

# Introduzindo o Conceito de Polígono por Meio de Planificação e Construção de Poliedros

OswaldoBulla<sup>1</sup>

João Roberto Gerônimo<sup>2</sup>

## Resumo

Este trabalho foi desenvolvido através de dois temas da geometria: polígonos e poliedros. Estes foram trabalhados de forma concreta, ou seja, mediante a construção das referidas figuras. Através desta prática, foi possível um melhor entendimento sobre a existência de seus elementos, assim como de suas propriedades. A construção de polígonos possibilitou estabelecer relações de diferenças entre polígonos e determinar fórmulas que pudesse levar aos cálculos de área. Os estudos sobre polígonos facilitaram muito na construção de poliedros e foi determinante para estabelecer relações entre seus elementos e suas propriedades, sendo possível fazer comparações entre tipos de poliedros e entender suas nomenclaturas. Na comparação de prismas diferentes, observou-se o princípio de Cavalieri e a decomposição de um prisma quadrangular em três pirâmides equivalentes, justificando a fórmula do volume de pirâmide. Com os elementos de um poliedro; face, aresta e vértice, o aluno verificou a veracidade da relação de Euler.

**Palavras-chave:** polígonos, poliedros, planificação, geometria espacial.

## Abstract

This work was developed through two subjects of the geometry: polygons and polyhedrons. These were worked in the concrete form, in other words, by means of the construction of the above-mentioned figures. Through this practice, a better understanding was possible on the existence of his elements, as well as of his properties. The construction of polygons made possible to establish relations of differences between polygons and to determine formulas what it could take to the calculations of area. The studies on polygons were careless very much in the construction of polyhedrons and it was determinative to establish relations between his elements and his properties, being possible comparisons doing between types of polyhedrons and to understand his nomenclatures. In the comparison of different prisms, there was observed the Cavalieri Principle and the decomposition of a quadrangular prism in three equivalent pyramids, justifying the formula of the volume of pyramid. With the elements of a polyhedron; face, edge and apex, the pupil checked the truthfulness of the relation of Euler.

**Key-words:** polygons, polyhedrons, planification, spacial geometric.

---

<sup>1</sup> Professor da SEED/PR. E-mail: [bulla@seed.pr.gov.br](mailto:bulla@seed.pr.gov.br)

<sup>2</sup> Professor da UEM. E-mail: [jrgeronimo@uem.br](mailto:jrgeronimo@uem.br)

## **OBJETIVO E MÉTODO DE TRABALHO**

Tendo por objetivo melhorar o ensino da geometria que utilizava somente fórmulas, onde o aluno era promovido sem saber o que estava estudando, foram construídos em sala de aula figuras e objetos geométricos que deram ao aluno suporte na aprendizagem e visualização de objetos geométricos, permitindo que identificasse elementos que levam as deduções das fórmulas que definem os cálculos.

O aluno que participou de todas as atividades práticas de construção de objetos geométricos, não só adquiriu maior conhecimento do conteúdo, como se tornou mais crítico em sua argumentação em defesa do assunto. Ele defendeu seu trabalho, citando os elementos fundamentados nos conhecimentos teóricos adquiridos nas atividades. Esta argumentação e fundamentação de conhecimentos, não aconteceram com alunos que realizaram atividades do mesmo conteúdo na forma de receber a fórmula e elementos e dar a solução.

## **Introdução**

A geometria é um conteúdo que resulta em idéias novas e motivadoras quando trabalhada em situações do cotidiano.

A geometria constitui a parte mais importante do currículo matemático do aluno, pois através do estudo, o aluno desenvolve um pensamento especial, que possibilitará a compreensão do mundo onde vivemos. São estas as idéias norteadoras da presente abordagem. (PCN, 1998, P.51).

Este trabalho aponta meios que levam o aluno a construir figuras geométricas, analisar suas propriedades, determinar conceitos que definem sua formação e calcular algumas medidas a elas relacionadas. Por outro lado, a realização desse trabalho despertou no aluno a curiosidade e o interesse de poder cumprir uma tarefa que a má colocação do conteúdo no planejamento e a maneira totalmente abstrata de trabalhar com os alunos não permitiram. Verificamos que o aluno quando chega ao ensino médio, traz na bagagem um conhecimento tímido sobre geometria, não sabe sequer classificar as figuras geométricas planas quanto o número de lados. Através deste fato, no ensino fundamental, o aluno recebe as fórmulas prontas que representam as várias figuras geométricas e elementos levando a calcular e chegar aos resultados pretendidos, sem saber de que maneira

esta figura é representada, quando a motivação é dar meios para que ele possa obter resultados que comprovam e justifiquem de forma real, os fatos sugeridos.

