + r\dot{\vec{u}}$



Para $\dot{\vec{u}}$ e $\dot{\vec{\tau}}$:

$$\vec{u} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{\tau} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

Assim, com $O\vec{\imath}$ e $O\vec{\jmath}$ fixos:

$$\dot{\vec{u}} = -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{\imath} + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{\jmath} = \dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}) = \dot{\varphi}\vec{\tau} \quad \text{e}$$

$$\dot{\vec{\tau}} = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{\imath} - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{\jmath} = -\dot{\varphi}(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}) = -\dot{\varphi}\vec{u}$$

Portanto:

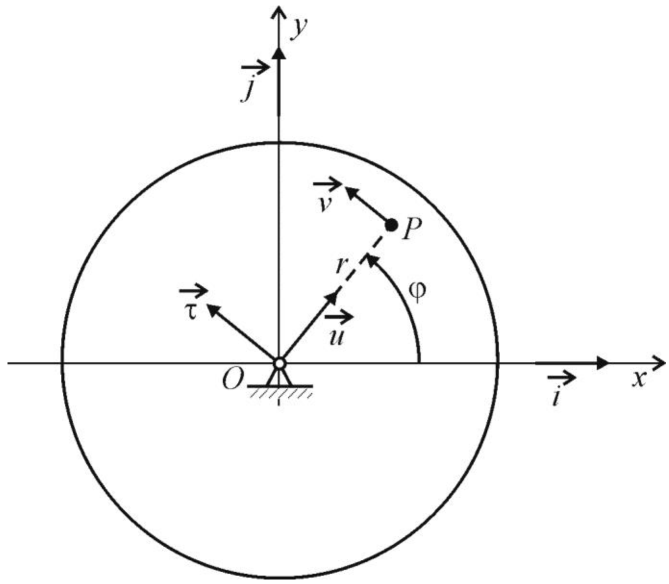
$\vec{v} = \dot{r}\vec{u} + r\dot{\vec{u}} = \dot{r}\vec{u} + r\dot{\varphi}\vec{\tau}$

Para a aceleração:

$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\vec{u} + \dot{r}\dot{\vec{u}} + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{\tau} + r\ddot{\varphi}\vec{\tau} + r\dot{\varphi}\dot{\vec{\tau}} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)}_{radial}\vec{u} + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})}_{transversal}\vec{\tau}$

ATENÇÃO à diferença entre **REFERENCIAL** e **SISTEMA DE COORDENADAS**

Considere um disco girando em torno do seu centro fixo *O*, com velocidade angular $\dot{\varphi}$, e sendo *P* um ponto desse disco.



Considere também um referencial fixo (absoluto - parede, chão), que contém o centro *O*, com os eixos *Ox* e *Oy* solidários a ele.

Nesse referencial, com $x = r\cos\varphi$ e $y = r\sin\varphi$, a velocidade de P pode ser expressa no sistema de coordenadas cartesiano:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} =$$

$$= -r\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{\imath} + r\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

ou no sistema de coordenadas polares:

$$\vec{v} = r\dot{\varphi}\vec{\tau}$$

Analogamente, pode-se expressar a aceleração (nesse mesmo referencial fixo) nos dois sistemas de coordenadas.

Note-se que aqui o referencial é o mesmo (absoluto), e estamos expressando a mesma grandeza ou o mesmo vetor (velocidade ou aceleração absolutas do ponto), apenas usando componentes (coordenadas) diferentes.

Façamos agora uma **mudança de referencial**, usando o disco como referencial móvel (o observador move-se junto com disco), com os eixos $O\vec{u}$ e $O\vec{\tau}$ ligados rigidamente a ele. Com relação a este novo referencial, a velocidade de *P* é nula (o observador move-se com ele), e posso expressá-la usando o sistema de coordenadas cartesiano:

$$\vec{v} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}$$

ou o sistema de coordenadas polares:

$$\vec{v} = 0\vec{u} + 0\vec{\tau}$$

Análogo para a aceleração.

