UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MOSAEL JULIANO BROCKER

ISOMETRIAS E CONGRUÊNCIA:
UMA INVESTIGAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Porto Alegre
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MOSAEL JULIANO BROCKER

ISOMETRIAS E CONGRUÊNCIA: UMA INVESTIGAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Elisabete Zardo Búrigo

Porto Alegre
2016

Mosael Juliano Brocker

ISOMETRIAS E CONGRUÊNCIA:

UMA INVESTIGAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Porto Alegre, agosto de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas (Unifra - Santa Maria)

Prof. Dr. Francisco Egger Moellwald (UFRGS)

Profª. Drª. Maria Alice Gravina (UFRGS)

Dedico este trabalho:

À minha mãe, Susete Iracema Brocker, por compreender meus momentos de angústia e pelo apoio constante em minha caminhada.

Ao meu pai, Elio Dirceu Brocker, pelos valores a mim transmitidos que contribuíram para minha formação.

À minha esposa Ana Alice Padilha da Silveira, pela paciência, pelo incentivo nos momentos mais difíceis e por seu amor incondicional.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a meus pais, que da sua maneira humilde, sempre me apoiaram e incentivaram em minhas escolhas, inclusive profissional.

À professora Doutora Elisabete Zardo Búrigo pelo seu profissionalismo e incansável dedicação durante a orientação desta dissertação.

Aos meus colegas professores da Escola Maria Francisca da Silva pelo constante apoio e pela compreensão durante a realização da pesquisa.

Aos meus alunos do nono ano do Ensino Fundamental da Escola Maria Francisca no ano de 2015 que se mostraram dedicados e empenhados na realização das atividades propostas e me ajudaram a pensar em minha prática.

Aos meus amigos que muito comemoraram minha aprovação neste programa de Mestrado e que estiveram sempre ao meu lado durante a elaboração desta dissertação.

E de forma especial, um agradecimento à minha esposa, Ana Alice Padilha da Silveira, que em todos os momentos me incentivou e compreendeu meus momentos de ausência.

Meu muito obrigado a todos! Esse trabalho tem muito de vocês.

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma experiência de abordagem do conceito de congruência de figuras planas, no Ensino Fundamental, por meio de estudo das transformações isométricas. O estudo foi realizado com uma turma de alunos do nono ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal de Parobé, no Rio Grande do Sul. Sob a inspiração do modelo de cooperação investigativa de Ole Skovsmose, foram desenvolvidas atividades de natureza exploratória e investigativa com questões abertas ao diálogo entre os participantes da pesquisa e uso de materiais manipulativos e de um *software* de geometria dinâmica. As soluções propostas pelos alunos e as discussões realizadas durante o desenvolvimento das atividades foram registradas por meio das produções escritas dos alunos, de gravações em áudio e vídeo e de arquivos elaborados no ambiente do *software* GeoGebra. As análises desses registros permitiram concluir que os alunos compreenderam o conceito de congruência de figuras planas por meio da exploração e da discussão sobre as transformações isométricas.

Palavras-chave: Transformações isométricas. Investigações na sala de aula. Geometria Dinâmica. Educação Matemática. Educação Básica.

ABSTRACT

This work presents an experience of an approach of the concept of plane figures, in elementary school, through the study of isometric transformations. This study was conducted with a ninth grade group of students of a public elementary school in the city of Parobé, Rio Grande do Sul. Under the inspiration of the investigative cooperation model of Ole Skovsmose, exploratory and investigative nature activities were developed and open questions were proposed in order to establish a dialogue between the participants in the research. The use of manipulative materials and a dynamic geometry software has also been applied. The solutions proposed by the students and the discussion conducted during the activities development were recorded through written papers, audio and video recordings and files created with GeoGebra software environment. Through the analysis of these records, the conclusion was that the students understood the concept of congruence of plane figures through the exploration and the discussion around the isometric transformations.

Keywords: Isometric transformations. Classroom investigation. Dynamic geometry. Mathematics education. Elementary education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem origem em um desejo de contribuir para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental. Nas escolas em que atuei e atuo observei, a partir das orientações dos livros didáticos, dos planos de estudos e de conversas com colegas, que o ensino de Geometria costuma enfocar as medidas, como cálculos de áreas, perímetros, medição de ângulos, sem preocupação com a construção dos conceitos envolvidos. As propriedades das figuras planas também são usualmente apresentadas sem explorações prévias ou discussões por parte dos alunos.

Confesso que também estava insatisfeito com o modo como eu vinha ensinando Geometria. O conceito de congruência, por exemplo, sempre foi mostrado aos meus alunos como algo pronto, com a apresentação da definição e, a seguir, a exposição de exemplos e proposição de exercícios. Notava que, em geral – tanto nos livros didáticos, quanto nos planos de estudos dos municípios em que lecionei – levam-se em consideração apenas as congruências de triângulos, como se a compreensão das relações de congruência entre figuras pudesse ser construída a partir desses casos.

Considero que a compreensão desse conceito é muito importante, pois por meio das congruências entre polígonos ou entre figuras não poligonais uma variedade de problemas em Geometria podem ser resolvidos. Assim nasceu o interesse por abordar, por meio de uma pesquisa junto a estudantes do Ensino Fundamental, esse conceito geométrico. A pesquisa foi desenvolvida com uma turma de nono ano de uma escola de Ensino Fundamental do município de Parobé, Rio Grande do Sul, composta por dezenove alunos.

Para essa investigação, foi construída uma proposta de estudo das isometrias, acreditando que o caráter dinâmico dessas transformações favoreceria a construção do conceito de congruência das figuras planas. Considerei que o dinamismo poderia ser explorado por meio da manipulação de materiais concretos, propiciando a visualização de que a medidas dos polígonos não se alteram quando se efetuam reflexões em torno de retas, translações, ou, ainda, rotações com diferentes centros e amplitudes. Além disso, ao discutir cada uma dessas isometrias, pretendeu-se abordar outros conceitos geométricos já estudados pelos alunos em anos anteriores, mas cuja compreensão não estava plenamente estabelecida, como ângulos, figuras poligonais, e seus elementos - como vértices, segmentos e ângulos internos.

Em minha prática, enquanto professor de Matemática, venho tentando adotar metodologias diferentes daquelas em que o professor centraliza o papel do conhecimento, cabendo aos alunos apenas a tarefa de reproduzir aquilo que foi “transmitido” pelo educador. Pensando na construção do conceito de congruência, baseado nas isometrias, e na superação de metodologias centralizadas no conhecimento do professor, busquei planejar atividades de natureza exploratória e investigativa. Objetivou-se, dessa maneira, possibilitar que cada aluno pudesse construir os conceitos por meio do diálogo com seus colegas, procurando as soluções para os problemas propostos com a menor intervenção possível do professor. Nesse cenário, foi preciso que o meu papel de professor se tornasse mais de observador e orientador do que de “detentor do saber”.

Levando em consideração a natureza e a proposta de desenvolvimento das atividades, foi preciso adotar uma metodologia de pesquisa na qual pudesse investigar não apenas a aprendizagem dos alunos, mas também minha prática enquanto professor, com o objetivo de aprimorá-la. Considerei que a pesquisa-ação atenderia a esses objetivos.

O estudo foi orientado pela questão norteadora:

– *Como o estudo das isometrias pode contribuir para a construção do conceito matemático de congruência?*

Também foram consideradas as questões seguintes:

– Como desenvolver a aprendizagem das transformações geométricas por meio de uma sequência de atividades exploratórias e investigativas?

– Quais as contribuições e reflexões dos alunos sobre transformações geométricas, ao realizarem essas atividades?

Assim, a pesquisa pretendeu analisar as potencialidades de uma metodologia com atividades exploratórias e investigativas das transformações isométricas para a compreensão do conceito de congruência. Buscou-se abordar as transformações em diferentes contextos, incluindo uma introdução dos alunos ao plano cartesiano.

Cabe esclarecer que a abordagem não pretendeu avançar no estudo das transformações geométricas, apresentando definições rigorosas ou demonstrações das propriedades envolvidas. Todas as atividades da sequência explorada com os alunos foram pensadas como momentos de uma introdução a cada uma das transformações, de modo que eles pudessem realizar experimentações e, a partir daí, pensar no conceito de congruência.

O planejamento da sequência de atividades foi flexível, considerando que em um trabalho de natureza exploratória e investigativa diversas questões não pensadas previamente surgem a partir do diálogo entre os participantes. Assim, foi preciso pensar em modificar algumas atividades quando necessário.

Este texto apresenta o desenvolvimento e os resultados da pesquisa.

No segundo capítulo, são apresentados os referenciais teóricos que embasaram o estudo e as análises posteriores, os critérios que orientaram a construção da sequência de atividades e a caracterização do grupo e da metodologia da pesquisa.

No terceiro capítulo são apresentadas as definições e as principais propriedades das isometrias no plano, como subsídio para a análise das atividades implementadas.

No quarto capítulo são apresentadas todas as atividades desenvolvidas com os alunos, suas produções e as discussões realizadas em torno dessas produções.

No quinto capítulo, apresenta-se uma análise das produções dos alunos e busca-se compreender de que maneira a abordagem adotada contribuiu para a compreensão do conceito de congruência, com base no estudo das isometrias.

As considerações finais apresentam minhas reflexões de todo o estudo realizado e o modo como este trabalho contribuiu para minha prática enquanto professor.

No apêndice 2, encontra-se o produto técnico deste estudo, composto por uma sequência didática para o estudo da congruência de figuras planas por meio das isometrias.

2 PLANEJAMENTO DA PESQUISA

Este capítulo apresenta o planejamento da pesquisa e seus pressupostos. Inicialmente, é apresentado o Modelo de Cooperação Investigativa, proposto por Ole Skovsmose, que inspirou o planejamento das atividades e auxiliou na compreensão das relações dialógicas presentes nas aulas em que essas atividades foram desenvolvidas. Também é apresentada a opção pela realização de uma pesquisa-ação e é descrito o grupo de alunos participante da pesquisa. A seguir, apresenta-se, a discussão sobre as apreensões cognitivas de figuras geométricas, proposta por Raymond Duval (2012), que contribuiu para o planejamento das atividades e para a análise das soluções de algumas atividades apresentadas pelos alunos. Finalmente, é descrita a maneira como as atividades foram planejadas e pensadas.

2.1 MODELO DE COOPERAÇÃO INVESTIGATIVA E DIÁLOGO

Skovsmose (2010) descreve situações em sala de aula nas quais o professor exerce um papel de autoridade máxima e inquestionável. Os erros e os acertos são encarados como sendo absolutos; não há espaço para questionamentos ou opiniões dos alunos. Situações dessa natureza, muito presentes em aulas tradicionais de Matemática, são definidas pelo autor como sendo uma espécie de *absolutismo burocrático*, “que estabelece em termos absolutos o que é certo e o que é errado sem explicitar critérios que orientam tais decisões” (p. 26). Metodologias como essa são fortemente embasadas no *paradigma do exercício*. Nessa concepção, o ensino da Matemática está ligado à resolução de muitos exercícios, preparados muitas vezes por alguém que não pertence àquela realidade escolar. Para Skovsmose (2010),

> esse paradigma tem grande influência na Educação Matemática no que diz respeito à organização das aulas, aos padrões de comunicação entre professores e alunos, bem como ao papel que a Matemática desempenha na sociedade como um todo, por exemplo, como uma função fiscalizadora (exercícios matemáticos encaixam-se perfeitamente em processos de seleção). (*Ibid.*, p. 52)

Ainda de acordo com o autor, “o paradigma do exercício tem sido desafiado de muitas maneiras: pela resolução de problemas, proposição de problemas, abordagens temáticas, trabalho com projetos, etc.” (*Ibid.*, p. 52).

A união de questões abertas ao diálogo com a discussão de suas soluções entre todos os envolvidos em um processo de ensino e de aprendizagem é o que Skovsmose (2010) denomina de Modelo de Cooperação Investigativa (Modelo C-I). Esse modelo é constituído por alguns elementos-chave, destacados a seguir:

1º) *Estabelecer contato*, ou seja, “estar presente e prestar atenção ao outro e suas contribuições, numa relação de respeito mútuo, responsabilidade e confiança” (p. 106);

2º) *Perceber*, que “significa descobrir alguma coisa da qual nada se sabia ou não se tinha consciência antes” (p. 106);

3º) *Reconhecer*, por meio do exame das percepções e ideias, uma nova perspectiva e fazê-la conhecida por todos os envolvidos na investigação;

4º) *Posicionar-se*, que “significa dizer o que se pensa e, ao mesmo tempo, estar receptivo à crítica de suas posições e pressupostos” (p. 112);

5º) *Pensar alto*, quando se expressam pensamentos, ideias e sentimentos durante o processo de investigação;

6º) *Reformular*, ou seja, “repetir o que já foi dito com palavras ligeiramente diferentes ou com um tom de voz diferente [...] Dessa forma, ganha-se mais precisão na argumentação” (p. 114, 115);

7º) *Desafiar*, isto é, “tentar levar as coisas para uma outra direção ou questionar conhecimentos ou perspectivas já estabelecidos” (p. 115).

8º) *Avaliar*, que “pressupõe apoio, crítica e feedback construtivos” (p. 117).

Uma das características do Modelo C-I é o abandono do paradigma do exercício e a adoção de cenários de investigação. Essa “troca” acarreta a saída de uma zona de conforto para a entrada em uma zona de risco, na qual as aulas são mais imprevisíveis, porém com muito mais diálogos. De acordo com Skovsmose (2010),

> consideramos que cenários para investigação estimulam a cooperação investigativa e os padrões de comunicação investigativos, que podem ser entendidos como diálogo. Riscos são uma parte intrínseca do diálogo, com suas consequências positivas e negativas (*Ibid.*, p. 130).

Nessa perspectiva, dialogar consiste em considerar o que o outro pensa e, assim, construir novos significados para o objeto de estudo. Cenários para investigação são baseados em ambientes de diálogo, pois para a realização de uma investigação é necessário considerar três aspectos fundamentais: exploração das perspectivas dos participantes, disposição para abrir mão de uma perspectiva e construção de novas perspectivas.

Em ambientes de cooperação investigativa, o aluno precisa sentir-se à vontade para expor suas opiniões e estar pronto para ouvir a opinião do outro. Assim, sua participação no processo de investigação não pode ser imposta. Para Skovsmose (2010),

> os alunos devem ser convidados para um cenário para investigação, a fim de se tornarem condutores e participantes ativos do processo de investigação. A noção de convite é importante. Um convite pode ser aceito ou não – ele não é uma ordem. Precisa ser feito em cooperação investigativa (*Ibid.*, p. 59).

Com relação ao papel do professor em um ambiente de cooperação investigativa, baseada no diálogo, Skovsmose (2010) considera que,

> em um diálogo, o professor investigativo demonstra uma atitude de curiosidade e maravilhamento diante de tudo que acontece em sala, e as perguntas que ele faz nem sempre têm resposta certa. Isso não quer dizer que ele não conheça algumas respostas muitas vezes. Dessa forma, o ensino e a aprendizagem dialógicos podem ser mantidos [...]. (*Ibid.,* p. 139).

Notamos, assim, que o professor, em um ambiente de cooperação investigativa, também precisa estar disposto a ouvir, muito mais do que falar. Novas hipóteses poderão surgir nas aulas e o gerenciamento do diálogo torna-se essencial para a construção de conhecimento.

Quanto ao papel do computador em cenários de investigação, Skovsmose (2000) aponta que o seu uso estabelece formas de reorganizar o pensamento, mas também pode representar um novo desafio aos professores “tradicionais”:

> os computadores na educação matemática têm ajudado a estabelecer novos cenários para investigação (embora alguns programas fechados tentem eliminar incertezas, ajustando as atividades ao paradigma do exercício). O computador desafiará a autoridade do professor (tradicional) de matemática. Alunos trabalhando, com, por exemplo, geometria dinâmica facilmente encontram possíveis situações e experiências que os professores não previram ao planejarem a aula (*Ibid.,* p. 17).

2.2 UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA DAS RELAÇÕES DE CONGRUÊNCIA

O trabalho investigativo, com atividades nas quais os alunos podem explorar diversas situações, é uma excelente opção para o estudo da Geometria, como argumenta Abrantes (1999):

> fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, desde os níveis escolares mais elementares. Na geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos e em “receitas” para resolver exercícios-tipo (*Ibid.,* p. 4).

Pensando em unir o estudo da Geometria com atividades de natureza investigativa e exploratória, surgiu o interesse na abordagem do conceito matemático de congruência de figuras planas, com base nas transformações isométricas – reflexão, translação e rotação.

Como professor, percebo que, quando os alunos manipulam e experimentam os elementos constituintes de um determinado conteúdo matemático, a compreensão de um conceito relacionado a esse conteúdo pode ser maior. Nesse sentido, a opção pelo uso das isometrias deu-se pelo fato de que são conceitos dinâmicos, que podem ser experimentados, manipulados e testados. Esperava-se que os alunos observassem que as medidas de um polígono não se alteram quando ele é rotacionado, refletido sobre uma reta, ou transladado.

O estudo foi desenvolvido em uma escola municipal de Parobé[1] com uma turma de nono ano do Ensino Fundamental e enfocou a congruência entre polígonos, assunto presente nos planos de estudos do município de Parobé para a disciplina de Matemática. Pretendia-se observar se, após a realização das atividades investigativas das isometrias, os alunos mobilizariam essas noções na análise das congruências de polígonos.

Algumas semanas antes da implementação da sequência, que será descrita em outro capítulo, desenvolvi, com os alunos, uma sequência de atividades para a compreensão do conceito de ângulo, todas baseadas em um processo de exploração e investigação do objeto de estudo. Como a turma de alunos participou das atividades com muita empolgação e dedicação, percebi naquele momento que esses alunos mostraram muito interesse e receptividade por tal metodologia.

2.3 A METODOLOGIA E O GRUPO DE PESQUISA

A turma que participou do estudo, do nono ano do Ensino Fundamental, conta com dezenove alunos, sendo dez meninos e nove meninas. Nenhum desses alunos é repetente do ano que frequenta e a maior parte deles sempre estudou nessa escola, desde a pré-escola.

A escola está situada em um bairro cujos moradores, em geral, são trabalhadores do setor calçadista ou comércio. Os pais dos alunos são bastante comprometidos com a educação de seus filhos e comparecem sempre que necessário à escola.

A maioria dos alunos que concluem o Ensino Fundamental na escola prossegue seus estudos no Ensino Médio. Alguns desses optam por cursos na área técnica, principalmente mecânica, eletrônica, *design* de móveis ou magistério. Como a cidade não conta com cursos

[1] A cidade de Parobé pertence à Região Metropolitana de Porto Alegre e está a cerca de 70 km da capital. Possui uma população aproximada de 55000 habitantes. A colonização da cidade é de origem alemã, mas nas décadas de 70 e 80, em virtude da atividade calçadista, recebeu intensa migração de outras cidades gaúchas e do país.

técnicos de nível médio, esses alunos precisam deslocar-se para cidades vizinhas como Taquara ou Sapiranga para prosseguirem seus estudos. Outra característica do município é que não conta com escolas privadas. Assim, as escolas públicas atendem alunos de diferentes faixas de renda familiar.