Na geometria espacial, mais precisamente poliedros, são desenvolvidas atividades, como construção de poliedros de diferentes formas, que planificados, são identificados elementos da geometria plana e que, analisados e relacionados aos poliedros, induze-os a conclusão de fórmulas utilizadas nos cálculos de área e volume dos poliedros. No estudo dos poliedros na forma planificada foram feitos também relações entre lados de polígonos com aresta de poliedros, polígono com face do poliedro e verificados a diferença entre vértice de polígono e vértice de poliedro, além de comprovar a veracidade da relação de Euler  $F + V - A = 2$ , e existência de apenas cinco poliedros de Platão. Na construção de prismas diferentes de bases cujas foi confirmado o Princípio de Cavalieri.

## **Desenvolvimento**

*“Estudar geometria é conviver com as coisas que nos cercam”.*

A geometria é uma das mais belas partes da Matemática, além de nos ajudar na compreensão das coisas do mundo concreto, a geometria abre-nos a possibilidade de criar imagens ilusórias e de imaginar mundos abstratos, frutos de fantasia e capacidade de criação do cérebro humano.

Ela surgiu da necessidade dos seres humanos de medir terras e demarcar propriedades, mas, atualmente, está voltada para o estudo das figuras, de propriedades e relações. Sendo parte do conhecimento desenvolvido pelo indivíduo na tentativa de compreender certos aspectos do mundo em que vive, pois este universo é repleto de objetos, coisas, entes de várias formas e tamanhos, que ocupam as mais variadas posições. Medir, examinar formas, comparar e analisar posições de objetos são algumas das preocupações cotidianas do ser humano.

Este trabalho foi realizado com uma turma do terceiro ano do ensino médio, onde foi colocada a proposta, assim como registrados todos os procedimentos legais obtidos pelos alunos. A realização desta intervenção só foi possível, após a elaboração de um plano de trabalho fundamentado no conteúdo **poliedro**, proposto na grade curricular do ensino médio, feita mediante a aceitação da turma, que sujeitou a desenvolver de forma concreta, analisando as causas e conseqüências

dos resultados obtidos. Para isso, foi solicitada a construção de vários objetos que representasse os sólidos, que não envolvessem nada relacionado ao redondo.

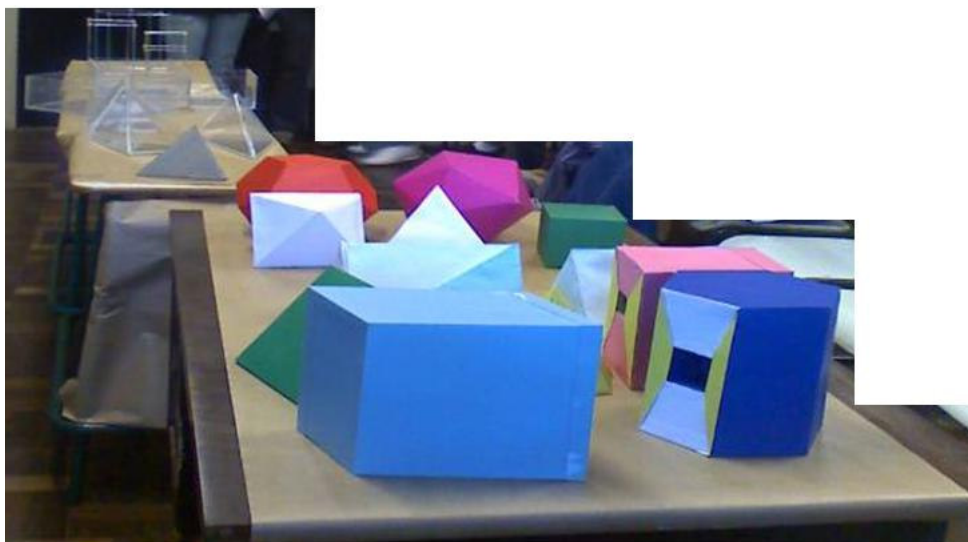


Figura 1: Apresentação de sólidos não redondos. (acervo próprio)

Após a verificação dos sólidos, os alunos puderam sentir a necessidade de retroceder aos conteúdos estudados nas séries anteriores para buscar conceitos, formas de cálculos e pré-requisitos que seriam indispensáveis à realização do procedimento e da aprendizagem.

Para isso, o aluno pôde sentir que para estudar os poliedros, se fazia necessário conhecer polígonos, figuras planas bidimensionais, nas quais só existem duas dimensões. Foram adotados critérios de estudos individualizados de cada figura plana. Dentro dos quadrangulares, foram citados o paralelogramo (quadrado, retângulo e o losango) e o trapézio, não só na maneira tradicional de fazer os cálculos, mas sim, do porque da existência das fórmulas utilizadas nos cálculos, principalmente de área. Também foi sugerido o estudo de polígonos regulares inscritos numa circunferência, tais como: triângulo eqüilátero, quadrado e hexágono, os quais configurados em sua formação de sucessivos triângulos eqüiláteros congruentes estabelecendo relações métricas do apótema, do lado e da área em função do raio da circunferência que os circunscrevem.

Depois de várias explanações sobre o assunto, ficou claro que o conhecimento sobre a geometria plana, estava muito aquém do desejado, isto tudo devido o processo de aprendizagem na forma exclusivamente algébrica, ou seja, abstrata. Ficou visível também, que as maiores dificuldades na aprendizagem da geometria plana, estava em reconhecer no que consiste numa figura representar a unidade do quadrado.