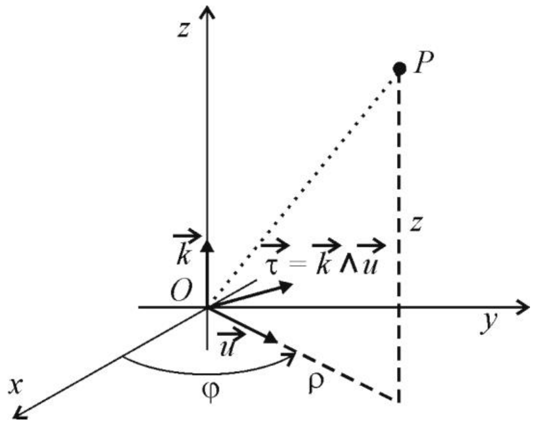
3) <u>Coordenadas cilíndricas</u>

$P - O = \rho\vec{u} + z\vec{k}$

Com $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ fixos:

$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u} + \rho\dot{\varphi}\vec{\tau} + \dot{z}\vec{k}$

e $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{u} + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{\tau} + \ddot{z}\vec{k}$



4) <u>Coordenadas esféricas</u>

$P - O = r\vec{e}_r$

Com *Ox*, *Oy* e *Oz* fixos:

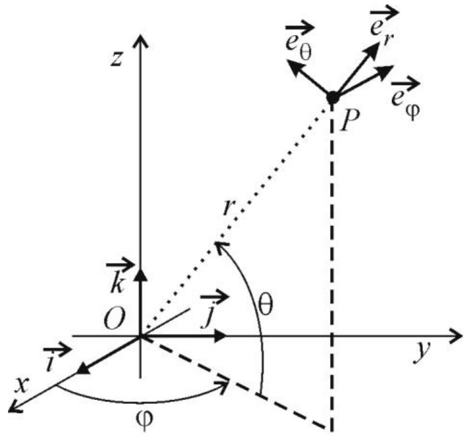
$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ e

$\vec{a} = \left(\ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi\right)\vec{e}_r +$

$+\left(2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\theta - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi$

$+$

$+\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\theta$



2.2 – Componentes intrínsecas

Se expressarmos os vetores velocidade e aceleração em termos do triedro de Frenet, suas componentes serão chamadas de intrínsecas, pois dependerão apenas da trajetória e não do sistema de coordenadas adotado. Isto é especialmente útil quando se estuda o movimento de um ponto material sobre uma curva dada, pois, neste caso, o triedro de Frenet é um dado do problema.

Seja $P(t)$ um ponto móvel no espaço, $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ o triedro de Frenet definido a cada instante para a curva trajetória de $P(t)$ e s o arco de trajetória medido a partir de uma origem qualquer. Assim, $P = P(s)$, com $s = s(t)$.

Temos:

$$\vec{v} = \dot{P} = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds}\dot{s} = \dot{s}\vec{t} = v\vec{t}$$

O escalar $\dot{s} = v$ chama-se <u>velocidade escalar</u>, e $\vec{v}$ é evidentemente tangente à trajetória.

Quanto à aceleração:

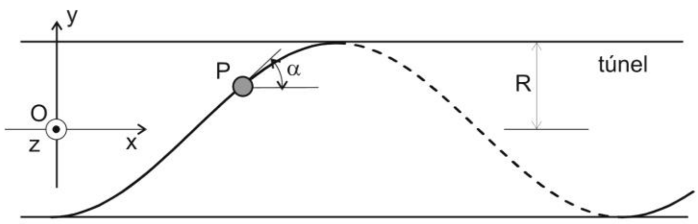
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}\dot{\vec{t}} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}\left(\frac{d\vec{t}}{ds}\dot{s}\right) = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

com: $\dot{v} =$ aceleração tangencial, e

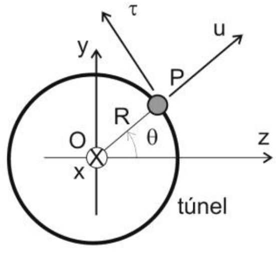
$\frac{v^2}{\rho} =$ aceleração normal

Não confundir essas grandezas com as componentes transversal e radial da aceleração expressa em coordenadas polares. Será as mesmas apenas se a trajetória for uma circunferência de centro na origem, e desde que se oriente $\vec{u}$ de P para O.