Assumi a turma, como professor de Matemática, no mês de fevereiro do ano de 2015, e logo percebi que a maioria dos alunos tinha muita curiosidade em descobrir coisas novas e apresentava muito interesse por aulas que rompem com o paradigma do exercício. Ao comentar sobre a proposta desta pesquisa, todos os alunos mostraram-se contentes e prontamente aceitaram o convite para, juntamente comigo, fazer parte desta "aventura".

Procurei construir o trabalho em concordância com esses interesses e, assim, a metodologia escolhida para a elaboração da pesquisa foi a pesquisa qualitativa por meio da pesquisa-ação. Engel (2000) afirma que "a pesquisa-ação surgiu da necessidade de superar a lacuna entre a teoria e a prática" (*Ibid*, p. 182). Assim, penso que essa metodologia vem ao encontro de tudo o que estava sendo pensado para a prática em sala de aula.

Engel (2000) assim define a pesquisa-ação:

> a pesquisa-ação procura unir a pesquisa à ação ou prática, isto é, desenvolver o conhecimento e a compreensão como parte da prática. É, portanto, uma maneira de se fazer pesquisa em situações em que também se é uma pessoa da prática e se deseja melhorar a compreensão desta (*Ibid.*, p.182).

Por essa definição, percebe-se que na pesquisa-ação não há separação entre o sujeito e o objeto de pesquisa; o que existe é um constante processo de reflexão sobre a intervenção. Nesse sentido, a pesquisa-ação também é cíclica, ou seja, "as fases finais são usadas para aprimorar os resultados das fases anteriores" (ENGEL, 2000, p. 185).

Outra característica da pesquisa-ação, apontada por Engel (2000) é que

> no ensino, a pesquisa-ação tem por objeto de pesquisa as ações humanas em situações que são percebidas pelo professor como sendo inaceitáveis sob certos aspectos, que são suscetíveis de mudança e que, portanto, exigem uma resposta prática. Já a situação problemática é interpretada a partir do ponto de vista das pessoas envolvidas, baseando-se, portanto, sobre as representações que os diversos atores (professores, alunos, diretores etc.) têm da situação (*Ibid.*, p. 184).

Os alunos foram, então, convidados a participar da pesquisa e a concordância dos pais ou responsáveis foi registrada através da assinatura de um termo de consentimento cujo modelo consta do Apêndice 1. Em acordo com esse termo, as identidades dos alunos foram preservadas, e neste texto eles são designados por nomes fictícios.

Tendo como foco essas características da pesquisa-ação, era fundamental a obtenção de diversos registros[2] durante o desenvolvimento da pesquisa, para avaliar a prática e, dessa maneira, poder refletir sobre ela. Assim, reservei momentos para que, ao final de cada aula, pudesse registrar minhas impressões acerca das reações dos alunos e da maneira como a atividade havia corrido. Também gravei diversas aulas em vídeo e/ou áudio e forneci aos alunos atividades nas quais eles pudessem registrar seus pontos de vista acerca dos objetos estudados e discutidos naquelas atividades.

Embora Engel (2000) aponte que os resultados de uma pesquisa-ação dificilmente possam ser generalizados para situações mais amplas – em virtude da amostra da pesquisa ser restrita e do pouco ou nenhum controle sobre variáveis independentes – espero, com essa pesquisa, apontar possibilidades para a construção de conceitos geométricos fundamentais na Educação Básica, embasadas em metodologias diferentes daquelas alicerçadas no paradigma do exercício.

2.4 AS APREENSÕES COGNITIVAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

As compreensões de como as aprendizagens da Matemática são construídas e constituídas são assuntos abordados por pesquisadores da Educação, da Psicologia Cognitiva e áreas afins. O filósofo e psicólogo Raymond Duval propõe a Teoria das Representações Semióticas como um caminho para essas compreensões. Para ele, a representação semiótica de um objeto matemático está intimamente ligada à formação e à aprendizagem matemática:

> a aprendizagem das matemáticas constitui, em evidência, um campo de estudos privilegiado para a análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e mesmo a compreensão de textos. A particularidade da aprendizagem das matemáticas considera que essas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de expressão e representação além da língua natural ou das imagens: sistemas variados de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébrica e lógica que contenham o estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. (DUVAL, 2009, p. 13).

Em Geometria, imagens constituídas por elementos gráficos correspondentes a segmentos e pontos e organizadas segundo determinadas regras, constituem registros de representação semióticas das figuras geométricas. Contudo, para construir um olhar matemático sobre esses registros, é preciso, segundo Bolda (1997), uma exploração visual que

[2] Entendem-se aqui por registros as falas e escritas dos alunos obtidas por meio de gravações em áudio e vídeo ou pelas suas respostas às questões propostas nas atividades.

não se limite à percepção isolada de formas elementares, é preciso “focalizar o olhar sobre outros dados que não são impostos imediatamente ao olhar” (*Ibid.*, p. 25).

A visualização das figuras não resulta, portanto, de uma apreensão imediata e espontânea. Para a autora, visualizar uma figura “se refere à habilidade de representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre informação visual” (*Ibid.*, p. 5).

Em articulação com a Teoria das Representações Semióticas, Duval (2011) estuda a análise cognitiva das figuras, que “diz respeito à maneira de ver que elas [requerem] para que sejamos capazes de utilizá-las na resolução de um problema” (*Ibid.*, p. 85). O autor ainda destaca que

> as figuras geométricas se distinguem de todas as outras representações visuais pelo fato de que existem sempre várias maneiras de reconhecer as formas ou as unidades figurais. Em outras palavras, para ver matematicamente uma figura ou um desenho é preciso mudar o olhar sem que a representação visual no papel ou no monitor seja modificada (*Ibid.*, p. 86).

Para Duval (2012), visualizar uma figura geométrica corresponde a fazer uso das apreensões cognitivas. A *apreensão perceptiva* é imediata e automática; a figura é reconhecida de maneira global, “panorâmica” (BOLDA, 1997, p. 31). A *apreensão discursiva* ocorre quando as propriedades da figura são reconhecidas a partir de elementos que não estão necessariamente indicados na imagem, como em legendas, enunciados de problemas ou hipóteses de teoremas. A *apreensão sequencial* ocorre quando se constrói uma figura por meio de uma sequência de instruções. Para Bolda (1997), “a função da apreensão sequencial de uma figura é, portanto, de reprodução da figura e, neste caso, a apreensão perceptiva funciona apenas como um controle, um termômetro, para determinar se a construção da figura é coerente” (*Ibid.*, p. 32).

Para haver construção de conhecimento matemático, é necessário que ocorra, em primeiro lugar, a apreensão que Duval (2012) denomina de *operatória*. Para o autor, “a apreensão operatória de figuras é centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações” (*Ibid.*, p. 8). Ela ocorre quando o aluno opera mentalmente, modificando uma figura na busca da solução de um problema.

Essas operações ocorrem através de modificações realizadas na figura, que podem ser mereológicas, ópticas ou posicionais. As *modificações mereológicas* são aquelas em que a figura é subdividida em figuras menores, que podem ser novamente combinadas em outra figura. As *modificações ópticas* são usadas quando uma figura é aumentada, diminuída ou deformada ou, ainda, quando é refletida através de um jogo de espelhos ou lentes. Já as *modificações posicionais* ocorrem quando alteramos a posição ou a orientação de uma figura, através de uma rotação ou uma translação. Duval (2011) aponta que

> toda utilização heurística das figuras na resolução de problemas, toda explicação de uma propriedade geométrica com a ajuda de figuras ou mesmo, para algumas, com a manipulação de um material, toda articulação do enunciado de propriedades com uma figura para justificar ou demonstrar uma conjectura dependem inteira e exclusivamente dessas operações figurais (*Ibid.*, p. 90).

Para Duval (2011), todas essas modificações podem ser dadas sem se recorrer a teoremas, definições ou técnicas de construção; isso mostra que a apreensão operatória é independente das operações discursiva e sequencial. Duval (2012) classifica como problemas de nível 1 aqueles para os quais há congruência entre uma apreensão operatória da figura e um tratamento matemático possível. Neste nível, uma apreensão discursiva explícita não é necessária.

Bolda (1997), por outro lado, destaca a proximidade entre a apreensão operatória e a apreensão perceptiva:

> mesmo se esta mobilização não se faz nos mesmos níveis de tratamento, pois, num caso, o tratamento é automático, isto é, imediato na escala do controle consciente, no outro, o tratamento consiste em operações efetuadas conscientemente, de maneira tateante, tomando um tempo que pode variar consideravelmente. Contudo, todas as duas mobilizam as mesmas leis e os mesmos parâmetros de organização de elementos de uma figura que permitem reconhecer um objeto em 2D ou em 3D (*Ibid*, p. 37).

Neste estudo, recorremos à distinção entre as apreensões cognitivas das figuras, conforme descritas por Duval (2011; 2012), como suportes para a compreensão dos processos de construção de conceitos matemáticos por parte dos alunos, em especial do conceito de congruência, considerando que a apreensão operatória, aliada à apreensão perceptiva, é condição para a construção de conhecimento matemático.

A importância que os computadores assumem nos processos citados anteriormente é destacada por Duval (2011). Segundo o autor, “os computadores não constituem um novo registro de representação” (*Ibid*, p. 137) pelo fato de que as representações exibidas na tela do computador são as mesmas que aquelas produzidas no papel. Porém, dois aspectos fundamentais precisam ser considerados.

Primeiramente, os computadores aceleram o tratamento das informações. Para Duval (2011),

> eles exibem no monitor tão rapidamente quanto a produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual. Obtemos, imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter à mão livre após, talvez, vários dias de escrita e cálculos ou construção de figuras (*Ibid.*, p. 137).

Em segundo lugar, as representações presentes na tela do computador são manipuláveis como objetos reais. Duval (2011) aponta que "podemos deslocá-las, fazê-las rodar, ou estendê-las a partir de um ponto. Esse aspecto 'dinâmico' é apenas uma consequência da potência ilimitada do tratamento" (*Ibid.*, p. 137).

2.5 PESQUISAS SOBRE O ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Para a realização da pesquisa, foram consultados estudos de autores brasileiros que contemplam o tema de transformações geométricas aplicadas ao ensino na escola básica.

Rodrigues (2012), em sua dissertação de mestrado, desenvolveu atividades sobre transformações geométricas com dois grupos: trinta e seis alunos do sexto ano do Ensino Fundamental e vinte e nove professoras dos anos iniciais. Com ambos os grupos, o objetivo foi analisar quais as potencialidades do ensino das transformações geométricas na Educação Básica. Após a elaboração e desenvolvimento de atividades de reflexão, translação e rotação, específicas para cada grupo, a pesquisadora observou que as professoras demonstraram dificuldades na nomenclatura e na realização dos movimentos, o que a autora atribui "à sua formação profissional, com pouca ênfase em Matemática" (p. 146). Nas atividades propostas aos alunos, Rodrigues (2012) observou que inicialmente as estranharam e não as consideravam como pertencentes à disciplina de Matemática, mas que essa visão foi desaparecendo com o tempo. Para a autora,

> o trabalho com transformações permitiu que se estabelecesse um outro modo de pensar Matemática, mais flexível, mais criativo e, principalmente com maior autonomia. E isso se refletiu na continuidade do trabalho em Matemática com outros conteúdos no decorrer do ano letivo (*Ibid.*, p. 147).

Mega (2001) estudou as rotações com um grupo de alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. O autor destaca a relação entre a congruência e as transformações geométricas, mas enfoca apenas os casos de congruência de triângulos e faz um estudo da presença do conteúdo de transformações geométricas no currículo escolar em alguns países, inclusive no Brasil. Após o desenvolvimento de uma série de atividades acerca da rotação no plano, Mega (2001) conclui que o centro de rotação é o elemento dessa isometria em relação ao qual os alunos mais apresentam dificuldades. O autor também defende que o ensino das isometrias deve ser estimulado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, de uma maneira mais intuitiva e contextualizada, e que em todos os níveis de ensino o aspecto dinâmico das isometrias é um elemento que auxilia na compreensão das relações implícitas, em especial da rotação.

Refatti (2012) utilizou os *softwares* GeoGebra e Cabri 3D para a compreensão do conceito de transformação geométrica junto a um grupo de alunos de uma turma do curso de Licenciatura em Matemática. A autora concluiu que muitos alunos tinham pouco conhecimento do assunto, em virtude de sua formação escolar, e que o uso dos *softwares* contribuiu para a compreensão dos conceitos de transformações geométricas, pois estes eram construídos de maneira dinâmica.

Algumas atividades desenvolvidas nesta pesquisa foram inspiradas nesses trabalhos. Contudo, o objetivo principal deste trabalho foi a construção do conceito de congruência com base nas isometrias no plano. Assim, além de discutir aspectos particulares de cada uma das isometrias, pretende-se buscar suas relações com a congruência de polígonos quaisquer, não somente de triângulos.

2.6 O PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES

O estudo foi organizado de modo que os alunos explorassem as isometrias planas – em especial a reflexão, a translação e a rotação – antes de se apresentar o conceito de congruência entre polígonos.

Aqui, cabe uma observação. Podemos definir a congruência entre duas figuras planas como uma relação em que uma delas é imagem da outra por uma isometria; o que equivale a dizer que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos dessas figuras que preserva todas as distâncias, isto é, de modo que a distância entre dois pontos quaisquer A e B de uma delas é igual à distância entre os pontos correspondentes na outra. Para os polígonos, essa congruência pode ser analisada com base em um número finito de comparações envolvendo as medidas de seus lados e ângulos internos: se dois polígonos são convexos e possuem o mesmo número de lados, tendo os lados e ângulos correspondentes com as mesmas medidas, podemos afirmar, com base nos casos de congruência de triângulos, que eles são congruentes. Para os casos de polígonos não convexos, os critérios são análogos.

A definição de congruência mencionada acima abrange todas as figuras planas, poligonais ou não, entretanto a abordagem usual dos livros didáticos enfatiza os critérios que permitem verificar a congruência entre polígonos examinando lados e ângulos. O mesmo ocorre com o plano de estudos do município de Parobé. Este estudo também enfocou os polígonos, entretanto, por meio das isometrias, buscou-se enfatizar as relações de congruência, e não os critérios usados para verificá-la, nesses casos particulares.

Considerando o dinamismo das isometrias, optou-se pelo uso de um *software* de geometria dinâmica que pode auxiliar muito nesse trabalho. O GeoGebra[3], com sua plataforma bastante intuitiva e com recursos que permitem manipulações dos objetos matemáticos, é uma ferramenta que se apresenta como uma possibilidade para experimentações e para testar hipóteses, favorecendo análises das propriedades geométricas das isometrias.

Outra opção para o desenvolvimento das atividades foi a do uso de materiais manipulativos. Segundo Bonadiman (2007, p. 52), "entende-se por materiais manipulativos toda espécie de material que possa ser manipulado com a finalidade de promover compreensão ou auxiliar na resolução das atividades propostas". Assim, papéis quadriculados, geoplanos, espelhos e bandeirinhas feitas com palitos de dente foram usados com o intuito de contribuir para a compreensão das características das isometrias.

Como a abordagem do plano cartesiano está contemplada nos planos de estudo da turma na qual a sequência foi desenvolvida, também se pensou em considerar esse contexto para análises de determinadas propriedades das isometrias, em especial da reflexão e da translação. Pretendia-se, além disso, verificar se a introdução das coordenadas cartesianas poderia facilitar a compreensão dessas propriedades.

Para abordar a reflexão, primeira das isometrias desenvolvidas nas atividades, o uso dos espelhos foi considerado como um material manipulativo muito útil, visto que ele permite, através da imagem refletida de um objeto, ativar a apreensão perceptiva. Assim, as primeiras características dessa isometria podem ser percebidas. Em uma segunda etapa, os alunos exploraram a reflexão no GeoGebra.

A ideia inicial para a abordagem da translação seria a utilização de polígonos em papel, que sofreriam deslocamentos sobre um plano. Mas não é tão simples efetuar esses deslocamentos garantindo que as figuras não sofram também uma rotação, o que descaracterizaria essa transformação. Desse modo, a opção foi de estudar a translação tendo o plano cartesiano como um auxílio. Cada vértice de um polígono foi descrito por um par de coordenadas cartesianas e através de operações de adição ou subtração de uma quantidade fixa, realizadas para cada abscissa e/ou ordenada, a translação pôde ser visualizada por meio

[3] O GeoGebra é um *software* livre que permite construções geométricas apuradas e, consequentemente, é uma ferramenta poderosa no estudo da Geometria. Pode ser obtido gratuitamente no *site*: https://www.GeoGebra.org/download.

de sua decomposição ou, ao contrário, como composição de uma translação vertical e uma horizontal.

Na abordagem da isometria denominada rotação, o uso de materiais manipulativos foi pensado por acreditar que essa transformação poderia gerar muitas dúvidas, em virtude do maior número de elementos a serem analisados, como centro, amplitude e sentido da rotação. Assim, confeccionei bandeirinhas – com auxílio de palitos de dente e cartolina – similares às presentes em desenho nas atividades em papel. Esses objetos deveriam ser girados de acordo com certas amplitudes e diferentes centros e sentidos de rotação. Objetivou-se, desse modo, que os alunos considerassem todos esses elementos da rotação como sendo essenciais para uma boa definição dessa isometria.

O desenvolvimento da sequência de atividades foi pensado de modo a incentivar cada aluno a expressar o que compreendeu acerca dos objetos estudados, sem preocupação com o fato de estar sendo avaliado. Dessa maneira, cada atividade foi planejada com a intenção de ser um meio através do qual o aluno pudesse registrar o que o que percebeu naquele momento, e escrever com suas palavras as conclusões às quais chegou e expressar-se oralmente sempre que se sentisse à vontade. Para isso, as questões propostas aos alunos não continham "respostas corretas e inquestionáveis"; o importante era analisar o que os alunos responderam e, com base nessas respostas, refletir sobre sua compreensão acerca do assunto tratado. Também se buscou a superação do absolutismo burocrático e, consequentemente, do paradigma do exercício, ao propor questões cujas respostas são "abertas" à expressão de cada aluno e que podem ser discutidas entre eles. Assim, buscou-se que a solução de cada questão fosse resultado de um processo de cooperação e discussão de aluno com aluno e de aluno com o professor.

O desenvolvimento das atividades da sequência ocorreu em dois locais diferentes: na sala de aula e no Laboratório de Informática da escola. Em ambos, os alunos realizaram as atividades organizados em duplas ou trios. O objetivo disso foi que em todos os momentos eles pudessem discutir suas ideias com seus colegas. A preocupação foi, desde a primeira atividade, "dar voz" a cada aluno, deixando-os à vontade para exporem suas diferentes opiniões e estabelecerem o diálogo. Assim, buscou-se contemplar dois aspectos do diálogo: a *realização de uma investigação*, na qual "os participantes desejam descobrir algo – eles querem obter conhecimentos e novas experiências" (SKOVSMOSE, 2010, p. 123) e a *promoção da igualdade* que "inclui lidar com a diversidade e as diferenças" *(Ibid.*, p. 131).