## RESGATANDO O PASSADO

Diante desta dificuldade apresentada pelo aluno, foi desenvolvida uma atividade, na qual estava centrada a construção de figuras que representavam um quadrado. Para realização desta atividade, foi proposto aos alunos que construíssem um segmento qualquer, em seguida um quadrado cujos lados tivessem as mesmas medidas do segmento original. Assim puderam observar que o quadrado construído por cada aluno tinha um tamanho diferente, mas representava um quadrado, a este quadrado que tinha os lados construídos através de um segmento qualquer, passou a representar o quadrado de uma unidade, cuja unidade é o primeiro segmento construído.

Por exemplo, no caso da medida do segmento ser de 5 cm (cinco centímetros), a área do quadrado será de  $25 \text{ cm}^2$  (vinte e cinco centímetros ao quadrado).

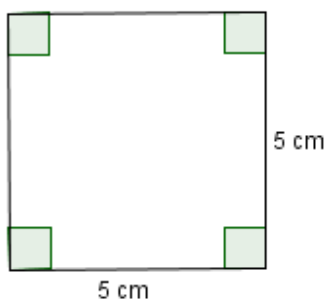


Figura 2: Quadrado de lado 5 cm considerado pelos alunos.

Foram desenvolvidas muitas atividades envolvendo os polígonos regulares inscritos numa circunferência, nas quais foram possível observar alguns elementos importantes que facilitaríamos os cálculos desses polígonos, tais como:

- a) o centro do polígono é o centro da circunferência que circunscreve;
- b) raio são os segmentos congruentes com extremos no centro do polígono e em todos os vértices;
- c) apótema do polígono são segmentos congruentes com extremos no centro do polígono e no ponto médio de cada lado (eles são perpendiculares ao lado do polígono);
- d) ângulos centrais do polígono são os ângulos formados pelos raios consecutivos do polígono;

Após a realização de muitas atividades relacionadas aos conteúdos citados como pré-requisitos, foram construídos vários polígonos quadrangulares.

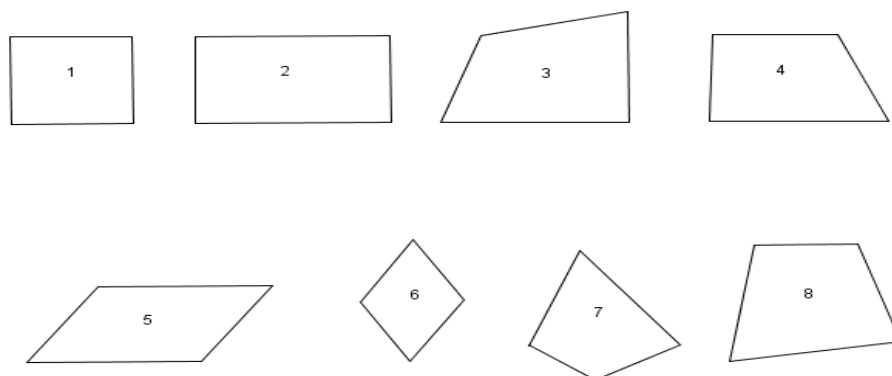


Figura 3: Quadriláteros.

Estes quadriláteros foram selecionados e agrupados de acordo seus lados e ângulos internos. Após este procedimento os alunos puderam perceber as relações existentes entre os lados e seus ângulos correspondentes, tendo assim conhecimento das propriedades, chegando aos conceitos e fórmulas para cálculos de perímetro e área das figuras quadrangulares planas como as representadas nas figuras 1, 2, 4, 5 e 6.

Com os conhecimentos adquiridos nas construções de polígonos, os alunos sentiram mais seguros em começar a trabalhar na construção dos poliedros.



Figura 4: Figuras poliédricas.  
(acervo próprio)



Figura 5: Superfície poliédrica prismática triangular.  
(acervo próprio)



Figura 6: Sólido – paralelepípedo.  
(acervo próprio)

Durante o trabalho, foram confeccionados vários objetos, alguns com ferro tubos circulares, outros com cartolinas e outros sólidos. Os alunos se incumbiram de separá-los de acordo suas características e assim classificados: Aqueles construídos com tubos circulares, foram chamados de figuras poliédricas (figura 4), representam somente o esqueleto de um poliedro, só possuem as arestas e os vértices. Os construídos com cartolinas, são denominados de superfícies poliédricas

(figura 5), representam somente a casca do poliedro, onde são visíveis as arestas, os vértices e as faces poligonais. Por último os sólidos, ou seja, aqueles mais completos constituídos do esqueleto, da casca e seu interior, a este são dados o nome de poliedros (figura 6). Dentre os poliedros construídos, foi formado o grupo denominado prismas.