Exemplo 2.2 - (CP.8 da lista) O vídeo “Tunel”, disponível no “site” da disciplina, mostra uma manobra acrobática com um automóvel dentro de um túnel. Vamos adotar um modelo físico simplificado para essa manobra, ilustrado na figura abaixo, com as seguintes hipóteses:

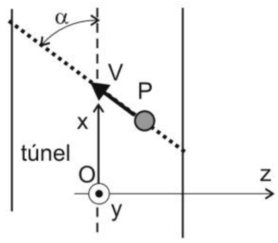


vista lateral



vista traseira

Túnel cilíndrico - Ponto em trajetória helicoidal de passo constante



vista superior

- o túnel será representado por uma superfície cilíndrica de raio R. Vamos adotar aqui um cilindro completo, embora não houvesse maiores dificuldades em adotar um cilindro truncado pela pista de rodagem, o que representaria melhor o caso real;

- o veículo será representado por um ponto material P de massa M;

- o movimento se inicia no ponto mais baixo do cilindro, com a direção do veículo fazendo um ângulo de entrada α com o eixo daquele;

- a trajetória se desenvolve na superfície cilíndrica do túnel. Supõe-se que o ângulo de avanço α seja constante, ou seja, a trajetória é helicoidal de passo constante – isso corresponde a supor que não existam deslizamentos laterais do veículo;

- o piloto, além de manter o volante fixo, não acelera nem freia o veículo durante toda a manobra, ou seja, não há dissipação nem fornecimento de energia ao veículo.

Nestas condições, pede-se:

a) obtenha as coordenadas do ponto P (ou seja, as componentes do vetor posição $(P - O)$) usando o sistema de coordenadas cartesiano (O, x, y, z) indicados na figura, em função do parâmetro (ângulo) θ e das constantes R e α.

b) obtenha as coordenadas do ponto P (ou seja, as componentes do vetor posição $(P - O)$) usando o sistema de coordenadas cilíndricas (O, R, θ, x) indicados na figura, em função do parâmetro (ângulo) θ e das constantes R e α.

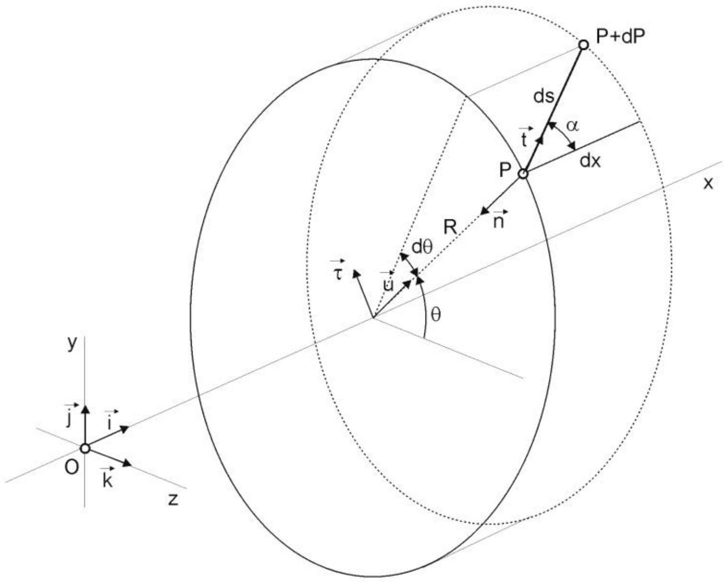
c) obtenha o raio de curvatura da trajetória, nas posições em que o ângulo θ é igual a -90º, 0º, 45º e 90º.

d) obtenha as componentes do vetor velocidade $\vec{V}$ do ponto P, nos eixos x, y e z indicados na figura, em função do parâmetro (ângulo) θ.

e) obtenha as expressões da aceleração tangencial e da aceleração normal desse ponto em função da velocidade V, nas coordenadas intrínsecas $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$.