Muitas atividades foram entregues para os alunos na forma de um roteiro, incluindo instruções para a realização das atividades e questões a serem respondidas. Esse roteiro era previamente organizado pelo professor, mas sempre houve espaço para novas questões serem propostas e para a criatividade de cada um ao buscar as soluções para as questões já formuladas. Skovsmose (2010) destaca que “participar de um diálogo é também uma forma de ação e produção de significado mediante o uso da linguagem. Dialogar significa agir em cooperação” (*Ibid.,* p. 133). Assim, a preocupação no planejamento dessas atividades foi que as respostas dos alunos às questões entregues, em sua maioria expressas na língua natural, pudessem ser fruto de muitas discussões e trocas de ideias entre os grupos.

3 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO: AS ISOMETRIAS

Neste capítulo, são abordadas, do ponto de vista matemático, as conexões entre as transformações geométricas isométricas, que conservam as distâncias, e o conceito de congruência de figuras planas.

A proposta deste capítulo não é a de apresentar uma abordagem a ser adotada com os estudantes da Educação Básica. A leitura das definições e das demonstrações pressupõe uma formação matemática mais avançada, incluindo a familiaridade com algumas noções, linguagens e argumentações.

Inicialmente, são apresentadas definições formais das isometrias planas que foram desenvolvidas com os alunos: reflexão, translação, rotação. A seguir, são discutidos os resultados das composições entre essas isometrias. Os resultados mais importantes do capítulo são o Teorema de Classificação das Isometrias Planas e seu corolário. O Teorema mostra que a congruência entre duas figuras planas pode ser descrita através de, no máximo, três reflexões. Isto é, se duas figuras planas são congruentes, uma delas é a imagem da outra segundo uma composição de uma, duas ou três reflexões. O corolário é uma consequência do Teorema e dos resultados conhecidos sobre as composições de isometrias: a congruência entre duas figuras planas sempre pode ser descrita através de uma reflexão, uma translação, uma rotação ou uma reflexão deslizante (reflexão seguida de translação).

O leitor que já conhece esses resultados pode dispensar a leitura do capítulo; aquele que preferir, poderá consultá-lo a qualquer tempo, sem necessariamente seguir a ordem de apresentação deste texto, uma vez que a investigação realizada com os alunos, relatada no próximo capítulo, segue outra lógica.

Consideramos, de qualquer modo, que a compreensão desses resultados é importante para o professor pesquisador que desejar estudar o tema. Eles também mostram a relevância do estudo da reflexão, translação e rotação, uma vez que todas as relações de congruência podem ser descritas por meio dessas isometrias ou de composições entre elas.

As definições apresentadas no texto foram extraídas de Rezende e Queiroz (2008), Tinoco (2012), Wagner (1993) e Mello e Watanabe (2011).

3.1 TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

Definição 1. Uma transformação no plano é uma função bijetora do conjunto dos pontos do plano sobre si mesmo. Se $\mathcal{F}$ é uma figura contida no plano, a *imagem de* $\mathcal{F}$ *pela* *transformação T* é definida como T($\mathcal{F}$) = {T(P), P $\in$ $\mathcal{F}$}. (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p. 215).

Para Tinoco (2012),

> uma transformação geométrica é uma função que faz corresponder a cada ponto do plano, um novo ponto do plano; normalmente exige-se que essa função seja bijetiva (cada ponto do plano é a imagem de um e um só ponto do plano), e que preserve as figuras geométricas: por exemplo a imagem de um triângulo seja ainda um triângulo, e a imagem de uma reta seja uma reta (*Ibid.*, p. 30).

A pesquisa desenvolvida com os alunos tratou das **isometrias**, isto é, das transformações que preservam distâncias, pois por meio delas buscou-se construir o conceito de congruência entre polígonos.

3.2 ISOMETRIAS E CONGRUÊNCIA

A definição a seguir está de acordo com Rezende e Queiroz (2008).

Definição 2. *Isometrias*, ou *movimentos rígidos*, são transformações geométricas que preservam distâncias.

Seja T uma transformação geométrica no plano. T é uma isometria se e somente se, para qualquer par de pontos *A* e *B* do plano, sendo T(*A*) = *A'* e T(*B*) = *B'*, temos *AB* = *A'B'*.

Tinoco (2012) aborda o conceito de congruência a partir das isometrias, que é o objetivo principal deste trabalho.

Definição 3. As figuras F_1 e F_2 dizem-se *isométricas* ou *congruentes*, se e só se existir uma isometria φ que transforme F_1 em F_2, ou seja,

$$F_2 = \varphi\,[F_1].$$

Deste modo, se for aplicada uma transformação geométrica a uma figura F_1 e se a figura resultante F_2 for congruente com F_1, então a transformação geométrica é uma isometria. Reciprocamente, o resultado da aplicação de uma isometria é uma figura congruente com a original.

Rezende e Queiroz (2008) também abordam o conceito de congruência com base nas isometrias.

Definição 4. Duas figuras $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ no plano são congruentes se existe uma isometria tal que $\mathcal{G}$ é imagem de $\mathcal{F}$ por essa isometria.

Definição 5. Chamamos de *isometria identidade* e denotamos por φ_I, aquela que associa cada ponto *A* do plano ao próprio ponto *A*, ou seja,

$$\varphi_I\,[A] = A.$$

Na sequência de atividades proposta neste trabalho, optou-se por abordar com os alunos as isometrias *reflexão, translação* e *rotação.*

Vejamos as definições de cada uma dessas isometrias e, a seguir, alguns teoremas acerca de composições de isometrias, concluindo com o Teorema da Classificação das Isometrias Planas, fundamental na compreensão das transformações isométricas.

3.2.1 Reflexão em torno de uma reta

Definição 6. Dada uma reta *r*, uma *reflexão* em torno de *r* é a transformação que associa a cada ponto *P* do plano um ponto *P'*, de modo que a reta *r*, chamada de *eixo de reflexão*, seja mediatriz do segmento *PP'*.

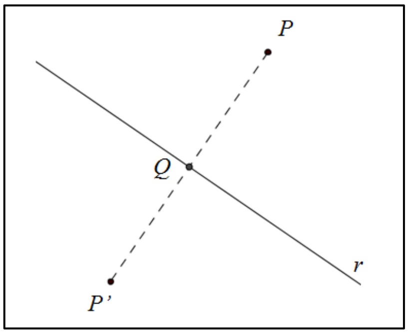


Figura 1 – Reflexão do ponto *P* em torno da reta *r*.
Fonte: construção realizada pelo autor.

A figura 1 ilustra a reflexão de um ponto P em torno de uma reta *r*: temos que $\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q}$ e $\overline{PP'} \perp r$.

Denotaremos por $\Phi_r(P)$ a reflexão do ponto *P* em torno da reta *r*.

Rezende e Queiroz (2008, p. 218) apresentam algumas propriedades da reflexão em torno de uma reta *r*.

Teorema 1. Dados uma reta *r* e um ponto *P* do plano, para a reflexão em torno da reta *r*, denotada por Φ_r, valem as propriedades:

a) $\Phi_r(P) = P$ se e somente se *P* é ponto de *r*.
b) Se *s* é uma reta perpendicular a *r*, então $\Phi_r(s) = s$.
c) $\Phi_r(\Phi_r(P)) = P$, para todo ponto *P* do plano.

Segue breve demonstração de cada um dos itens.

a) $\Phi_r(P) = P$ se e somente se *P* é ponto de *r*.

Se *P* é um ponto de *r*, então a distância de *P* a *r* é nula. Sendo assim, a distância de sua imagem *P'* a *r* também é nula. Chamando de *Q* o ponto de intersecção do segmento $\overline{PP'}$ com a reta r, temos que os pontos P, P' e Q são colineares. Mas como as distâncias de P e P' à reta r são nulas, então $P = P' = Q$.

Por outro lado, suponhamos que $\Phi_r(P) = P$. Então, a distância de $\Phi_r(P) = P'$ a P é nula e, portanto, a intersecção do segmento $\overline{PP'}$ com a reta r é o próprio ponto P. Então, P pertence à reta r.

b) Se s é uma reta perpendicular a r, então $\Phi_r(s) = s$.

Se s é uma reta perpendicular à reta r, então a imagem A' da reflexão, em torno de r, de qualquer ponto A pertencente a s, estará sobre s, visto que r é mediatriz do segmento $\overline{AA'}$ e dado que por um ponto qualquer passa uma única perpendicular a uma reta dada.

c) $\Phi_r(\Phi_r(P)) = P$, para todo ponto P do plano.

Seja P' a imagem da reflexão do ponto P em torno de r. Temos assim que r é mediatriz do segmento $\overline{PP'}$. Além disso, $d(P,r) = d(P',r) = k$. Seja P'' a imagem da reflexão do ponto P' sobre r. Assim, r também é mediatriz de $\overline{P'P''}$ e $d(P',r)=\mathrm{d}(P'',r)=k$. Dessa maneira, temos que $P''=P$.

3.2.2 Translação por um vetor

Antes de discutirmos esta isometria, vamos apresentar uma definição de vetor que está de acordo com Mello e Watanabe (2011).

Definição 7. Dado o segmento orientado AB, chama-se **vetor** AB, e escreve-se $\overrightarrow{AB}$, ao conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB, isto é, os segmentos que têm o mesmo comprimento, direção e sentido que AB. Cada um dos segmentos orientados equipolentes a AB será um representante de $\overrightarrow{AB}$.

A definição a seguir está de acordo com Tinoco (2012).

Definição 8. Dado um vetor $\overrightarrow{AB}$, a *translação* associada ao vetor $\overrightarrow{AB}$ é a transformação que associa a qualquer ponto P do plano um ponto P' tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PP'}$ e os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{PP'}$ são paralelos.

Se o ponto P não for colinear com os pontos A e B, então os pontos A, B, P e P' formam um paralelogramo, como ilustrado na figura 2.

Denotaremos a translação de um ponto P, associada ao vetor $\vec{v}$, por $\vartheta_v(P)$.

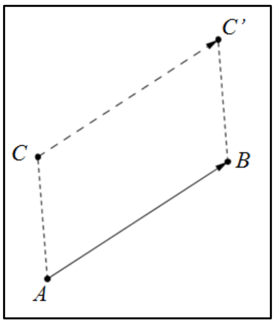


Figura 2 – Translação do ponto *C* determinada pelo vetor $\overrightarrow{AB}$.
Fonte: construção realizada pelo autor.

3.2.3 Rotação

Para definir rotação, vamos necessitar das noções de **ângulo** e de **ângulo orientado**.

De acordo com Rezende e Queiroz (2008),

> um **ângulo** é a união de duas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semirretas AB e AC então essas semirretas são chamadas *lados* do ângulo, e o ponto A é chamado *vértice* do ângulo (*Ibid.*, p. 21)

Ainda segundo os mesmos autores, um **ângulo orientado** é aquele "no qual estão bem determinados seu lado inicial, que é chamado *origem do ângulo*, e seu lado final, a *extremidade*" (*Ibid.*, p. 225).

Na figura 3, temos o ângulo $M\hat{O}N$, no qual foi escolhida a semirreta $\overrightarrow{OM}$ para seu lado inicial, e a semirreta $\overrightarrow{ON}$, para o lado final. Desse modo, o ângulo está orientado de $\overrightarrow{OM}$ para $\overrightarrow{ON}$ e o denotamos por $M\hat{O}N$.

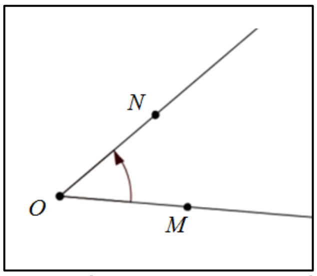


Figura 3 – Ângulo orientado $M\hat{O}N$.
Fonte: construção realizada pelo autor.

Definição 9. Dados um ponto *O* e um ângulo θ do mesmo plano, a *rotação* de centro *O* e ângulo θ é a transformação geométrica que associa a cada ponto *P* do plano, distinto de *O*, o ponto *P'* de modo que o ângulo orientado *POP'* seja congruente a θ e as medidas dos segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{OP'}$ sejam congruentes.

Denotaremos a rotação de centro O e amplitude θ do ponto P por $\Delta_{O,\theta}(P)$.

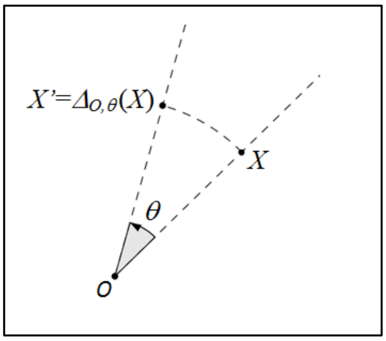


Figura 4 – Rotação de centro O e amplitude θ que transforma X em X'.
Fonte: construção realizada pelo autor.

3.3 COMPOSIÇÕES DE ISOMETRIAS[4]

A composição de isometrias acontece quando a aplicação de uma isometria é seguida da aplicação de outra isometria aplicada nas figuras resultante da primeira. O teorema a seguir, que se encontra em Tinoco (2012), garante que a composição de isometrias também é uma isometria.

Teorema 2. O resultado obtido quando se compõem isometrias é uma isometria.

Demonstração: Sejam Ω_1 e Ω_2 duas isometrias. Apliquemos a isometria Ω_1 aos pontos A e B do plano. Se A' e B' são imagens, respectivamente de A e B pela isometria Ω_1, então, pela definição de isometria, temos que $d(A,B) = d(A',B') = k$. Agora, apliquemos a isometria Ω_2 aos pontos A' e B'. Se A'' e B'' são as imagens, respectivamente de A' e B' pela isometria Ω_2, então $\mathrm{d}(A',B') = \mathrm{d}(A'',B'') = k$. Sendo assim, a composição das isometrias Ω_1 e Ω_2, denotada por $\Omega_2 \circ \Omega_1$, é uma isometria, pois preserva as distâncias entre quaisquer dois pontos do plano.

Passemos agora a analisar algumas composições de isometrias.

3.3.1 Composição de translações

Conforme já exposto neste capítulo, a translação caracteriza-se por um vetor que a define. Sendo assim, quando se compõem duas ou mais translações, basta encontrar o vetor translação da composição para defini-la.

Consideremos $\vartheta_v\,(A)$ a translação de um ponto A qualquer do plano pelo vetor v e $\vartheta_u\,(A')$, a translação de um ponto qualquer A' do plano pelo vetor u. Assim, temos que:

---

[4] Neste trabalho, usaremos a notação de composição de isometrias apresentada por Wagner (1993). Nesta notação, temos que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

$$\vartheta_v\,(A) = A + \vec{v}$$

$$\vartheta_u\,(A') = A' + \vec{u}$$

A isometria composta, $(\vartheta_v \circ \vartheta_u)(A)$ é dada por:

$$(\vartheta_v \circ \vartheta_u)(A) = \vartheta_v\,(\vartheta_u(A)) = \vartheta_v\,(A + \vec{u}) = (A + \vec{u}) + \vec{v}$$

Considerando que $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$, temos que:

$$(\vartheta_v \circ \vartheta_u)(A) = A + (\vec{u} + \vec{v})$$

Esse resultado nos mostra que a composição de duas translações é também uma translação, cujo vetor é a soma dos vetores das translações que a compõem.

O mesmo raciocínio pode ser expandido para *n* translações, cada uma definida por um vetor.

Na figura 5 temos o triângulo *ABC* que é transformado no triângulo *A'B'C'* por uma translação de vetor $\vec{v}_1$. A seguir, o triângulo *A'B'C'* é transformado no triângulo *A''B''C''* por uma translação de vetor $\vec{v}_2$. Notemos que o vetor $\vec{v}_3$, que transforma o triângulo *ABC* no triângulo *A''B''C''*, é a soma dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

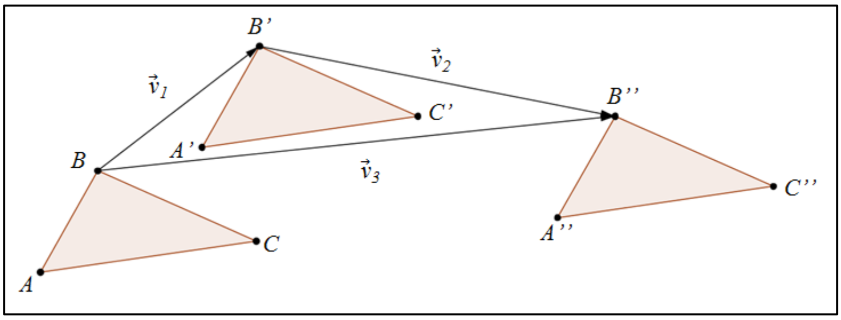


Figura 5 – Composição de duas translações.
Fonte: construção realizada pelo autor.

Vamos analisar a composição de translações no caso em que $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$.

Sejam $\vartheta_1\,(A) = A + \vec{v}_1$ e $\vartheta_2\,(A') = A' + \vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$. Assim,

$$(\vartheta_2 \circ \vartheta_1)(A) = \vartheta_2\,(\vartheta_1(A)) = \vartheta_2\,(A + \vec{v}_1) = (A + \vec{v}_1) + \vec{v}_2 = A + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2).$$

Como $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$, a última igualdade fica escrita da seguinte maneira:

$$(\vartheta_2 \circ \vartheta_1)(A) = A + (\vec{v}_1 - \vec{v}_1) = A + \vec{0} = A.$$

Isso nos mostra que a composição de duas translações ϑ_1 e ϑ_2, determinadas, respectivamente, pelos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, no caso em que $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$, é a identidade.

3.3.2 Composição de duas reflexões em torno de retas concorrentes

Teorema 3. Seja $(\Phi_s \circ \Phi_r)(A)$ a isometria composta por duas reflexões sucessivas Φ_r e Φ_s do ponto *A*, em torno de retas concorrentes *r* e *s*, respectivamente. A isometria resultante é uma rotação, com centro no ponto de intersecção das duas retas e de amplitude igual ao dobro do menor ângulo entre elas.

Demonstração: Sejam r e s duas retas que se interceptam no ponto O e que formam um ângulo α.

1º caso: Seja A um ponto qualquer do plano que não pertence a r nem a s, A' sua imagem refletida em torno da reta r e A'' a imagem do ponto A' refletido em torno da reta s. Seja P o ponto de intersecção do segmento de reta AA' com a reta r e P' o ponto de intersecção do segmento $A'A''$ com a reta s. Por definição, $\overline{AP}\equiv\overline{A'P}$. Como uma isometria preserva distâncias, temos que $\overline{OA}\equiv\overline{OA'}$. Sendo assim, o triângulo AOA' é isósceles e a reta r, que é mediatriz do segmento AA' também é bissetriz do ângulo $A\hat{O}A'$. Logo, $A\hat{O}P\equiv A'\hat{O}P=\theta$. Usando raciocínio análogo, $\overline{A'P'}\equiv\overline{A''P'}$ e $A'\hat{O}P'\equiv A''\hat{O}P'=\beta$. A figura 6 ilustra esta situação.