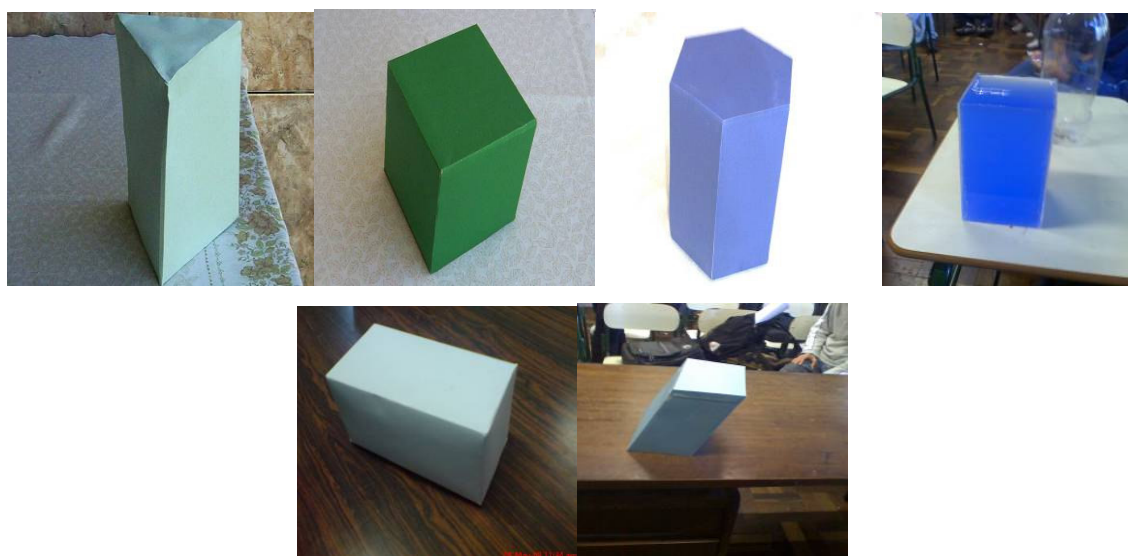


Figura 7: Prismas construídos pelos alunos. (acervo próprio)

Essas figuras ganharam destaques na aprendizagem do aluno, pois são objetos que contam com presença constante no dia-a-dia das pessoas na forma de objetos usados principalmente no comércio como embalagem.

Para construir um prisma, não foi difícil em verificar que suas faces laterais são formadas de polígonos do tipo paralelogramos e de apresentar a nomenclatura prisma reto e prisma oblíquo.

Na forma planificada, o aluno pode perceber como as arestas se constituem, assim como seus vértices, a relação da aresta lateral com a altura de um prisma e área lateral de um prisma. Dentre os prismas mencionados, foram destacados dois, os quais possuem uma relação direta entre as medidas de suas dimensões com suas diagonais: o cubo e o paralelepípedo retângulo.

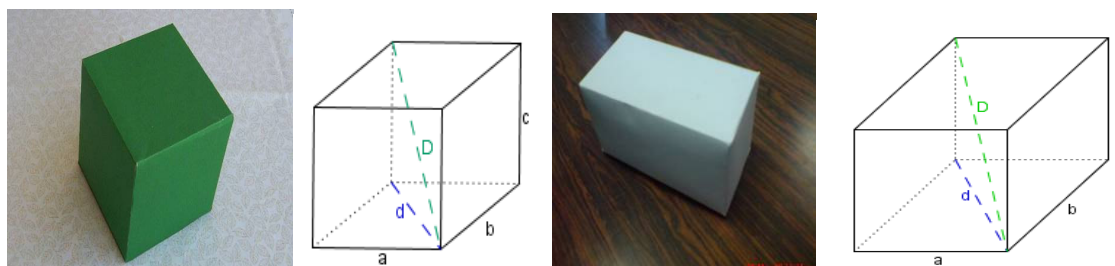




Figura 8: Cubo. (acervo próprio)

Figura 9: Paralelepípedo. (acervo próprio)

Tanto no cubo como no paralelepípedo retângulo, além das faces, arestas e vértices, foram destacados a diagonal da base e a diagonal do sólido. As duas figuras poliédricas representadas nas figuras 1 e 2, só foram representadas graficamente para melhor visualizar a diagonal do cubo e do paralelepípedo retângulo e poder calculá-la. Assim pudemos resgatar o Teorema de Pitágoras, que estava quase no esquecimento por falta de uso.

## VOLUME DO PRISMA

Como conseguir uma fórmula, para calcular o volume de um prisma? Conforme Cavalieri foi feita várias verificações para chegar a uma conclusão sobre o cálculo do volume de um prisma.