SOLUÇÃO:

a) obtenha as coordenadas do ponto P (ou seja, as componentes do vetor posição (P – O)) usando o sistema de coordenadas cilíndricas (O, R, θ, x) indicados na figura, em função do parâmetro (ângulo) θ e das constantes R e α.



O vetor posição do ponto *P*, no sistema de coordenadas cilíndricas indicado, é dado por:

$$(P - O) = R\vec{u} + x\vec{\imath} \qquad (1)$$

Para um pequeno deslocamento *ds* do ponto *P* sobre a sua trajetória, que corresponde a uma pequena variação $d\theta$ do parâmetro θ, temos:

$$R \cdot d\theta = ds \cdot \sin\alpha \qquad (2)$$

e

$$dx = ds \cdot \cos\alpha \qquad (3)$$

Eliminando *ds* dessas duas equações, e considerando que o movimento inicia em *x = 0* com $\theta = \theta_0$, ficamos com:

$$R \cdot \cos\alpha \cdot d\theta = dx \sin\alpha \Rightarrow R\cos\alpha \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \sin\alpha \int_0^x dx \Rightarrow x = R(\theta - \theta_0)/\tan\alpha$$

Assim, a posição do ponto P, em função do parâmetro (ângulo) θ e das constantes *R* e α, será dada por:

$$\boxed{(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}) = \boldsymbol{R\vec{u}} + \frac{\boldsymbol{R(\theta - \theta_0)}}{\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\vec{\imath}}}$$

b) obtenha as coordenadas do ponto P (ou seja, as componentes do vetor posição (P – O)) usando o sistema de coordenadas cartesiano (O, x, y, z) indicados na figura, em função do parâmetro (ângulo) θ e das constantes R e α.

Da eq. (2):

$$R \cdot d\theta = ds \cdot \sin\alpha \Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = \frac{R}{sen\alpha} \Rightarrow s = \frac{R}{sen\alpha}(\theta - \theta_0)$$

Da eq. (3):

$$dx = ds \cdot \cos\alpha = \frac{R.d\theta}{sen\alpha} cos\alpha \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{R}{tg\alpha} \Rightarrow x = \frac{R}{tg\alpha}(\theta - \theta_o) \qquad (3)$$

Assim, podemos escrever a equação paramétrica da trajetória:

$$\boldsymbol{P - O = \frac{R(\theta - \theta_o)}{tg\alpha}\vec{\imath} + Rsen\theta\,\vec{\jmath} + Rcos\theta\,\vec{k}} \qquad \textbf{(4)}$$

---

c) obtenha o raio de curvatura da trajetória, nas posições em que o ângulo θ é igual a -90º, 0º, 45º e 90º.

Para o triedro de Frenet $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ da trajetória, o versor tangente $\vec{t}$ é dado por:

$$\vec{t} = \frac{dP}{ds} = \frac{dP}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \left(\frac{R}{tg\alpha}\vec{\imath} + Rcos\theta\,\vec{\jmath} - Rsen\theta\vec{k}\right) \cdot \frac{sen\alpha}{R} =$$

$$= \cos\alpha\ \vec{\imath} + sen\alpha \cdot cos\theta\,\vec{\jmath} - sen\alpha \cdot sen\theta\vec{k}$$

Para o versor normal $\vec{n}$, temos:

$$\frac{1}{\rho}\vec{n} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \left(-sen\alpha \cdot sen\theta\,\vec{\jmath} - sen\alpha \cdot cos\theta\vec{k}\right) \cdot \frac{sen\alpha}{R} = \frac{sen^2\alpha}{R}\left(-sen\theta\,\vec{\jmath} - cos\theta\vec{k}\right)$$

onde ρ é o raio de curvatura da trajetória: $\rho = \frac{R}{sen^2\alpha}$

Vemos que o raio de curvatura ρ é constante, sendo o mesmo para todos os valores de θ pedidos.

$$\boldsymbol{\rho = \frac{R}{sen^2\alpha}}$$

---

d) obtenha as componentes do vetor velocidade $\vec{V}$ do ponto P, nos eixos x, y e z indicados na figura, em função do parâmetro (ângulo) θ.