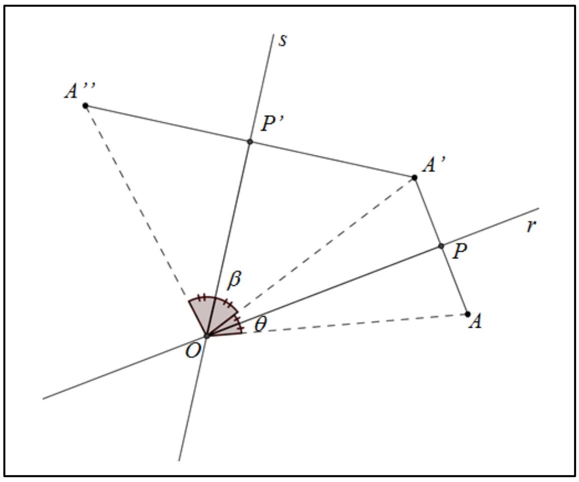


Figura 6 – Composição de duas reflexões do ponto A em torno das retas *r* e *s*.
Fonte: construção realizada pelo autor.

Portanto, o ângulo orientado $P\hat{O}P'$ de amplitude $\alpha = \theta + \beta$, transforma a reta r na reta s por meio da rotação $\Delta_{O,\alpha}$. Além disso, $(\Phi_s \circ \Phi_r)(A) = \Phi_s[\Phi_r(A)] = A''$.

Temos ainda que $A\hat{O}A'' = A\hat{O}A' + A'\hat{O}A'' = 2.P\hat{O}P' = 2\alpha$ e $\overline{OA''} \equiv \overline{OA'} \equiv \overline{OA}$.

2º caso: Se $A \in r$, teremos que $A' \in r$. A reflexão em torno de s transformará A' em A'', de modo que $\overline{A'O}\equiv\overline{A''O}$. O ângulo orientado $A'\hat{O}A''$ terá amplitude 2α, pois α é a medida do menor ângulo entre r e s.

3º caso: Se $A \in s$, então o ângulo orientado $A\hat{O}A'$ terá amplitude -2α. Já o ângulo orientado $A'\hat{O}A''$ terá amplitude 4α. Dessa maneira, o ângulo orientado $A\hat{O}A''$ terá amplitude 2α.

Sendo assim, podemos concluir que $(\Phi_s \circ \Phi_r)(A) = \Delta_{O,2\alpha}(A)$.

3.3.3 Composição de duas reflexões em torno de retas paralelas

Teorema 4: Seja $(\Phi_s \circ \Phi_r)(A)$ a isometria composta por duas reflexões sucessivas Φ_r e Φ_s do ponto *A*, em torno, respectivamente, da reta *r* e da reta *s*, sendo *r* e *s* paralelas. A isometria resultante é uma translação por um vetor perpendicular às retas e de comprimento igual ao dobro da distância entre elas.

Demonstração. Sejam *r* e *s* duas retas paralelas, *A'* a imagem de um ponto qualquer *A* refletido em torno da reta *r*, por Φ_r e *A''* a imagem do ponto *A'* refletido em torno da reta *s*, por Φ_s. Temos que $A'' = \Phi_s(A') = \Phi_s(\Phi_r(A)) = (\Phi_s \circ \Phi_r)(A)$.

Chamemos de *P* o ponto de intersecção do segmento $\overline{AA'}$ com a reta *r* e de *P'* o ponto de intersecção do segmento $\overline{A'A''}$ com a reta *s*. Por definição, $\overline{AP} \equiv \overline{A'P}$ *e* $\overline{A'P'} \equiv \overline{A''P'}$. Além disso, $\overline{AA'}$ é perpendicular a *r* e $\overline{A'A''}$ é perpendicular a *s*. Assim, *A*, *A'* e *A''* são colineares. Consideremos o vetor $\vec{v} = 2\overrightarrow{PP'}$. Então, o vetor $\vec{v}$ é perpendicular às retas *r* e *s*, pois os pontos *P* e *P'* pertencem ao segmento de reta $\overline{AA''}$ que é perpendicular às retas *r* e *s*. Ainda, $\vec{v} = 2\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AA''}$, como veremos a seguir.

1º caso: O ponto *A* não pertence a *r* nem a *s*. As figuras 7 e 8 ilustram duas situações possíveis: *A'* está entre *P* e *P'*; *A* está entre *P* e *P'*.

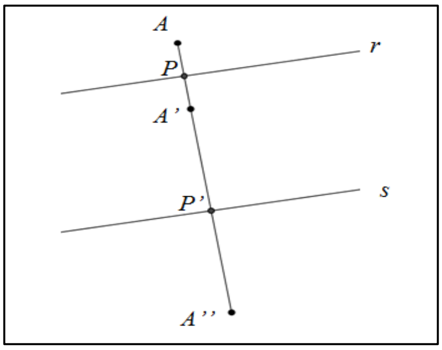


Figura 7 – Composição de duas reflexões em torno de retas paralelas: situação 1.
Fonte: construção realizada pelo autor.

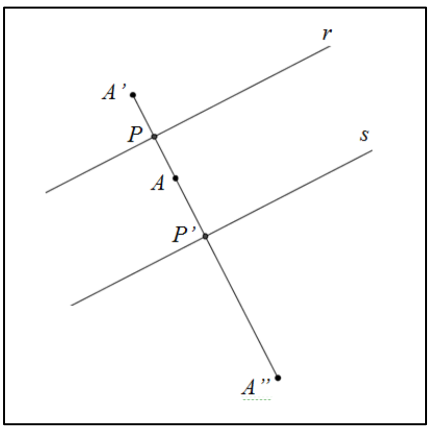


Figura 8 – Composição de duas reflexões em torno de retas paralelas: situação 2.
Fonte: construção realizada pelo autor.

Em ambas as situações, temos que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'P'}$, e, também, que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA'}$ e $\overrightarrow{A'P'} = \overrightarrow{P'A''}$. Portanto:

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'P'} + \overrightarrow{A'P'} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'P'} + \overrightarrow{P'A''} = \overrightarrow{AA''}$$

2º caso: $A \in r$. Nesse caso, $A' = \Phi_r(A) = A = P$. Temos que $\overrightarrow{AA''} = \vec{v}$, pois $d(A,P') = d(P',A'') = d(P,P')$.

3º caso: $A \in s$. Nesse caso, $\overrightarrow{AA'} = -\vec{v}$ e $\overrightarrow{A'A''} = 2\vec{v}$. Assim, $\overrightarrow{AA''} = \vec{v}$.

Logo, $\vartheta_v(A) = A + \vec{v} = A + \overrightarrow{AA''} = A''$.

3.3.4 Composição de duas rotações com o mesmo centro

Consideremos duas rotações sucessivas (no mesmo sentido) com centro comum O e com amplitudes iguais a α e β, respectivamente. Estas duas rotações são equivalentes a uma única rotação com centro O e ângulo $\alpha + \beta$. Esse resultado é imediato, pois dado um ponto A do plano, a rotação $\Delta_{O,\alpha}(A)$ o associará ao ponto A' e, assim, teremos que $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$. Da mesma maneira, a rotação $\Delta_{O,\beta}(A')$ associará o ponto A' ao ponto A'', de modo que $\overline{OA'} \equiv \overline{OA''}$. Assim, $\overline{OA} \equiv \overline{OA''}$ e o ângulo $A\hat{O}A''$ é orientado, com amplitude $\alpha + \beta$ (Figura 9).

Raciocínio análogo se usa no caso em que os ângulos α e β têm orientações opostas.

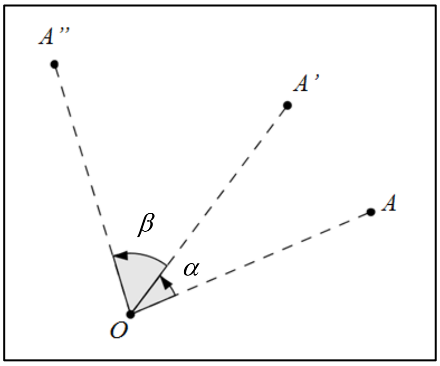


Figura 9 – Composição de duas rotações de mesmo centro.
Fonte: construção realizada pelo autor.

3.3.5 Composição de duas rotações com centros diferentes

Conforme já visto anteriormente, a composição de duas reflexões sobre retas concorrentes no ponto O pode ser substituída por uma rotação de centro O e amplitude igual ao dobro do ângulo formado entre as retas. Reciprocamente, uma rotação de centro O e amplitude α pode ser substituída por uma composição de duas reflexões em retas concorrentes em O, de modo que o ângulo formado entre essas retas seja $\frac{\alpha}{2}$.

Consideremos duas rotações: $\Delta_{O,\alpha}$, de centro O e amplitude α e $\Delta_{O',\beta}$, de centro O' e amplitude β. Podemos substituir $\Delta_{O,\alpha}$ por uma composição de duas reflexões de retas concorrentes, r e s, em O e amplitude do ângulo entre as retas igual à metade de α. Então $\Delta_{O,\alpha} = \Phi_s \circ \Phi_r$.

Vamos acrescentar também a condição de que a reta s passe pelo ponto O'. Da mesma maneira, vamos substituir $\Delta_{O',\beta}$ pela composta de duas reflexões de retas concorrentes em O' e com amplitude do ângulo entre elas igual à metade de β. Como há uma infinidade de retas nessas condições, vamos impor que uma delas seja a reta s, anteriormente usada na substituição de $\Delta_{O,\alpha}$ e que passa por O'. A outra reta, chamaremos de t. Logo, $\Delta_{O',\beta} = \Phi_t \circ \Phi_s$. Na figura 10, temos a ilustração dessa situação. Nela o ponto A é transformado no ponto A' por uma rotação de centro O e amplitude α. Já o ponto A' é transformado no ponto A'' por uma rotação de centro O' e amplitude β.

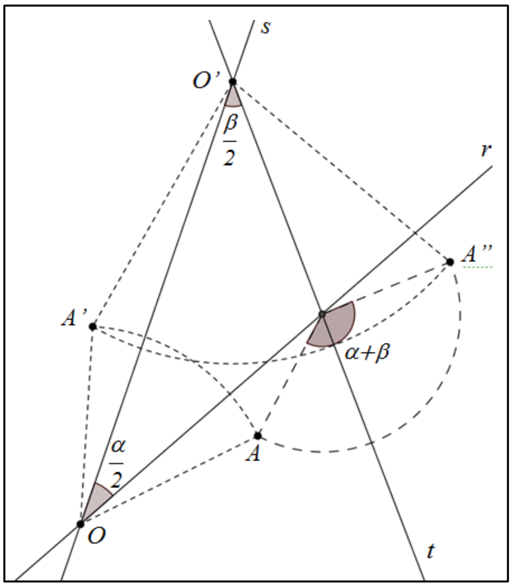


Figura 10 – Composição de duas rotações com centros e amplitudes diferentes.
Fonte: construção realizada pelo autor.

Assim, $\Delta_{O',\beta} \circ \Delta_{O,\alpha} = (\Phi_t \circ \Phi_s) \circ (\Phi_s \circ \Phi_r)$ e, pela associatividade da composição, temos $\Delta_{O',\beta} \circ \Delta_{O,\alpha} = \Phi_t \circ (\Phi_s \circ \Phi_s) \circ \Phi_r$. Como $\Phi_s \circ \Phi_s = \varphi_I$ (isto é, uma reflexão composta com ela própria é a isometria identidade), conclui-se que $\Delta_{O',\beta} \circ \Delta_{O,\alpha} = \Phi_t \circ \Phi_r$.

Essa última igualdade nos mostra que a composição de duas rotações com centros diferentes é igual à composição de duas reflexões.

Como conhecemos o resultado da composição de duas reflexões, podemos concluir que a composição de duas rotações de centros diferentes pode ser uma rotação ou uma translação. No caso em que r e t são concorrentes, a composta de duas rotações será uma rotação com centro na intersecção dessas retas e amplitude igual ao dobro do ângulo formado entre elas. No caso em que r e t são paralelas, temos que a composição das duas rotações é uma translação por um vetor de comprimento igual ao dobro da distância entre as retas.

Passemos agora para a demonstração de um teorema muito importante para a compreensão das isometrias.

3.4 TEOREMA DA CLASSIFICAÇÃO DAS ISOMETRIAS PLANAS

Teorema 5: Toda isometria plana é a composição de no máximo três reflexões.

Demonstração. Uma isometria fica completamente determinada por três pontos não colineares e suas respectivas imagens. Seja Γ uma isometria plana e sejam ABC um triângulo e $A'B'C'$ o triângulo obtido por Γ.

Vamos analisar os seguintes casos:

Caso 1: $A=A'$, $B=B'$ e $C=C'$. Logo $\Gamma=\varphi_I$, isto é, a isometria identidade, que pode ser interpretada como sendo a composição de duas reflexões em torno da mesma reta.

Caso 2: $A=A'$, $B=B'$ e $C\neq C'$. Nessa situação, temos que: $d(A,C)=d(A',C')=d(A,C')$ e $d(B,C)=d(B',C')=d(B,C')$. Notemos que a intersecção da circunferência de centro A e raio $\overline{AC}$ com a circunferência de centro B e raio $\overline{BC}$ são os pontos C e C'. Desse modo, os pontos C e C' são equidistantes de A e B e, portanto, o segmento $\overline{AB}$ é perpendicular ao segmento $\overline{CC'}$. Seja r a reta que contém o segmento $\overline{AB}$. Logo, $r \perp \overline{CC'}$. A Figura 11 ilustra essa situação.

Assim, teremos que:

$$\Phi_r(A) = A' = A;\ \Phi_r(B) = B' = B \text{ e } \Phi_r(C) = C'.$$

Portanto, $\Gamma = \Phi_r$, onde r é a reta que contém o segmento AB.

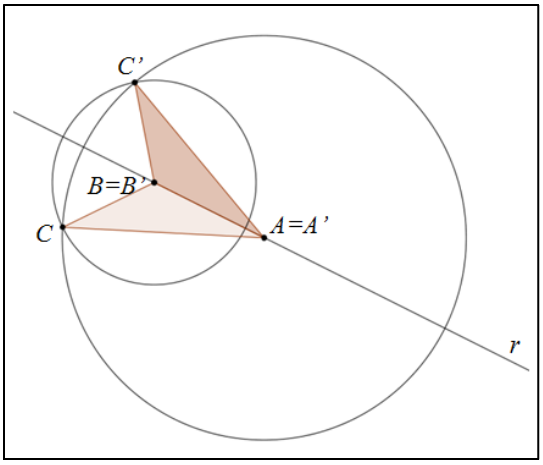


Figura 11 – Caso 2: $A=A'$, $B=B'$ e $C\neq C'$.
Fonte: construção realizada pelo autor.

Caso 3: $A = A'$, $B \neq B'$ e $C \neq C'$. Pelo caso de congruência LLL, temos que o triângulo ABC é congruente ao triângulo $A'B'C'$ (figura 12).

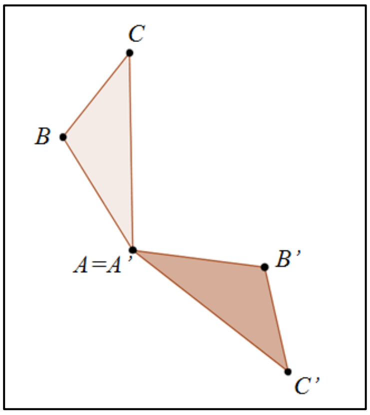


Figura 12 – Triângulo ABC congruente ao triângulo $A'B'C'$.
Fonte: construção realizada pelo autor.

Seja r a reta perpendicular ao segmento $\overline{BB'}$ passando pelo ponto A (figura 13). Então:

$$\Phi_r(A) = A;\ \Phi_r(B) = B' \text{ e } \Phi_r(C) = D$$

Consideremos agora a reta s que contém o segmento $\overline{AB'}$. Como $\overline{AD} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{AC'}$ e $\overline{DB'} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{C'B'}$, temos que o segmento $\overline{AB'}$ é perpendicular ao segmento $\overline{DC'}$ e, consequentemente a reta s é perpendicular ao segmento $\overline{DC'}$. Daí,

$$\Phi_s(A) = A;\ \Phi_s(B') = B' \text{ e } \Phi_s(D) = C'.$$

Logo,

$$(\Phi_s \circ \Phi_r)(A) = \Phi_s(\Phi_r(A)) = \Phi_s(A) = A$$

$$(\Phi_s \circ \Phi_r)(B) = \Phi_s(\Phi_r(B)) = \Phi_s(B') = B'$$

$$(\Phi_s \circ \Phi_r)(C) = \Phi_s(\Phi_r(C)) = \Phi_s(D) = C'.$$

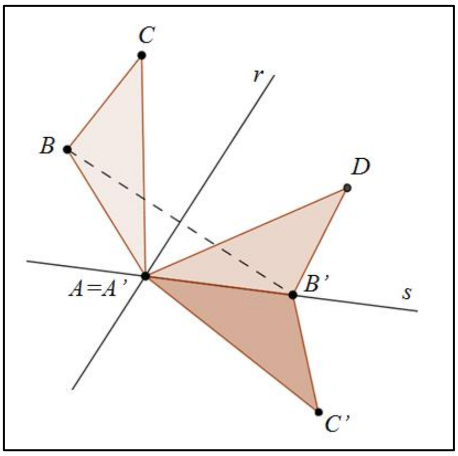


Figura 13 – Caso 3: $A=A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$.
Fonte: construção realizada pelo autor.

Portanto, $\Gamma = \Phi_s \circ \Phi_r$.

Caso 4: $A \neq A'$, $B \neq B'$ e $C \neq C'$. Seja r a reta mediatriz do segmento $\overline{AA'}$. Logo,

$$\Phi_r(A) = A';\ \Phi_r(B) = D \text{ e } \Phi_r(C) = Q.$$

Daí, voltamos ao caso anterior, ou seja, tomemos s como a reta que é perpendicular ao segmento $\overline{DB'}$ passando pelo ponto A'. Então:

$$\Phi_s(A') = A';\ \Phi_s(D) = B' \text{ e } \Phi_s(Q) = R.$$

Consideremos agora a reta t que contém o segmento $\overline{A'B'}$, que por sua vez é perpendicular ao segmento $\overline{RC'}$, uma vez que R e C' são equidistantes de A' e B'. Assim,

$$\Phi_t(A') = A';\ \Phi_t(B') = B' \text{ e } \Phi_t(R) = C'$$

Portanto,

$$(\Phi_t \circ \Phi_s \circ \Phi_r)(A) = \Phi_t(\Phi_s(\Phi_r(A))) = \Phi_t(\Phi_s(A')) = \Phi_t(A') = A'$$

$$(\Phi_t \circ \Phi_s \circ \Phi_r)(B) = \Phi_t(\Phi_s(\Phi_r(B))) = \Phi_t(\Phi_s(D)) = \Phi_t(B') = B'$$

$$(\Phi_t \circ \Phi_s \circ \Phi_r)(C) = \Phi_t(\Phi_s(\Phi_r(C))) = \Phi_t(\Phi_s(Q)) = \Phi_t(R) = C'$$

A figura 14 ilustra esse caso.