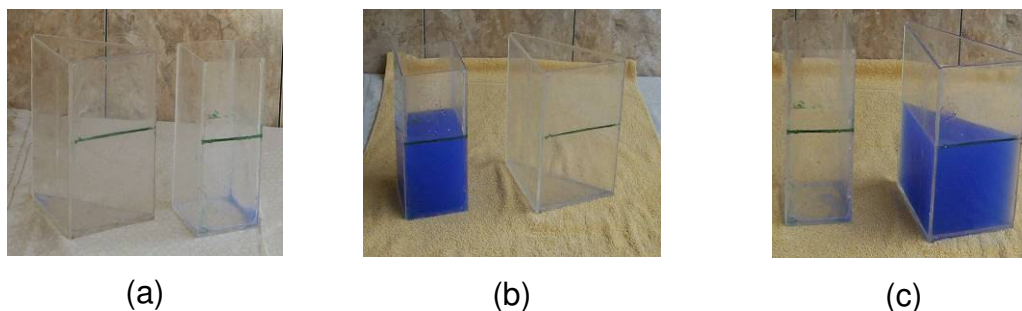


Figura 10: Volume de prismas. (acervo próprio)

No final ficou comprovado que, dados dois prismas cujas bases pertencem a dois planos paralelos, só possuem massas semelhantes, se somente se, tiverem bases de medidas de áreas e alturas semelhantes. Na figura 10(a), temos dois prismas: um com base quadrada com medidas de 10 cm de lado e 30 cm de altura, outro com base triangular com medidas 20 cm de lado chamado por base e 10 cm de altura da base, por 30 cm de altura, com uma marca na altura de 10 cm da base, ambos estão vazios: Na figura 10(b)c temos os mesmos prismas só que o prisma de base quadrada está com líquido de cor azul até a marca de 10 cm enquanto que o prisma de base triangular está vazio: Na figura 10(c), temos a inversão, ou seja, o prisma de base quadrada está vazio enquanto que o prisma de base triangular está com o líquido de cor azul até a marca de 10 cm. Vale lembrar que a quantidade de líquido azulado que ocupam os prisma nas figuras 2 e 3 é a mesma. Com isso, foi observado que o volume ( $V$ ) de um prisma é conhecido através do produto da área da base pela sua altura, ou seja,  $V_{\text{prisma}} = S_b \cdot h$ , onde  $S_b$  é a área da base e  $h$  é a altura.



## **PIRÂMIDE**

Juntamente com os prismas já visto anteriormente, podemos destacar os poliedros conhecidos como pirâmides, famosas nas construções do antigo Egito.

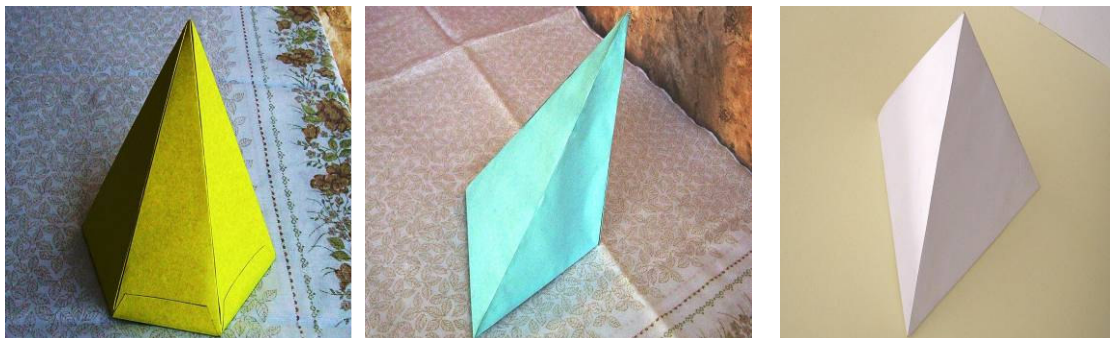


Figura 11: Pirâmides construídas pelos alunos. (acero próprio)

Foi construída em forma de figura poliédrica uma pirâmide, onde facilita fazer uma verificação mais concreta dos seus elementos, que são utilizados nas mais variadas formas de cálculos. Foi observado que a base da pirâmide é formada por uma região poligonal que pertence a um plano e um ponto situado fora desse plano e que ela se consolida pela reunião de todos os segmentos de retas com extremidades no vértice e na base.

No trabalho de construção da pirâmide, foi destacada a pirâmide de regular, bem como o apótema da base, o apótema da pirâmide e a altura da pirâmide, sendo possível verificar com mais clareza, várias relações métricas com seus elementos. Com esses conhecimentos, foi possível fazer algumas considerações na relação pirâmide e suas área: Primeiramente falamos da área da base, no qual foi verificado que o cálculo da área da base de uma pirâmide está relacionado diretamente com a forma do polígono que a constitui.

## **VOLUME DE PIRÂMIDE**

Depois de terem realizado todos estes estudos sobre pirâmide, foram estudados os procedimentos de como calcular o volume de uma pirâmide, justamente por se tratar de um sólido que ao diminuir sua altura conservando as

arestas da base proporcionais em suas medidas originais, as áreas também vão se diminuindo nas mesmas proporções.

É comum encontrar nos livros didáticos, a decomposição de um prisma triangular regular em três pirâmides semelhantes para chegar a fórmula de volume de pirâmide. Será que é possível decompor um prisma quadrangular em três pirâmides semelhantes para o mesmo procedimento?