Da eq. (4):

$$\vec{V} = \frac{d}{dt}(P - O) = \frac{d}{dt}\left[\frac{R(\theta - \theta_o)}{tg\alpha}\vec{\imath} + Rsen\theta\,\vec{\jmath} + Rcos\theta\,\vec{k}\right] =$$

$$= \frac{R\dot{\theta}}{tg\alpha}\vec{\imath} + R\dot{\theta}cos\theta\,\vec{\jmath} - R\dot{\theta}sen\theta\,\vec{k}$$

Como a velocidade do ponto *P* na direção de *Ox* é $Vcos\alpha$, temos:

$$\frac{R\dot{\theta}}{tg\alpha} = Vcos\alpha \Rightarrow R\dot{\theta} = V\sin\alpha$$

Assim, a velocidade do ponto *P*, em função do parâmetro θ, será dada por:

$$\boldsymbol{\vec{V} = Vcos\alpha\,\vec{\imath} + V\sin\alpha\, cos\theta\,\vec{\jmath} - V\sin\alpha\, sen\theta\,\vec{k}}$$

---

e) obtenha as expressões da aceleração tangencial e da aceleração normal desse ponto em função da velocidade V, nas coordenadas intrínsecas ($\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$).

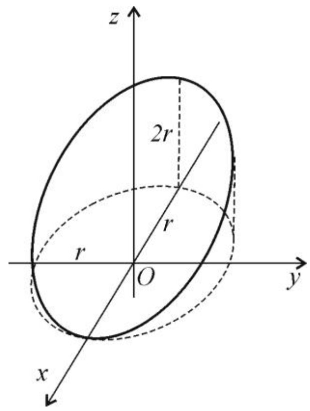
Aceleração tangencial: $\boldsymbol{\vec{a}_t = \dot{V}\vec{t}}$

Aceleração normal: $\boldsymbol{\vec{a}_n = \frac{V^2}{\rho}\vec{n} = \frac{sen^2\alpha}{R}V^2\vec{n}}$

Exemplo 2.3: O movimento do ponto P é dado pelas leis do movimento:

$$x = r \sin \omega t$$
$$y = r \cos \omega t$$
$$z = r(1 - \sin \omega t)$$

onde r e ω são constantes não nulas. Qual é a trajetória de P?



Resolução:

Eliminando o tempo das equações dadas:

$x^2 + y^2 = r^2$ (superfície cilíndrica de raio r e eixo *Oz*)
$z + x = r$ (plano paralelo a *Oy*, inclinado de 45º em relação ao plano *xOy*)

A trajetória, portanto, é uma elipse, contida no plano $z + x = r$, centro (*0, 0, r*) e de semi-eixos:

$$a = \sqrt{2}r$$
$$b = r$$

Exemplo 2.4: Dadas as expressões intrínsecas de $\vec{v}$ e $\vec{a}$:

$$\vec{v} = v\vec{t} \quad \text{e} \quad \vec{a} = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

e sendo $c = 1/\rho$, onde c é a curvatura da trajetória e ρ o seu raio de curvatura, verifique que:

$$c = \frac{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}{v^3} = \frac{1}{\rho}$$

Resolução:

$$\vec{v} \wedge \vec{a} = (v\vec{t}) \wedge \left(\dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}\right) = \frac{v^3}{\rho}\vec{b} \Rightarrow |\vec{v} \wedge \vec{a}| = \frac{v^3}{\rho} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}{v^3} = \frac{1}{\rho} = c$$