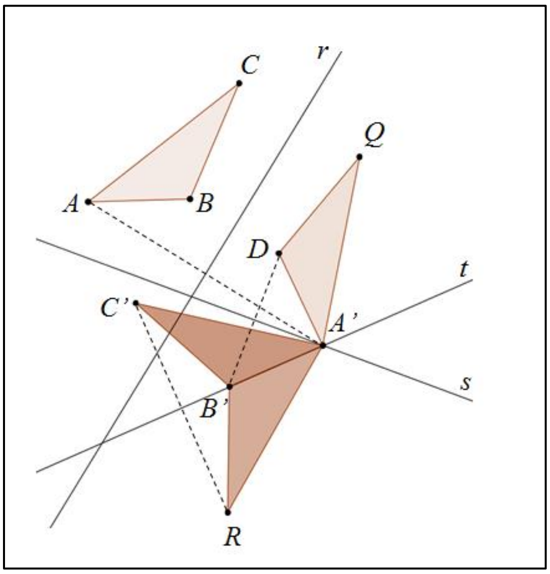


Figura 14 – Caso 4: $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$.
Fonte: construção realizada pelo autor.

Dessa maneira, temos $\Gamma = \Phi_t \circ \Phi_s \circ \Phi_r$.

Concluímos que qualquer isometria no plano é a composição de, no máximo, três reflexões.

Antes de enunciar um corolário importante desse teorema, definiremos a isometria denominada *reflexão deslizante.*

Definição 10. A *reflexão deslizante* é a isometria composta de uma reflexão seguida de uma translação ou vice-versa. Nessa isometria, o eixo de reflexão e o vetor da translação são paralelos.

Na figura 15, temos o triângulo *ABC* que sofre uma reflexão deslizante. O eixo de reflexão é a reta *r* e o vetor da translação está indicado pelo segmento $\overline{MN}$.

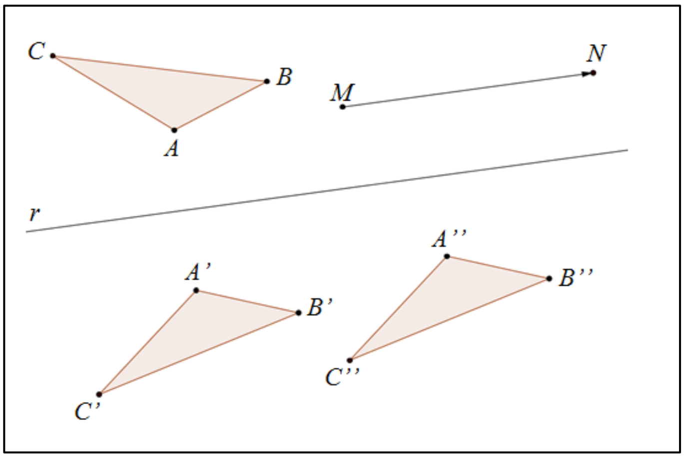


Figura 15 – Reflexão deslizante que transforma o triângulo *ABC* no triângulo *A"B"C"*.
Fonte: construção realizada pelo autor.

Vemos, nessa figura, que o triângulo *ABC* é transformado no triângulo *A'B'C'* por uma reflexão em torno da reta *r*. A seguir é aplicada uma translação pelo vetor $\overrightarrow{MN}$ nesse último triângulo, transformando-o no triângulo *A"B"C"*.

Corolário 1 (corolário do Teorema de Classificação das Isometrias Planas): As isometrias planas são a identidade, as reflexões, as translações, as rotações e as reflexões deslizantes.

Conforme o Teorema de Classificação das Isometrias Planas, já demonstrado, se dois triângulos forem congruentes, então existe e é única a isometria Γ, que transforma um triângulo no outro, podendo Γ ser expressa pela composição de no máximo três reflexões, isto é, $\Gamma = \Phi_t \circ (\Phi_s \circ \Phi_r)$.

- *Uma reflexão*: $\Gamma = \Phi_t$, sendo Φ_r e Φ_s iguais à identidade. Trata-se então de uma reflexão.
- *Duas reflexões*: $\Gamma = \Phi_t \circ \Phi_s$, sendo Φ_r igual à identidade. Se *r* e *s* são concorrentes, Γ será uma rotação, conforme demonstrado no teorema 2. Se *r* e *s* são paralelas, Γ será uma translação, de acordo com o teorema 3.
- *Três reflexões*: $\Gamma = \Phi_t \circ (\Phi_s \circ \Phi_r)$. Se *r*, *s* e *t* são paralelas (figura 16) ou concorrentes em um único ponto (figura 17), então Γ é uma reflexão. Se *r*, *s* e *t* não são paralelas, nem

concorrentes (figura 18), então Γ é uma reflexão deslizante, conforme demonstrado em Tinoco (2012, p. 41-44).

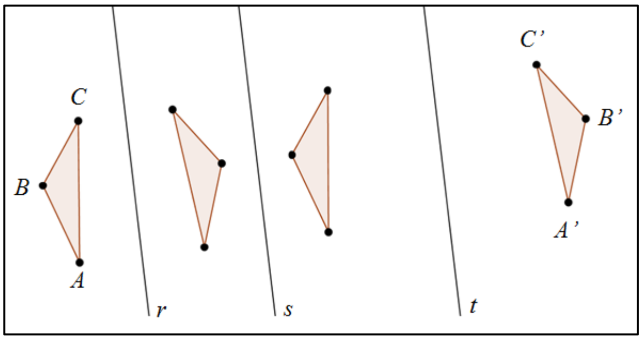


Figura 16 – Isometria Γ que transforma o triângulo *ABC* no triângulo *A'B'C'* por meio de três reflexões em retas paralelas.
Fonte: construção realizada pelo autor.

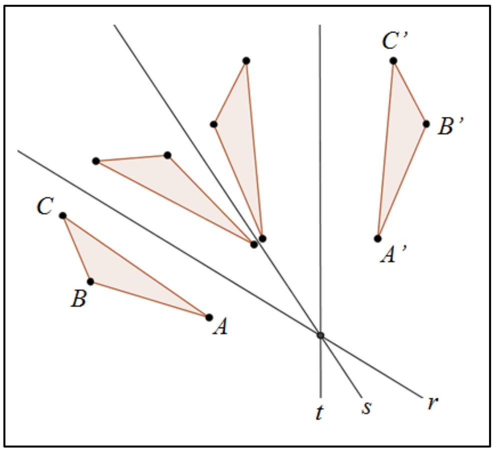


Figura 17 – Isometria Γ que transforma o triângulo *ABC* no triângulo *A'B'C'* por meio de três reflexões em retas concorrentes em um único ponto.
Fonte: construção realizada pelo autor.

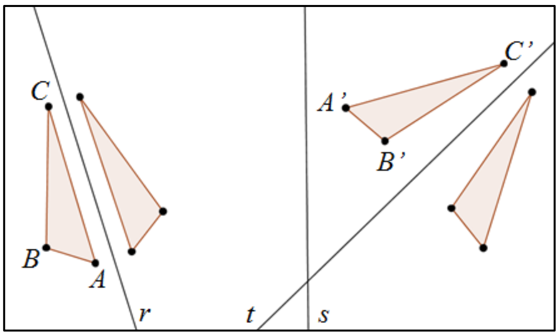


Figura 18 – Isometria Γ que transforma o triângulo *ABC* no triângulo *A'B'C'* por meio de três reflexões em retas nem paralelas nem concorrentes em um único ponto.
Fonte: construção realizada pelo autor.

3.5 ORIENTAÇÃO DOS ÂNGULOS NAS ISOMETRIAS

As isometrias definidas e caracterizadas anteriormente apresentam propriedades que as diferenciam. Uma delas é a orientação dos ângulos.

A *reflexão* e a *reflexão deslizante* são isometrias que trocam a orientação dos ângulos. A figura 19 mostra a reflexão do triângulo *ABC* em torno da reta *r*. A imagem desse triângulo, por meio dessa isometria, é o triângulo *A'B'C'*.

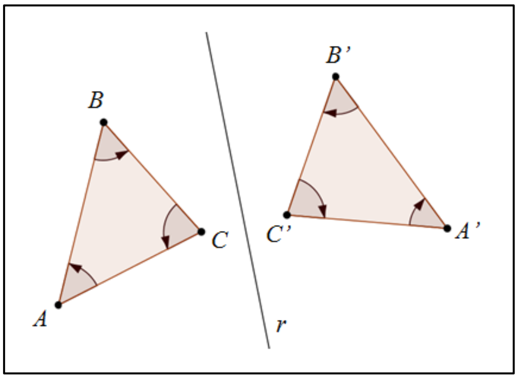


Figura 19 – Orientação dos ângulos em uma reflexão.
Fonte: construção realizada pelo autor.

Notemos, por exemplo, que o ângulo *CÂB* é orientado no sentido anti-horário. Já o ângulo *C'Â'B'* é orientado no sentido horário.

As *rotações* e as *translações* mantêm a orientação dos ângulos. A figura 20 exemplifica esse fato através da rotação do triângulo *ABC*, em torno do ponto *O*. Os ângulos do triângulo *A'B'C'*, imagem de *ABC* pela rotação, conservam a mesma orientação dos ângulos do triângulo original.

Nessa figura, o ângulo *BÂC* está orientado no sentido anti-horário, assim como o ângulo *B'Â'C'*.

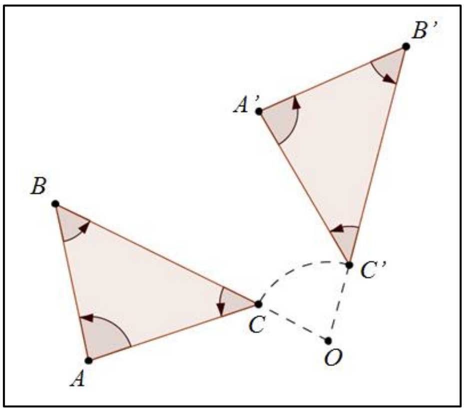


Figura 20 – Orientação dos ângulos em uma rotação.
Fonte: construção realizada pelo autor.

4 A SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES E AS INVESTIGAÇÕES DOS ALUNOS

Neste capítulo, são apresentados o relato e comentários acerca do desenvolvimento das atividades propostas aos alunos.

Esse desenvolvimento ocorreu nos meses de setembro, outubro e novembro do ano de 2015, com o grupo de alunos já caracterizado no segundo capítulo. A turma contava com quatro horas semanais de aulas de Matemática, sendo que a primeira atividade teve início no dia dezoito de setembro e a última atividade, no dia dez de novembro, totalizando uma carga horária de sessenta horas.

O relato foi construído com base nos registros coletados. O capítulo está estruturado de maneira que, em cada seção, são relatadas as atividades planejadas e os resultados observados para o estudo de uma das isometrias. Nesse relato, não são apresentadas todas as soluções produzidas pelos alunos. Para cada uma das atividades, são mostradas as soluções que ilustram ou que são representativas da produção da maioria deles e, para algumas atividades, também são apresentadas as soluções mais inesperadas. Essas soluções contêm erros de pontuação, ortografia ou concordância. Como o objetivo era analisar o que eles produziriam e concluiriam, suas respostas foram mantidas sem nenhuma alteração gramatical.

Algumas das conclusões produzidas pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades, por meio das produções individuais, em duplas ou dos diálogos com toda a turma, são imprecisas do ponto de vista matemático. Essas produções devem ser compreendidas como expressões de um processo de investigação em curso, e não como definições a serem copiadas ou replicadas em outros experimentos. Seguindo o modelo da cooperação investigativa e do diálogo, não me preocupei em corrigir, a cada momento, a escrita dos alunos, de modo a obter apenas definições ou conclusões precisas e completas. Procurei, por outro lado, propor novas atividades e questões que possibilitassem aos alunos reformular suas conclusões, construindo definições e conclusões mais precisas e abrangentes.

Como já foi comentado no segundo capítulo, os alunos são designados, no relato, por nomes fictícios.

4.1 CONHECENDO OS MATERIAIS MANIPULATIVOS E O GEOGEBRA

As atividades 1 e 2, descritas nesta seção, tinham como objetivo familiarizar os alunos com os recursos que seriam usados nas etapas seguintes. O geoplano foi utilizado em primeiro lugar, considerando que, nele, os alunos poderiam com facilidade representar polígonos e modifica-los, sem ser necessário para isso a introdução de qualquer linguagem formal ou regras de construção. A seguir, foram utilizados o papel quadriculado e o ambiente do *software* GeoGebra. As atividades de reprodução visaram, também, provocar os alunos a construírem um olhar mais atento às figuras, ainda que não sistemático, considerando seus componentes e não apenas sua aparência global.

4.1.1 Atividade 1: O primeiro contato com o geoplano e o papel quadriculado

Para essa atividade, cada aluno recebeu um geoplano e três atilhos, com os quais deveria compor uma figura qualquer no mesmo. A seguir, distribuí um papel quadriculado no qual deveria ser desenhada a mesma figura composta no geoplano. Para essa composição no papel quadriculado, esperava que os alunos discutissem suas dúvidas com seus colegas para que, juntos, produzissem suas conclusões.

Alguns dos objetivos dessa atividade eram: analisar como se daria a representação do polígono no papel, se os alunos respeitariam as proporções entre uma representação e outra, e familiarizá-los com as construções geométricas poligonais que estavam presentes em todas as demais atividades.

Particularmente, estava interessado em responder as seguintes perguntas:

a) de que maneira seriam desenhados eventuais segmentos não marcados no papel quadriculado, como por exemplo, diagonais de quadrados?

b) os alunos usariam algum sistema de referência para a construção da figura do papel quadriculado?

Para a construção de polígonos no geoplano, não era necessário que os alunos atentassem às partes constituintes das figuras. Tratava-se de uma criação livre, sem preocupações com medidas ou proporções.

Para representar a figura feita no geoplano no papel quadriculado, pedi que os alunos utilizassem, no máximo, a metade da folha fornecida, pois na outra metade uma atividade posterior seria desenvolvida.

Durante a atividade, andei pela sala e observei o trabalho e as discussões entre os alunos. Fiz alguns questionamentos orais, individualmente, que objetivavam verificar o raciocínio usado por cada aluno e observar o vocabulário utilizado ao se referir aos elementos presentes na atividade.

Alguns alunos, nessa reprodução, utilizaram as medidas da figura no geoplano, ou seja, mediram determinados segmentos no geoplano com o auxílio de uma régua e tentaram representá-los com o mesmo comprimento no papel quadriculado. Ao perceberem que o desenho ficaria muito grande para que coubesse no papel, reduziram suas medidas. Aí surgiram soluções diferentes. Enquanto muitos subtraíram um determinado valor do número de unidades[5] dos segmentos do desenho no geoplano, outros não se preocuparam com essas relações, como é o caso do aluno Leonardo, que apenas procurou reproduzir sua construção, sem levar em consideração as proporções entre os polígonos construídos no geoplano e os desenhados no papel quadriculado, como mostra a figura 21.

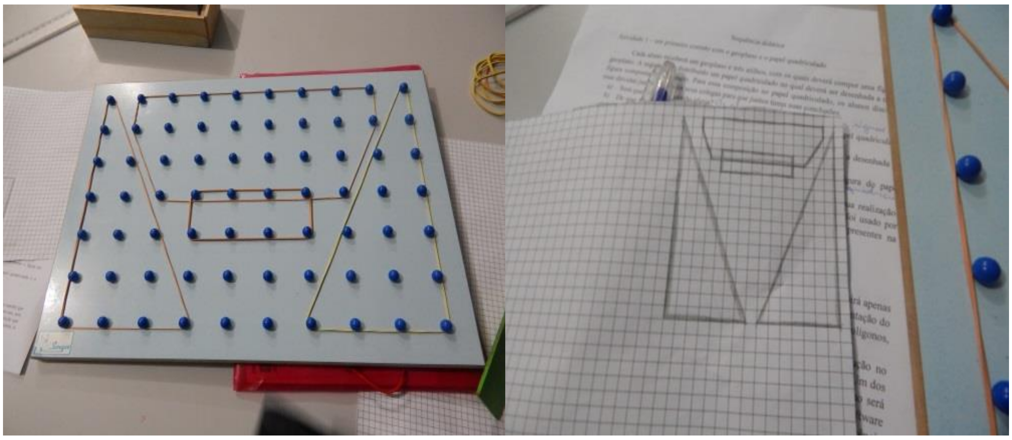


Figura 21 – Representação de polígonos no geoplano e no papel quadriculado do aluno Leonardo.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Observa-se que esses alunos não respeitaram a proporção entre o desenho no geoplano e aquele representado no papel quadriculado. Embora eles tenham notado que a representação no papel quadriculado não havia respeitado as proporções, eles não souberam explicar porque isso aconteceu.

Já outros alunos, ao traçarem os segmentos no papel quadriculado, duplicaram ou triplicaram o número de unidades dos segmentos representados no geoplano (figura 22). Dessa maneira, mantiveram as proporções entre as representações.

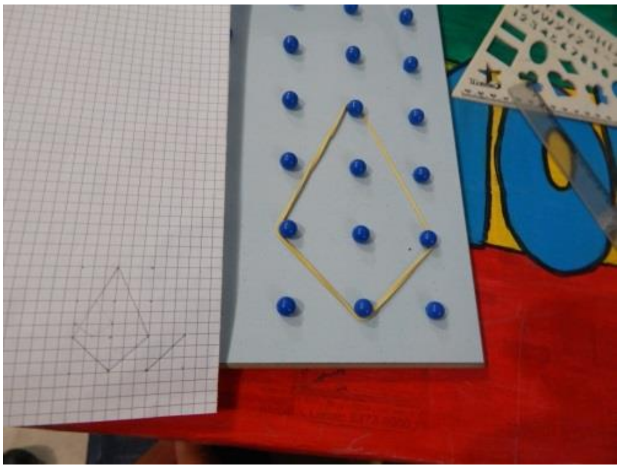


Figura 22 – Representações de um polígono no papel quadriculado e no geoplano dadas pelo aluno Jonas.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

[5] Denominarei de *unidade* no geoplano a distância entre duas “bolinhas” consecutivas, medida na horizontal ou na vertical. No papel quadriculado, a *unidade* será a medida do lado de cada quadradinho.

A próxima imagem (figura 23) mostra a representação de Maria, que respeitou as proporções ao desenhar as figuras isoladamente, mas não ao representar as distâncias entre essas figuras. Ela triplicou o número de unidades de cada segmento representado no geoplano ao fazer a representação no papel quadriculado.