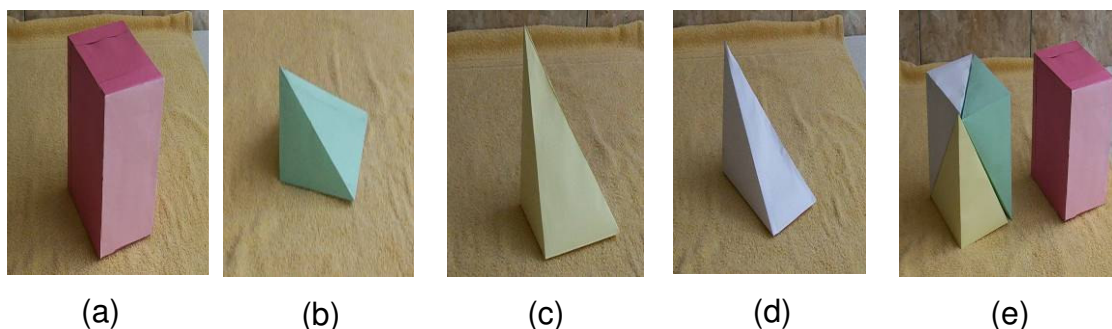


Figura 12: Decomposição de um prisma retangular em três pirâmides.  
(acervo próprio)

Para discutir esta questão foi considerado um paralelepípedo (figura 12(a)) com dimensões **a**, **b** e **c**, onde o volume é  $V = a.b.c = a.c.b = b.c.a$ . Na figura 12(b), temos uma pirâmide de base quadrangular retangular, cuja base de dimensões **b** e **c** e altura **a**; Na figura 12(c) temos uma pirâmide de base quadrangular retangular, cuja base de dimensões **a** e **b** e altura **c**; Na figura 12(d) temos uma pirâmide de base quadrangular retangular, cuja base de dimensões **a** e **c** e altura **b**. Assim sendo, as três pirâmides possuem áreas semelhantes, que juntas possuem o volume do prisma, conforme figura 12(e)

Diante desta verificação, foi concluído que o volume de uma pirâmide é justamente a terça parte do volume de um prisma de área da base e altura semelhantes.

## POLIEDROS CONVEXOS

Conhecendo os elementos que formam o poliedro convexo, assim como,  $V =$  vértices,  $F =$  faces e  $A =$  arestas, o matemático EULER, estabeleceu uma relação, ou seja,  $V + F - A = 2$ , mais tarde verificou que esta relação também era

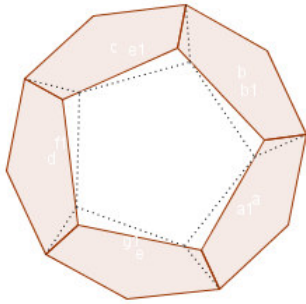
válida para os poliedros não convexos, menos para aqueles que têm furos vazados, ou seja, furos que passam de um lado para o outro. Se um poliedro tiver um furo que passa de um lado para outro (vazado), esta relação se iguala a 0 (zero); se um poliedro tiver dois furos vazados, a relação se iguala a -2; se tiver três furos vazados, se iguala a -4, isto é, para cada furo a relação de Euler diminui de duas unidades.

POLIEDRO	V	A	F	$V - A + F$
Pentaedro	6	9	5	2
Hexaedro	8	12	6	2
Heptaedro	10	15	7	2
Octaedro	6	12	8	2
Decaedro	12	20	10	2

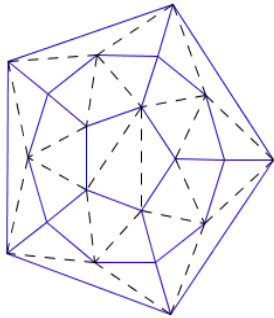
Os alunos realizaram várias atividades que envolveram a relação de Euler, confirmando sua veracidade.

Observaram também que é possível descobrir o número de arestas e número de vértices, conhecendo somente o número de suas faces e suas formas poligonais. Como por exemplo: um poliedro que possui quatro faces triangulares, três faces quadrangulares e seis faces pentagonais, se calcularmos o número de lados de todas as faces citadas, veremos que essas faces quanto polígonos, existem cinquenta e quatro lados que dividido por dois que é a condição de se formar uma arestas, teremos veremos que este poliedro possui vinte e sete arestas, e utilizando a relação de Euler, teremos dezesseis vértices. Assim sendo, não é possível existir um poliedro cuja soma dos lados das faces quanto polígonos, seja um número ímpar. Isto porque não existe meia aresta, conseqüentemente, meio vértices.

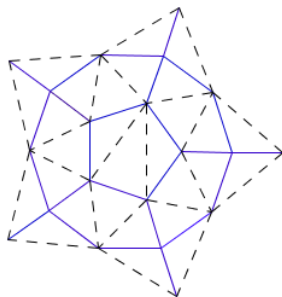
Ainda sobre a relação de Euler, os alunos não ficaram satisfeitos simplesmente na aplicação, queriam mais, provar num caso particular tal relação. Então foi tomado um dodecaedro, poliedro convexo regular de doze faces pentagonais, trinta arestas e vinte vértices e feito uma atividade de retirada de arestas livres. Vejamos como se procedeu.