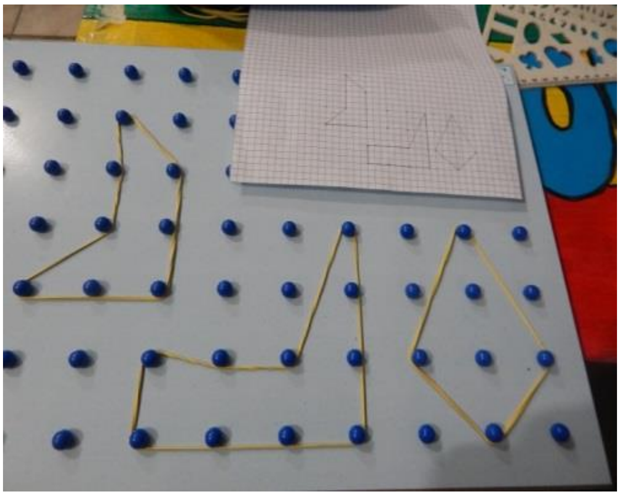


Figura 23 – Representações dos polígonos construídos no geoplano e no papel quadriculado fornecidas por Maria.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Nesse momento da implementação da proposta didática optei por não usar, na discussão com os alunos, termos como *proporção* ou *escala.* Em atividades posteriores, os alunos teriam novas oportunidades para analisar as proporções entre seus desenhos e suas representações no GeoGebra.

Observei que a maior parte dos alunos representou os segmentos não marcados no papel quadriculado usando como referência as projeções ortogonais desses segmentos ou, então, optaram por traçar primeiramente os segmentos presentes no papel para depois obter o segmento não contemplado. Assim, por exemplo, para desenhar a hipotenusa de um triângulo retângulo, a maioria dos alunos traçou os catetos e, a partir deles, obteve a hipotenusa.

4.1.2 Atividade 2: Representando os polígonos no *software* GeoGebra

Nessa atividade, os alunos se dirigiram ao Laboratório de Informática da escola. Como professor, tenho notado que os alunos em geral possuem uma grande familiaridade com recursos computacionais, em virtude da sua popularização. Isso facilita o trabalho com *softwares* educacionais, diferentemente do que era observado há alguns anos quando os computadores eram raros ou até mesmo inexistentes nas escolas. O manejo do GeoGebra, por ser bastante intuitivo, contribui mais ainda para um rápido processo de conhecimento de suas funções.

Previamente, antes da ida dos alunos, liguei os computadores e abri o ambiente do GeoGebra exibindo, na janela do programa, apenas a malha quadriculada sem os eixos coordenados.

Os primeiros momentos foram de apresentação do ambiente e de algumas de suas funções, como construção de pontos, segmentos de reta, polígonos, circunferências, visto que nenhum dos alunos conhecia o ambiente do *software.*

Mostrei aos alunos as principais funções do programa, como marcar pontos e nomeá-los, traçar retas e segmentos de reta, aumentar ou diminuir o campo de visão da janela do *software* (*zoom*), ocultar ou exibir a malha quadriculada, traçar polígonos quaisquer e polígonos regulares.

Após essa rápida apresentação do *software,* pedi aos alunos que abrissem uma nova janela e os desafiei a representarem, no ambiente do GeoGebra, o desenho que haviam feito no papel quadriculado. Pretendi, com isso, investigar se o registro do desenho no *software* respeitaria as proporções do desenho feito no papel quadriculado e se algum sistema de referência seria utilizado na representação.

Como o Laboratório de Informática da escola conta com apenas quinze computadores, alguns alunos fizeram a atividade em duplas. De posse dos seus desenhos no papel quadriculado, os alunos fizeram sua reprodução no *software* GeoGebra, utilizando como referência apenas a malha quadriculada do programa.

Nessa atividade, todos os alunos, sem exceção, recorreram ao recurso de exibir a malha quadriculada na janela do programa para a representação de seus desenhos, visto que a mesma não é exibida assim que o *software* é aberto. Porém alguns alunos não respeitaram a proporção entre as representações.

Procurei não intervir nas soluções apresentadas, justamente para verificar se os alunos percebiam a importância de manter as proporções entre as representações, de modo a manter a semelhança entre elas. Notei que muitos alunos começaram sua representação mantendo uma determinada proporção, mas não a mantiveram em toda a construção. Por exemplo, na figura 24, a aluna Tatiana começou seu desenho no GeoGebra pela porta da casa. Seu desenho da porta, no *software*, contém a metade do número de quadradinhos de seu desenho no papel quadriculado e, portanto, a representação da porta no ambiente do programa é proporcional ao desenho no papel quadriculado. Mas essa relação não se manteve para as demais medidas do desenho. Percebe-se também que a aluna desenhou uma janela que não havia em seu desenho no papel.

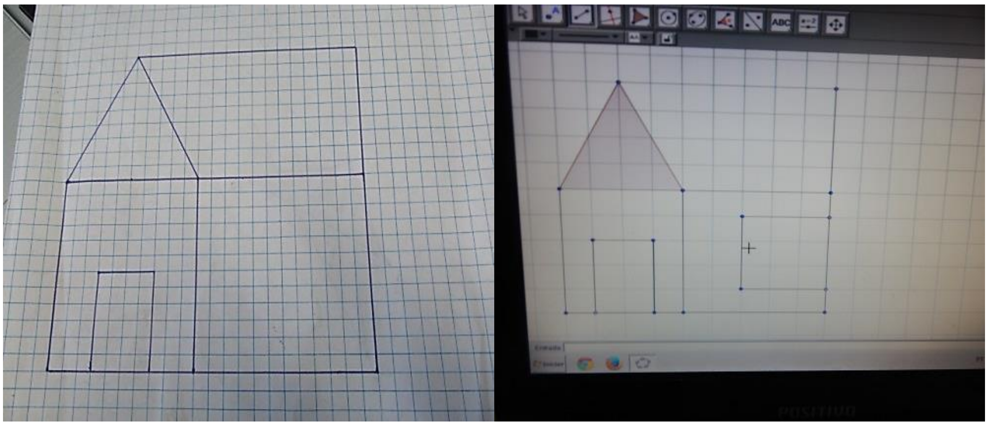


Figura 24 – Representações dos desenhos da aluna Tatiana no papel quadriculado e no GeoGebra.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Porém, a maioria dos alunos representou seus desenhos mantendo as proporções e fazendo uma relação biunívoca, ou seja, cada quadradinho do papel quadriculado foi representado por um quadradinho da malha quadriculada do *software* (figuras 25 e 26).

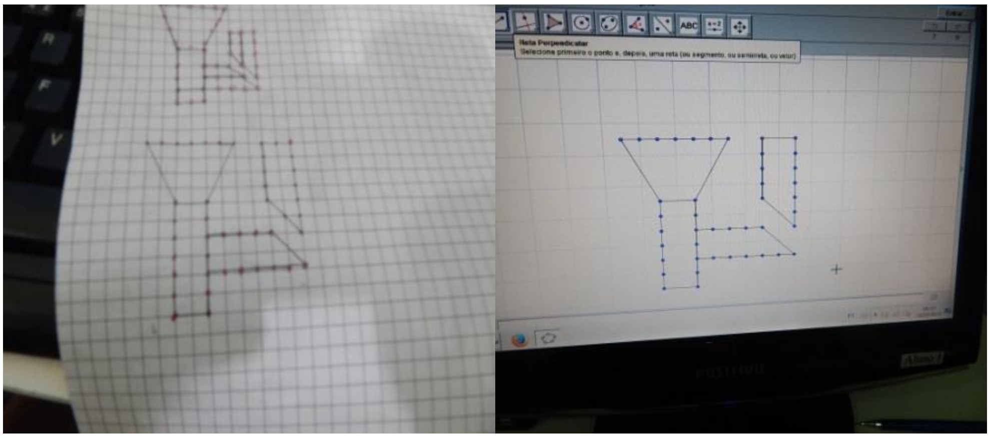


Figura 25 – Construções de Carlos no papel quadriculado e no GeoGebra.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

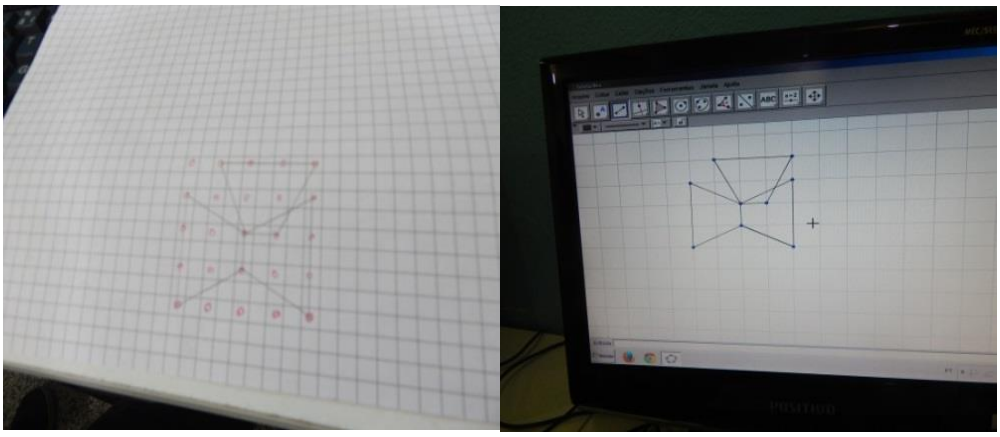


Figura 26 – Construções de José no papel quadriculado e no GeoGebra.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

4.2 O ESTUDO DA REFLEXÃO

4.2.1 Atividade 3: A reflexão com auxílio de espelhos

A partir desta atividade, desenvolveu-se o estudo das isometrias, foco da pesquisa.

Nesta atividade, os alunos tiveram o primeiro contato com a reflexão, utilizando materiais manipulativos. Após desenhar um novo polígono[6] no papel quadriculado, cada aluno recebeu um pequeno espelho retangular e, com auxílio desse espelho, deveria reproduzir uma reflexão do desenho. Para isso, solicitei que cada um o colocasse ao lado de seu desenho, escolhendo a posição mais adequada, e traçasse um segmento de reta no papel na posição em que o espelho se encontrava. A seguir, observando a imagem refletida no espelho, fizeram sua reprodução no papel.

Em geral, a maioria deles não encontrou dificuldades ao desenhar no papel a imagem refletida da figura, o que me deixou bastante satisfeito, pois acreditava que o uso do espelho pudesse atrapalhar a visualização das características da reflexão. Notei, em muitos desenhos, que a distância de cada ponto da figura refletida até o traço marcado para representar o espelho era diferente da distância do ponto correspondente do polígono original ao espelho. Em parte, isso pode ser atribuído à espessura do espelho, que é pouco menor do que a medida dos lados de cada quadradinho do papel quadriculado.

Na Figura 27, vemos os desenhos de um polígono e de sua reflexão (com todas as medidas congruentes ao polígono) em torno do eixo assinalado. Podemos observar que cada medida do polígono refletido é igual à medida correspondente no polígono original. Por outro lado, como comentado acima, o eixo de reflexão não é equidistante dos dois polígonos.

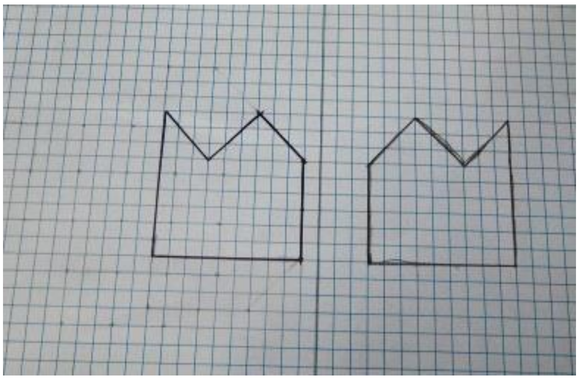


Figura 27 – Polígono e uma de suas reflexões feitos pelo aluno Carlos.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

[6] A ideia inicial era que cada aluno fizesse a reflexão do mesmo desenho feito nas atividades 1 e 2. Mas como houve problemas com os computadores do Laboratório de Informática, os arquivos que haviam sido salvos pelos alunos foram perdidos. Dessa maneira, solicitei que fizessem novos polígonos para dar seguimento às atividades 3 e 4.

Durante a atividade, muitos alunos usaram o espelho para verificar como se apresentava o polígono refletido e, para desenhá-lo, retiraram o espelho. Segundo a aluna Camila, o espelho serve para ver como fica a figura refletida, mas “é mais fácil de desenhar sem ele atrapalhando” (figura 28).

Figura 28 – Aluna Camila construindo um polígono refletido com auxílio do espelho.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Após as construções, questionei oralmente os alunos sobre o que observaram nos desenhos, já sem o espelho como auxílio:

a) Compare as duas figuras. O que elas têm em comum? O que elas têm de diferente?

b) O que acontece se mudarmos o espelho de posição? Como fica o desenho da figura?

c) Que nome vocês dariam a esse segmento de reta que serve de “espelho”?

As opiniões dos alunos foram ouvidas e discutidas no grupo. Para verificar o item *b*, os alunos puderam manusear o espelho e confirmar suas respostas. Já no item *c*, preferi ainda não adotar o nome “eixo de reflexão”. Mais adiante, em outra atividade, essa nomenclatura foi formalizada.

Quando questionados sobre as semelhanças e diferenças entre a figura desenhada e a figura refletida, a maioria disse que a refletida estava “invertida” em relação à figura original. Essa observação foi usada como justificativa em outras atividades nas quais era necessária a análise de polígonos e suas reflexões. Embora os alunos não tenham dito o que entendem por “figura invertida”, penso que estavam se referindo ao fato da reflexão inverter a orientação do plano. Isto quer dizer que, se deslocarmos um ponto P qualquer da figura original, sua imagem, P’, obtida por uma reflexão em torno de um eixo, se deslocará no sentido contrário ao de P. Assim, por exemplo, se P se deslocar no sentido horário, P’ se deslocará no sentido anti-horário. Ainda pode-se pensar que, se tomamos uma seta que une um ponto P do plano à sua projeção ortogonal sobre o eixo, e sua imagem refletida, o sentido de uma é inverso ao da outra. Ao serem questionados sobre o que acontece com a imagem se mudarmos o espelho de posição, muitos alunos optaram por fazer um novo desenho e colocar o espelho em várias posições. Notamos daí, que os alunos tinham a necessidade de experimentar. A maioria deles destacou, novamente, que as figuras refletidas ficaram invertidas em relação à figura original. Nenhum aluno posicionou o espelho sobre a figura desenhada. Podemos supor que essa foi uma escolha dos alunos, para facilitar a visualização e o traçado da figura refletida, ou considerando que isso seria necessário para que toda a figura ficasse de um mesmo "lado" do espelho.

Os nomes utilizados para identificar os eixos de reflexão foram os mais diversos. Alguns o nomearam de "espelho", outros de "reta" ou combinações destes, como "reta espelho" ou "reta espelhada". Penso que a manipulação do espelho nessa atividade criou certo "dinamismo", permitindo que os alunos observassem o que acontece com a figura refletida para depois procurarem explicações para essas observações.

4.2.2 Atividade 4: Analisando a reflexão no *software* GeoGebra

Após as discussões da atividade anterior, novamente os alunos retornaram ao Laboratório de Informática. Mostrei a todos a ferramenta do *software* que permite obter a reflexão de um objeto em torno de uma reta e solicitei que obtivessem a reflexão dos seus polígonos, desenhados na atividade anterior, em relação a uma reta qualquer.

Provavelmente, pelo fato de ter usado o termo "reta qualquer", muitos alunos escolheram, como eixos de reflexão, retas não paralelas às bordas da tela do computador ou então retas que interseccionavam os polígonos.

Ao serem questionados sobre o que observaram em relação ao polígono desenhado e ao polígono refletido, novamente os alunos utilizaram o termo "invertido". A fala de Fabrício sintetiza o raciocínio que os alunos explicitaram: "o desenho aqui do computador é a mesma coisa que o desenho que eu fiz no papel. Eles ficam invertidos".

Assim que a reflexão foi obtida no *software*, os alunos receberam o material mostrado no Quadro 1, que consiste em algumas questões que foram respondidas individualmente, mas discutidas nos grupos. Com essas questões, os alunos puderam comparar a reflexão obtida no papel quadriculado com aquela obtida no ambiente do GeoGebra. Além disso, manipularam os elementos presentes na reflexão, como o eixo de reflexão e os vértices do polígono, com o auxílio do GeoGebra.

Quadro 1 - Questões entregues aos alunos para discussão do movimento de reflexão.

Analisando o movimento de reflexão I

1) Compara a reflexão feita pelo *software* com aquela feita no papel quadriculado. O que tu observas? A reflexão feita no papel quadriculado é a mesma obtida no *software*? Quais as diferenças e semelhanças?

2) Utilizando a função “exibir rótulo”, identifica todos os vértices da figura desenhada e da figura refletida.

Para cada ponto do polígono desenhado há um ponto correspondente no polígono refletido. Esse ponto refletido chama-se ***imagem*** *do outro. Por exemplo, o ponto A’ é a imagem refletida do ponto A.*

3) Agora movimenta um ponto qualquer do polígono construído e observa o que acontece com sua imagem. O que tu podes observar?

A reta em torno da qual ocorre o movimento de reflexão recebe o nome de ***eixo de reflexão****.*

4) Agora movimenta o eixo de reflexão e observa o que acontece com os pontos do polígono e suas imagens. O que tu podes observar?

Fonte: arquivo pessoal do autor

Na resposta à questão 1, alguns alunos observaram que as representações no papel quadriculado e no ambiente do GeoGebra são diferentes em relação aos seus “tamanhos”, ou então que a malha quadriculada do programa se apresenta “maior” do que a malha quadriculada do papel. As figuras 29 e 30 mostram as respostas de dois alunos para essa questão.

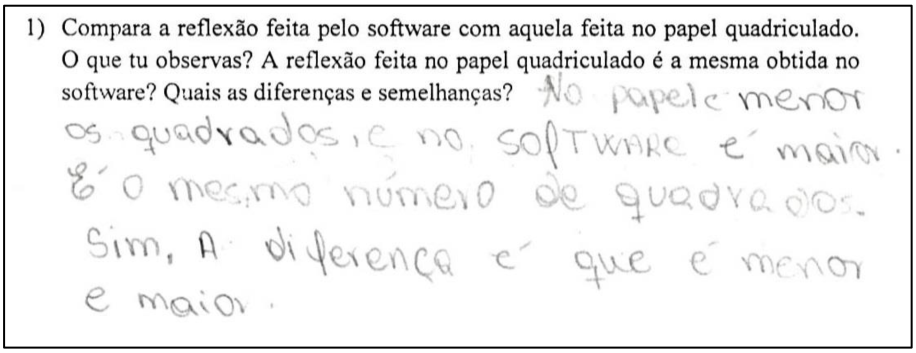
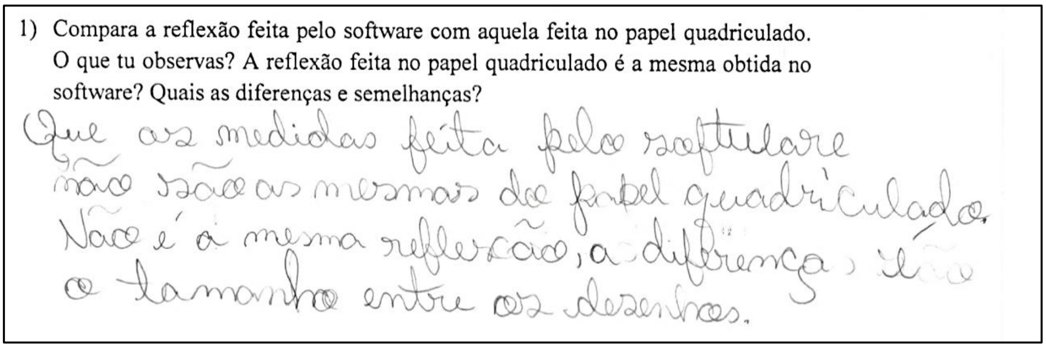

1) Compara a reflexão feita pelo software com aquela feita no papel quadriculado. O que tu observas? A reflexão feita no papel quadriculado é a mesma obtida no software? Quais as diferenças e semelhanças? No papel é menor os quadrados, e no softwarre é maior. É o mesmo número de quadrados. Sim, A diferença é que é menor e maior.