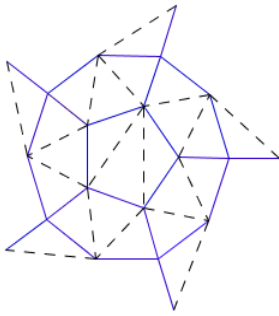
Retiramos uma de suas faces se, alterar o número de arestas e vértices. Portanto o dodecaedro deixou de ter doze faces e passou a ter onze faces. Assim a relação de Euler ficou assim:  $V + F - A = 1$



Planificamos o dodecaedro e traçamos duas diagonais em cada face. Se considerarmos essas diagonais como arestas, o dodecaedro sofreu um aumento de vinte e duas arestas e vinte e duas faces, permanecendo o mesmo número de vértices. A relação de Euler ficou assim:  $F + 22 + V - (A + 22) = 1 \Rightarrow F + 22 + V - A - 22 = 1 \Rightarrow F + V - A = 1$ , a relação de Euler permaneceu inalterada. Verifique agora que existem cinco arestas livres que serão retiradas.

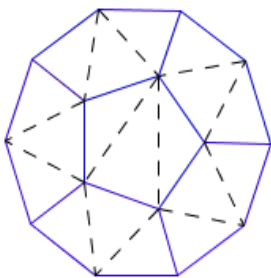


Assim foi feito, retiramos as cinco arestas livres, agora o poliedro planificado perdeu ficou com cinco arestas e cinco faces a menos. Substituindo na relação de Euler, ficou assim:  $F - 5 + V - (A - 5) = 1 \Rightarrow F - 5 + V - A + 5 = 1 \Rightarrow F + V - A = 1$ . Agora existem dez arestas livres das quais serão retiradas de forma alternadas.



Foram retiradas cinco arestas livres alternadas. Portanto o poliedro planificado tem agora cinco arestas e cinco faces a menos. Vejamos como fica a relação de Euler:  $F - 5 + V - (A - 5) = 1 \Rightarrow F - 5 + V - A + 5 = 1 \Rightarrow F + V - A = 1$ .

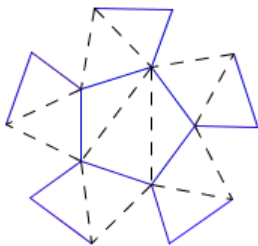
Vamos retirar as dez arestas livres que existem no poliedro planificado, e verificar o comportamento da relação de Euler.



Assim foi feito, junto com as dez arestas, também desapareceram cinco faces e cinco vértices. Substituindo na relação de Euler, ficou assim:

$$F - 5 + V - 5 - (A - 10) = 1 \Rightarrow F + V - 10 - A + 10 = 1 \Rightarrow F + V - A = 1.$$

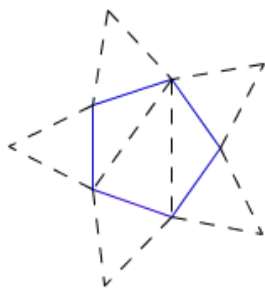
Temos agora outras dez arestas livres, das quais vamos retirar cinco de modo alternado, vejamos as conseqüências.



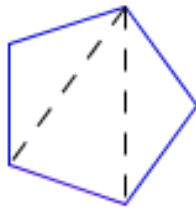
Retiramos as cinco arestas de forma alternada, junto com as cinco arestas deixaram de existir outras cinco faces. Portanto a relação de Euler ficou assim:

$$F - 5 + V - (A - 5) = 1 \Rightarrow F - 5 + V - A + 5 = 1 \Rightarrow F + V - A = 1.$$

Agora se pode observar que ficaram cinco pares de arestas livres que iremos retirá-las e observar a relação de Euler.



Deixaram de existir dez arestas cinco faces e cinco vértices. Vamos verificar na aplicação da relação de Euler, como fica:  $F - 5 + V - 5 - (A - 10) = 1 \Rightarrow F + V - 10 - A + 10 = 1 \Rightarrow F + V - A = 1$ . Na seqüência podemos observar que existem cinco pares de arestas livres que serão retiradas.



Foram retiradas as dez arestas, cinco faces e cinco vértices. Vamos substituir na relação de Euler:

$$F - 5 + V - 5 - (A - 10) = 1 \Rightarrow F + V - 10 - A + 10 = 1 \Rightarrow F + V - A = 1.$$

Agora podemos observar que restaram cinco arestas livres, das quais retiramos quatro, ou seja, dois pares de arestas, juntamente foram retirados duas faces e dois vértices.



Com este procedimento, podemos verificar que a relação de Euler se comportou de maneira inalterada em sua igualdade do começo até o final da verificação. Observa-se que:

$$F - 2 + V - 2 - (A - 4) = 1$$

$$F - 4 + V - A + 4 = 1$$

$$F + V - A = 1$$

$$1 + 3 - 3 = 1, \text{ como queríamos verificar.}$$

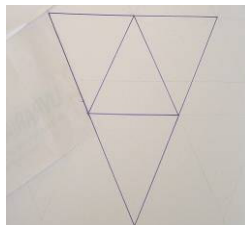
### POLIEDROS CONVEXOS REGULARES.