Figura 29 – Resposta do aluno Jonas à questão 1.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno: “No papel é menor os quadrados, e no software é maior. É o mesmo número de quadrados. Sim. A diferença é que é menor e maior”.


1) Compara a reflexão feita pelo software com aquela feita no papel quadriculado. O que tu observas? A reflexão feita no papel quadriculado é a mesma obtida no software? Quais as diferenças e semelhanças?

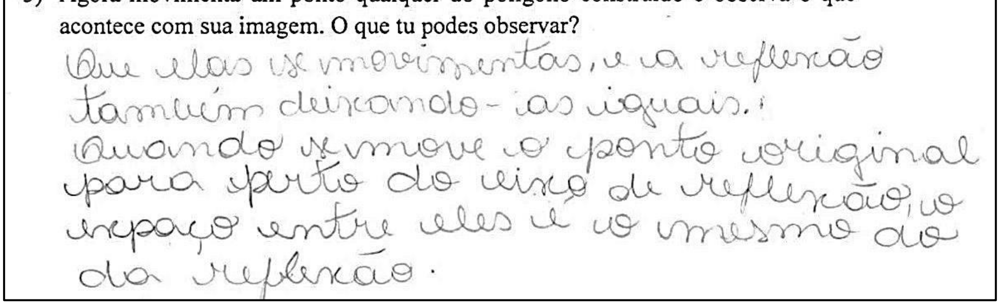
Que as medidas feita pelo softulare não são as mesmas do papel quadriculado. Não é a mesma reflexão, a diferença é o tamanho entre os desenhos.

Figura 30 – Resposta da aluna Alice à questão 1.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "Que as medidas feita [sic] pelo software não são as mesmas do papel quadriculado. Não é a mesma reflexão, a diferença é o tamanho entre os desenhos".

Ao discutir a questão 3, uma dupla, formada pelos alunos Tatiana e Fabrício, observou que a distância de cada ponto do polígono original até o eixo de reflexão é a mesma que a distância de sua respectiva imagem até o mesmo eixo. Essa descoberta foi compartilhada com todos da turma, por iniciativa dos próprios alunos, que se sentiram à vontade para dialogar entre si. A aluna Tatiana assim se referiu em relação a esse fato: "*no meu desenho eu deixei isso aqui* [mostrando para a turma os dedos indicador e polegar separados por uma pequena distância] *da original para a linha que eu tracei* [referindo-se ao eixo de reflexão] *e na reflexão eu deixei isso aqui* (mostrando novamente os dedos indicador e polegar, porém mais distanciados um do outro) *da linha que eu tracei. Daí não ficou igual, mas aqui* [na tela] *é igual, olha só* [apontando para a reflexão feita no computador]. *As distâncias ficam iguais*". Esse fato foi registrado por muitos alunos.

Na figura 31, vemos a escrita apresentada por uma dupla para a questão 3. Nota-se que as alunas destacam que a distância da imagem refletida ao eixo de reflexão é a mesma que a distância da figura original a esse eixo.

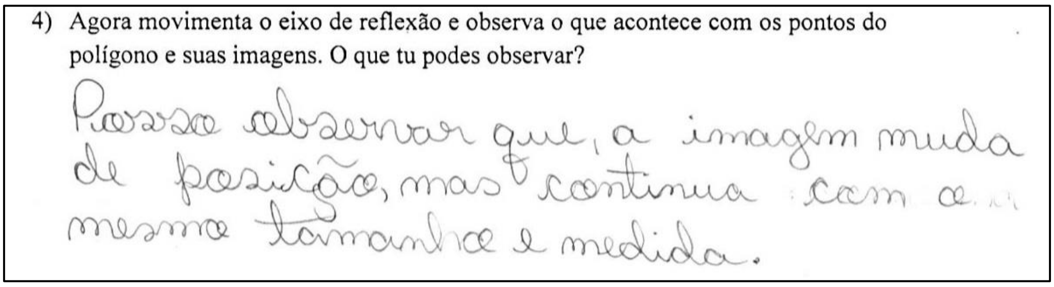

3) Agora movimenta um ponto qualquer do polígono construído e observa o que acontece com sua imagem. O que tu podes observar?

Que elas se movimentas, e a reflexão também deixando-as iguais. Quando se move o ponto original para perto do eixo de reflexão, o espaço entre eles é o mesmo do da reflexão.

Figura 31 – Resposta das alunas Susana e Amanda para a questão 3.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta: "Que elas se movimentas [sic], *e a reflexão também deixando-as iguais. Quando se move o ponto original para perto do eixo de reflexão, o espaço entre eles é o mesmo do da reflexão".*

A questão seguinte solicitava que os alunos movessem o eixo de reflexão e observassem o que ocorre com os pontos do polígono e suas respectivas imagens. Ao realizar o movimento, a principal observação feita pelos alunos foi de que as figuras se mantêm com as mesmas medidas, embora a imagem refletida mude de posição (figuras 32 e 33).


4) Agora movimenta o eixo de reflexão e observa o que acontece com os pontos do polígono e suas imagens. O que tu podes observar?

Posso observar que, a imagem muda de posição, mas continua com o mesmo tamanho e medida.

Figura 32 – Resposta da aluna Alice para a questão 4.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "Posso observar que a imagem muda de posição, mas continua com o mesmo tamanho e medida".

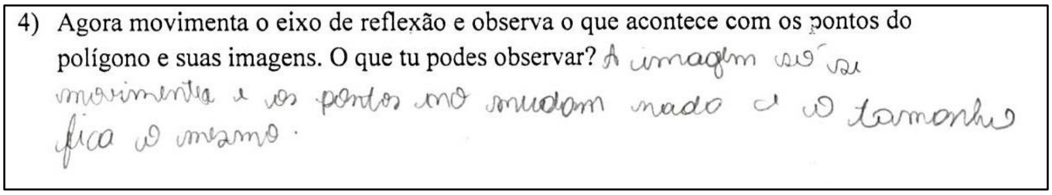

4) Agora movimenta o eixo de reflexão e observa o que acontece com os pontos do polígono e suas imagens. O que tu podes observar? A imagem só se movimenta e os pontos no mudam nado e o tamanho fica o mesmo.

Figura 33 – Resposta da aluna Kelly para a questão 4.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "A imagem só se movimenta e os pontos no [sic] mudam nada e o tamanho fica o mesmo".

Para realizarem essas observações, as alunas Alice e Kelly necessitaram observar as figuras de maneira geral e também comparar as medidas da figura antes e depois da movimentação do eixo, o que nos mostra indícios de apreensão operatória.

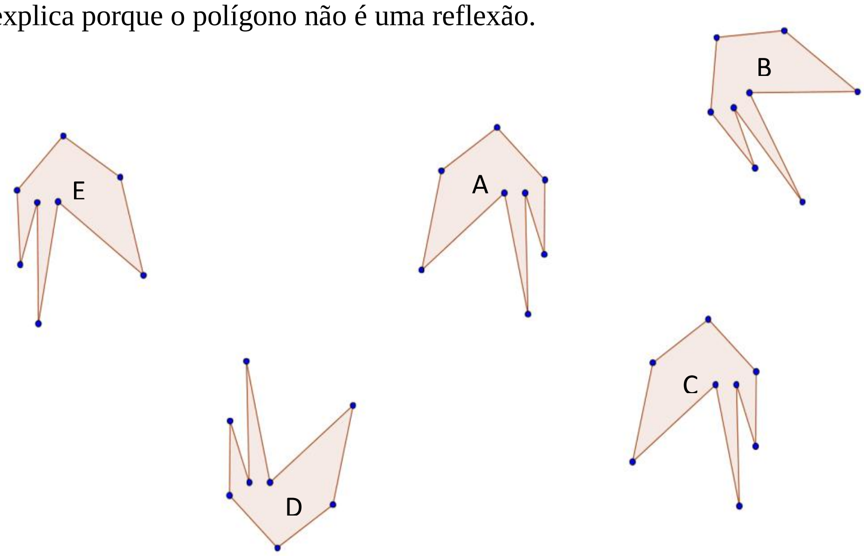
Assim que concluíram a resolução dessas atividades, os alunos foram desafiados a identificar movimentos de reflexão. Para isso, cada aluno recebeu o material mostrado a seguir (Quadro 2). Observamos que, nesse material, a região interna aos polígonos está colorida, sugerindo que a atividade se refere às regiões poligonais e não apenas aos polígonos. Essa apresentação colorida é gerada pelo *software* GeoGebra, e foi copiada nos materiais entregues aos alunos. Consideramos, contudo, que o formato não prejudicou a compreensão das tarefas, uma vez que os polígonos, ou os contornos das regiões poligonais, aparecem destacados.

Na atividade, os alunos deveriam identificar quais polígonos são uma reflexão do polígono A, chamado de polígono de referência. Para cada movimento de reflexão identificado, deveriam traçar o eixo de reflexão correspondente. Pretendeu-se também observar se o eixo de reflexão seria desenhado corretamente.

Quadro 2 – Atividade para identificação do movimento de reflexão.

Analisando o movimento de reflexão II

1) Observa os polígonos abaixo. O polígono A foi feito no GeoGebra. Vamos chamá-lo de polígono de referência. Para cada um dos outros polígonos (B, C, D e E) procura determinar se o mesmo é uma reflexão do polígono A. Se tua resposta for afirmativa, desenha o eixo de reflexão. Caso contrário, explica porque o polígono não é uma reflexão.



Fonte: arquivo pessoal do autor

Ao final desta atividade, pretendia-se que os alunos analisassem o movimento de reflexão, observando a posição do eixo de reflexão e a relação entre esse eixo, os pontos do polígono e suas imagens refletidas.

A maioria dos alunos identificou os polígonos que são reflexões do polígono A, porém poucos alunos traçaram retas que fossem equidistantes de cada ponto do polígono A e de sua respectiva imagem. Esses justificaram que escolheram um ponto do polígono e sua imagem no polígono refletido e desenharam o eixo “bem no meio deles” (expressão usada pelos alunos). Isso demonstra que, ao traçar o eixo, observaram a igualdade entre as distâncias para apenas um par de pontos. Nenhum aluno preocupou-se em medir as distâncias com uma régua. Notei que, para o desenho dos eixos de reflexão solicitados, muitos alunos posicionavam a régua entre os polígonos e a ajustavam até parecerem convencidos de que deveriam ser traçados naquela determinada posição. Na figura 34, temos a solução da atividade apresentada pela aluna Paula.

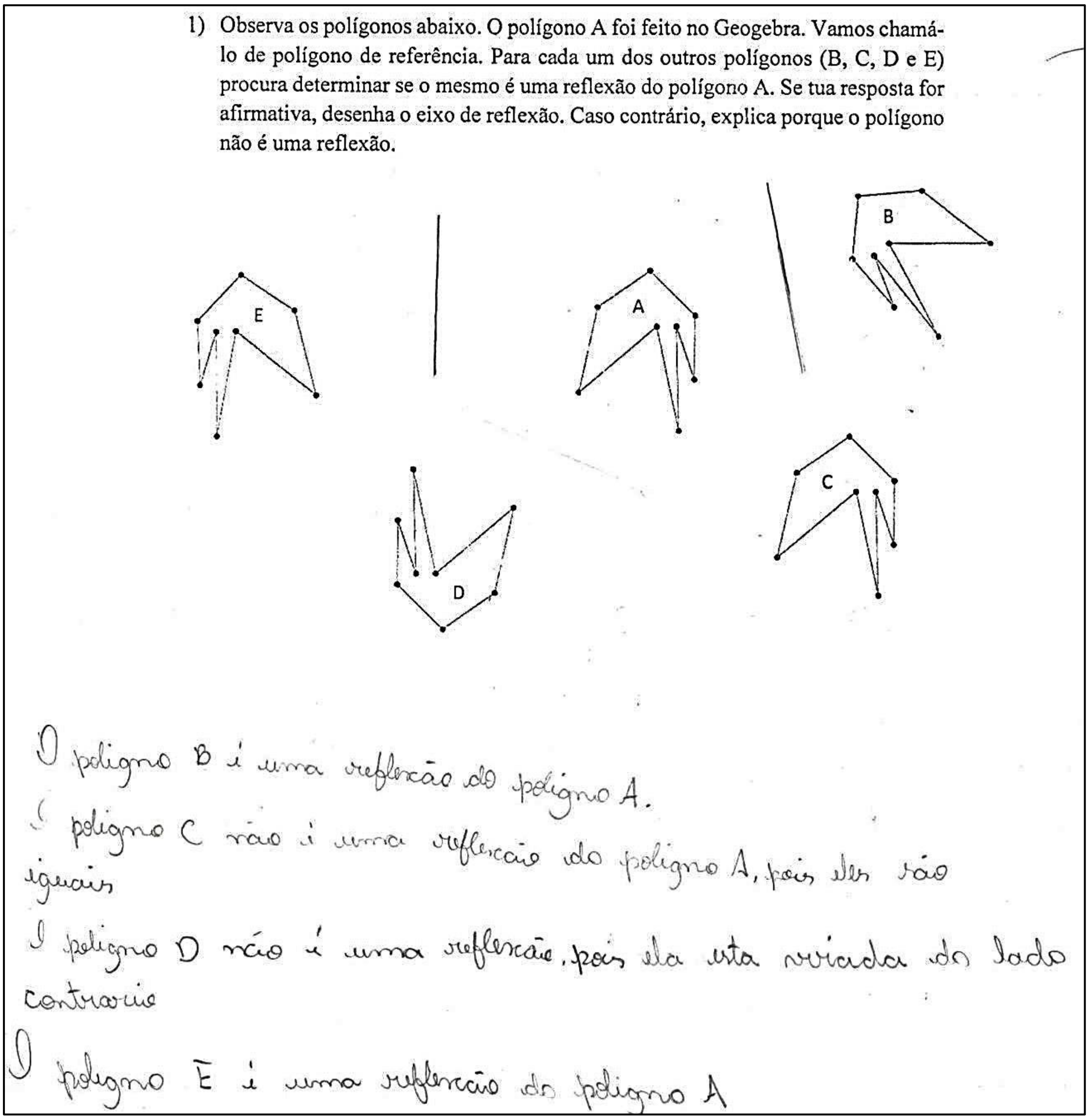


Figura 34 – Solução da aluna Paula para a atividade.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "O polígono B é uma reflexão do polígono A. O polígono C não é uma reflexão do polígono A, pois eles são iguais. O polígono D não é uma reflexão, pois ela está virada do lado contrário. O polígono E é uma reflexão do polígono A".

Paula identificou os polígonos que são reflexões do polígono A, mas a reta traçada para o caso do polígono B não corresponde ao eixo da reflexão. Para o traçado de cada reta, não houve preocupação em usar a régua para medir a distância de cada ponto do polígono e de sua respectiva imagem até essas retas, nem durante o desenho, nem para conferir.

Chama atenção também o modo como Paula justificou que o polígono C não é uma reflexão do polígono A. Ao afirmar que eles são "iguais", a aluna observa que a reflexão inverte um polígono, o que não aconteceu com o polígono C. Para o polígono D, a justificativa da aluna é semelhante. Ela observou que esse polígono está “virado ao contrário”, o que mostraria que ele não é imagem de A por uma reflexão.

A figura 35 demonstra que o uso do GeoGebra foi importante para a aluna Susana, pois é usado um fato que ela havia concluído em uma atividade anterior para justificar que os polígonos C e D não são reflexões do polígono A. Notamos que na escrita da aluna aparecem elementos do dinamismo presentes no *software*.

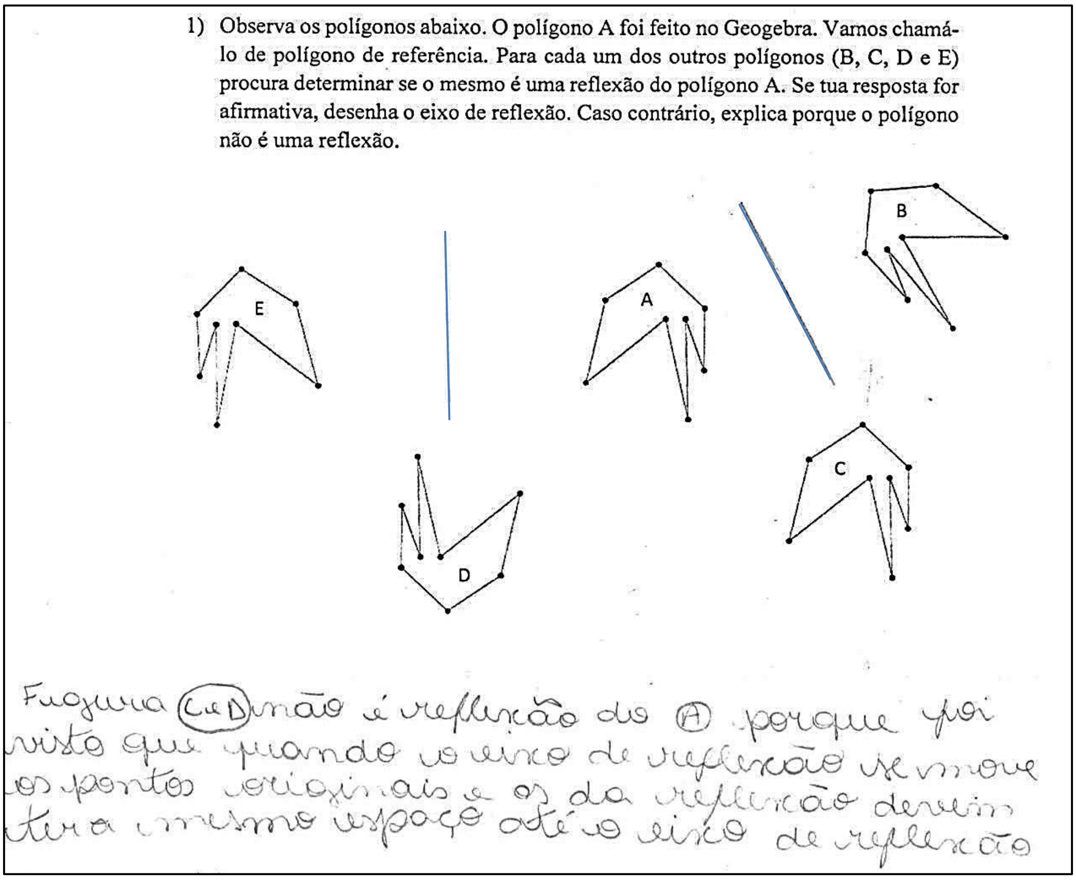


Figura 35 – Soluções de Susana para a atividade proposta.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: “Figura C e D não é reflexão do A porque foi visto que quando o eixo de reflexão se move os pontos originais e os da reflexão devem ter o mesmo espaço até o eixo de reflexão”.