Foram feitas várias verificações com outros poliedros e constatou-se que não existem possibilidades de vértices dos poliedros com faces quadriláteros ou pentágonos, dar origem a quatro ou cinco arestas observando a existência de somente cinco poliedros regulares.

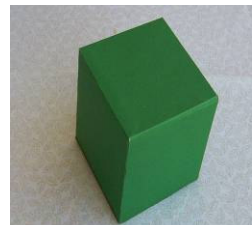
TETRAEDRO  
REGULAR



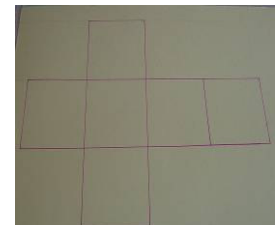
TETRAEDRO  
PLANIFICADO



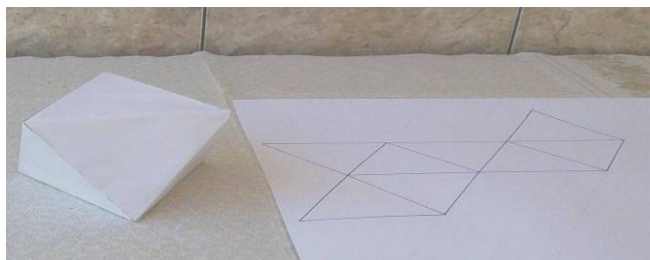
HEXAEDRO  
REGULAR



HEXAEDRO  
PLANIFICADO



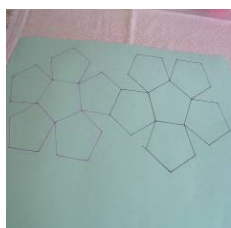
OCTAEDRO REGULAR      OCTAEDRO PLANIFICADO



DODECAEDRO  
REGULAR



DODECAEDRO  
PLANIFICADO



ICOSAEDRO  
REGULAR



ICOSAEDRO  
PLANIFICADO

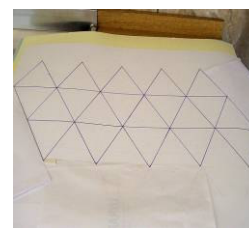


Figura 13: Os cinco tipos de poliedros regulares e as planificações. (acervo próprio)

## RESULTADOS E CONCLUSÕES

Este trabalho foi realizado em uma das três turmas que atuo como professor da disciplina de Matemática no período da manhã, a qual desenvolveu todas as atividades sugeridas, assim como, as que ela sugeriu dentro do contexto proposto. A diferença teórica se comparada com as turmas que não desenvolveram as atividades propostas, foi visível, pois a que trabalhou o conteúdo de forma prática, é que tem conhecimento concreto das várias situações dos sólidos, enquanto as que não trabalharam, não tem idéia da realidade que está relacionada as propriedades dos sólidos geométricos. Isto é notório na maneira de definir as propriedades existentes e os conceitos determinados de forma abstrata, diferentemente às observações feitas pelos alunos envolvidos no processo.

## REFERÊNCIAS

- ALLAN, N. Uma Curta História dos Poliedros, In: **Anais do II Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática**. Águas de São Pedro, 1997, p.301 – 311.
- BRASIL. Secretaria de educação média e tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC. 2002.



BREDA, Ana M.; LOFF, Dina M. S. **Os sólidos geométricos**. Departamento de Matemática de Universidade Coimbra: Coimbra, 1993.

CÂNDIDO, Suzana Laino. **Formas num Mundo de Formas**. São Paulo: Moderna, 1997.

GERÔNIMO, João Roberto; FRANCO, Valdeni Soliani. **Geometria Plana e Espacial**. Maringá-PR, Versão preliminar, 2004.

KALEFF, Ana Maria M.R. **Vendo e Entendendo Poliedros**, Editora EdUFF, Niterói-RJ, 2ª edição, 1998LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: Impa e Vitae Comunicação Visual, 1991, 206p.

KALEFF, Ana Maria M.,R.**Vendo e Entendendo Poliedros**, Niteroi: EDUFF, Volume 2, 1.998.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do Ensino Médio**. 4ª ed. Rio de Janeiro:SBM. 2002, 299p.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista – SBEM**. Srb.

PIRES, C. M. Carolino at al. **Espaço e Forma: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries Iniciais do Ensino Fundamental**. São Paulo: PROEM editora Ltda, 2000.

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DO PARANÁ. **DCE – Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba: SEED. 2006.

TAHAN, Malba. **As Maravilhas da Matemática**. Rio de Janeiro: Bloch, 1972.

RUBIO, Angel Panadês; FREITAS, Luciana Maria Tenuta de. **Matemática e suas Tecnologias**. São Paulo: IBEP, 2005.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Inez de Souza Vieira. **Matemática Ensino Médio**. 5ª ed. , São Paulo: Saraiva, 2005–2007.