Podemos verificar também que Susana desenhou os eixos de reflexão considerando que a distância de cada ponto do polígono A até o eixo deve ser igual à distância de sua respectiva imagem até esse eixo. Conforme suas explicações, Susana considerou mais de um par de pontos para seus traçados, porém utilizou a régua apenas para ajustar a posição de cada eixo. A maioria dos outros alunos considerou apenas um ponto e sua imagem para o traçado do eixo.

Outros alunos, no entanto, não identificaram os dois polígonos que são reflexão do polígono A, como podemos observar na figura 36.

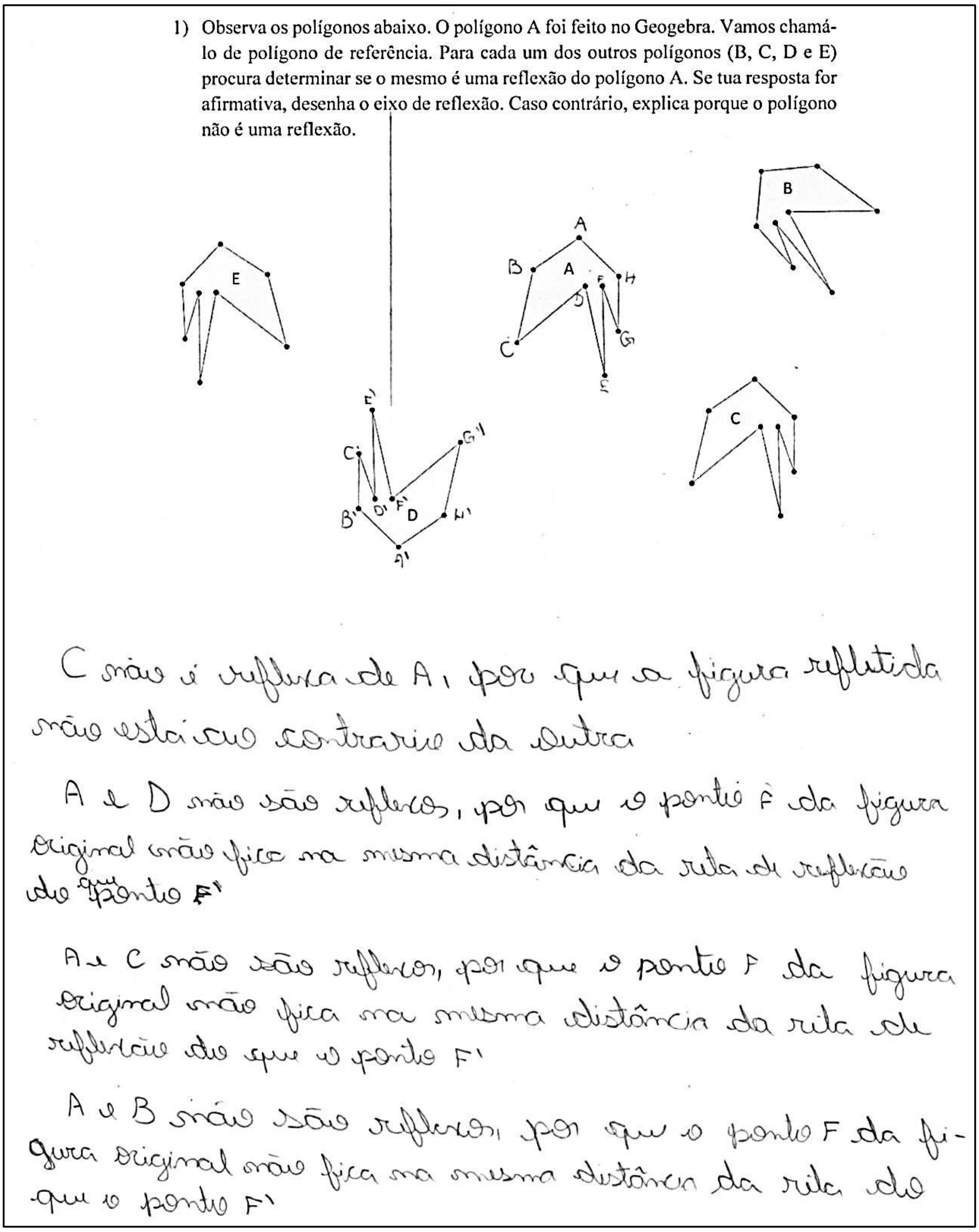


Figura 36 – Soluções de Pedro para a atividade.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno: "C não é reflexo de A, por que a figura refletida não está ao contrário da outra. A e D não são reflexos, por que o ponto F da figura original não fica na mesma distância da reta de reflexão do que o ponto F'. A e C não são reflexos por que o ponto F da figura original não fica na mesma distância da reta de reflexão do que o ponto F'. A e B não são reflexos por que o ponto F da figura original não fica na mesma distância da reta do que o ponto F'".

Verificamos que o aluno Pedro nomeou os vértices dos polígonos A e D, usando essa nomenclatura em sua justificativa para a não reflexão. Mas o único par de pontos correspondentes identificado corretamente é o par (A, A’). Para a identificação de B’, C’ e as demais imagens, ele não considera as medidas de ângulos; mas preserva uma “ordem invertida” dos pontos, como se houvesse uma reflexão. Para esses pares obtidos – (B, B’), (C, C’), e assim por diante – de fato não é possível obter uma reta que seja mediatriz dos respectivos segmentos. A conclusão é coerente com a marcação de pontos.

Já o aluno José considerou que o polígono D é uma reflexão do polígono A e traçou uma reta para justificar sua conclusão. Ao ser questionado sobre essa conclusão, o aluno justificou que há dois pontos que estão à mesma distância do eixo de reflexão traçado (um no polígono A e outro no polígono D), como mostra a figura 37.

Notamos que José considerou apenas um ponto de cada figura para analisar os polígonos A e D (aquele mais próximo do “eixo de reflexão”), desconsiderando todos os demais pontos. Já para o polígono E, houve a identificação da reflexão e o traçado da reta feito pelo aluno apresenta-se paralelo ao eixo de reflexão do polígono E em relação ao polígono A.

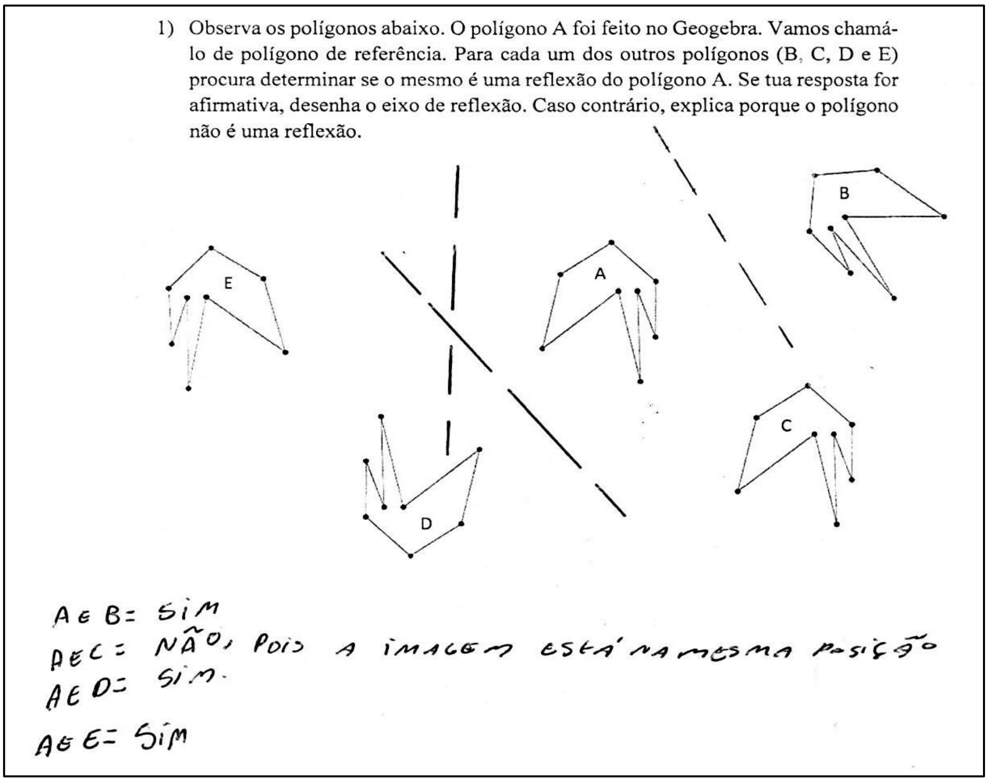


Figura 37 – Soluções de José para a atividade.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição das respostas do aluno: “A e B = sim. A e C = não, pois a imagem está na mesma posição. A e D = sim. A e E = sim”.

Após as discussões das soluções apresentadas pelos alunos, desafiei-os a produzirem uma definição para o movimento de reflexão, nos seguintes termos: como explicar para alguém o que é a reflexão de um polígono em torno de uma reta? As explicações foram embasadas na igualdade entre as distâncias dos pontos do polígono até o eixo de reflexão e as distâncias das imagens até o eixo.

Nesse momento fui ao quadro-negro e iniciei a redação da definição. Escrevi então no quadro: “Reflexão é...”. Aguardei que os alunos completassem a frase.

Pedro acrescentou: “é o movimento de uma figura de forma que a distância de um ponto da figura até o eixo seja igual à distância de sua imagem até o eixo”.

Escrevi no quadro o que Pedro disse e questionei a turma se essa escrita estava boa. A maior parte dos alunos concordou, mas Susana ressaltou que era preciso explicar que a reflexão ocorre em torno do eixo que Pedro citou.

Dessa maneira, a definição a que a turma chegou foi a seguinte (figura 38):

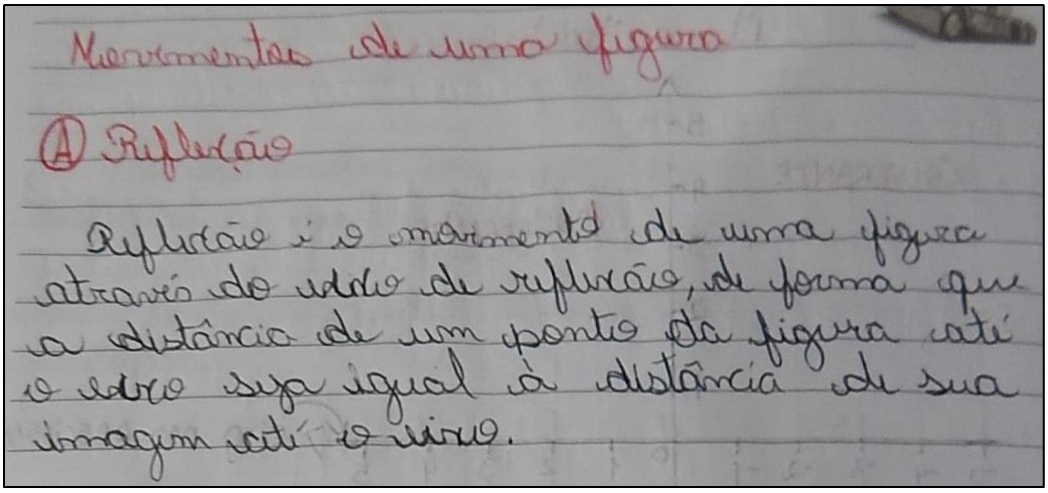


Figura 38 – Definição de reflexão estabelecida pela turma.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição: “Movimentos de uma figura. A) Reflexão é o movimento de uma figura através do eixo de reflexão, de forma que a distância de um ponto da figura até o eixo seja igual à distância de sua imagem até o eixo”.

Notamos que nessa definição não fica claro se a igualdade vale para um par de pontos ou para qualquer par de pontos, e também não fica claro se os alunos percebem que as duas condições não são equivalentes. Como essa observação não surgiu nas discussões, optei por não abordá-la nesse momento. Ainda destacamos que, embora Susana tenha dito que a reflexão ocorre *em torno do eixo,* os alunos utilizaram a expressão “*através do eixo*”. Esta linguagem é imprecisa, porém como surgiu a partir de suas discussões, preferi não alterá-la neste momento. Esta foi, portanto, uma definição considerada provisória, retomada mais adiante, numa linguagem mais precisa, na conclusão do trabalho com as isometrias.

4.2.3 Atividade 5: O Jogo das Coordenadas – primeiro contato com o plano cartesiano

Ainda sem formalizar os conceitos de coordenadas cartesianas e as nomenclaturas usuais (abscissa, ordenada, quadrantes,..), os alunos tiveram o primeiro contato com o plano cartesiano através da realização de um jogo no qual deveriam descrever um determinado polígono cujos vértices eram dados por coordenadas desse plano.

Os alunos se dividiram em duplas, sendo que cada uma era uma equipe que jogava contra as demais. Um representante (A) de uma dada dupla recebeu um polígono desenhado em um plano cartesiano com os eixos já numerados, ocupando os quatro quadrantes do plano. O outro representante (B) dessa mesma dupla tinha consigo apenas o plano cartesiano com os eixos numerados sem o desenho. O aluno A deveria descrever verbalmente a figura para que o aluno B a representasse fielmente no seu plano. Não foi permitido que o aluno B fizesse perguntas ou sugestões ao aluno A. A seguir, o aluno B deveria descrever ao aluno A outro polígono, nas mesmas condições já descritas. Chamarei de *primeira rodada*, o momento do jogo em que o aluno A descreve a figura para o aluno B e de *segunda rodada*, o momento em que o aluno B descreve o jogo para o aluno A.

Além disso, os alunos deveriam escolher dois colegas para fazerem o papel de juízes do jogo, cabendo a eles a função de validar as soluções apresentadas por cada aluno. Dois alunos da turma rapidamente manifestaram o desejo de fazerem esse papel, o que foi aceito pelos seus colegas. Todos os demais foram dispostos em duas filas, de maneira que cada dupla participante ficasse de frente uma para a outra. Desse modo, os juízes do jogo puderam verificar o andamento da atividade, acompanhando o trabalho de todas as duplas.

Em cada rodada, os alunos ganharam figuras com a mesma quantidade de vértices. Na figura 39, temos um exemplo de uma daquelas entregues.

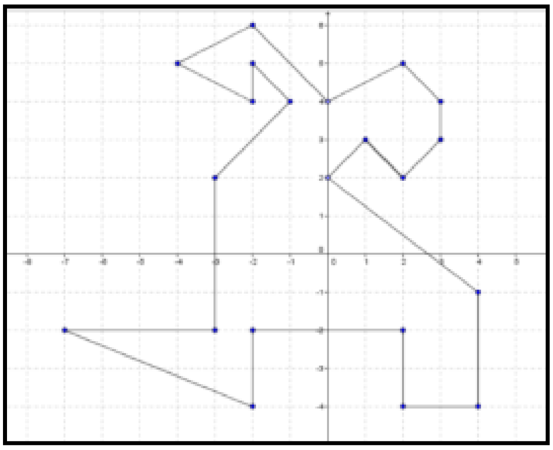


Figura 39 – Exemplo de figura entregue a uma dupla de alunos.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

A partir das análises dos acontecimentos da atividade, pretendeu-se responder às seguintes questões:

a) A estratégia usada pelo aluno A para descrever a figura foi a mesma do aluno B?

b) Os alunos fizeram uso das marcações numéricas dos eixos ao descrever as figuras?

c) Como descreveram pontos que estão situados em cada quadrante? E os pontos situados sobre os eixos?

Na primeira rodada, os alunos utilizaram frequentemente instruções como “para cima”, “para baixo”, “diagonal”, “esquerda”, “direita”. Poucos utilizaram os eixos cartesianos para orientar-se nesse momento do jogo. Aqueles que o fizeram se referiram a eles como “reta vertical” e “reta horizontal”.

A conferência foi feita por algum membro da dupla vizinha, que recebeu o desenho original e a reprodução feita. Este deveria registrar observações em uma espécie de relatório que foi fornecido pelos juízes (Quadro 3), apontando acertos e erros da dupla vizinha. A seguir, esse relatório e os desenhos foram entregues aos juízes, que validaram a correção feita.

Quadro 3 – Ficha para auxiliar os juízes na correção da atividade.

Nomes dos jogadores:
Meu nome:
Quais observações tu podes fazer para auxiliar o juiz na correção do desenho feito?

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Antes de iniciar a segunda rodada, todos os alunos fizeram combinações para as marcações dos segmentos. Já os juízes conversaram entre si antes de corrigir e decidiram juntamente com a turma que a pontuação seria feita de acordo com o número de segmentos representados corretamente.

Uma dupla, formada pelos alunos Jonas e Pedro, utilizou a numeração dos eixos na primeira rodada. Os alunos dessa dupla chamaram o número marcado no eixo das abscissas de “largura” e o número marcado no eixo das ordenadas de “comprimento” e perceberam que bastava definir as extremidades de um segmento para traçá-lo. Quando o segmento era paralelo a um dos eixos cartesianos, os alunos dessa dupla o descreveram como tendo largura de *x* unidades ou comprimento de *y* unidades. A primeira extremidade de cada segmento foi descrita sempre da mesma maneira: o aluno que estava desenhando, colocava o lápis na origem do sistema de eixos (ponto (0,0)); o aluno que estava descrevendo dizia quantas unidades o colega deveria descer ou subir e quantas unidades ele deveria ir para a direita ou para a esquerda. Para esses alunos, a origem do sistema cartesiano serviu como uma referência para a orientação no plano. Quando o segmento não era paralelo aos eixos coordenados, os alunos o descreviam como “segmento com x unidades de largura e y unidades de comprimento”. Na segunda rodada, essa dupla utilizou efetivamente a marcação numerada dos eixos, mas apenas para identificar a primeira extremidade de um determinado segmento. Assim, para se referirem, por exemplo, ao ponto (2 , 3), diziam “2 de largura e 3 de comprimento”.

A maneira como os alunos se empolgaram com o jogo proposto nessa atividade me deixou muito satisfeito. Eles tiveram autonomia para decidir a maneira de pontuar e, assim, determinar a dupla vencedora.

De maneira geral, todas as duplas representaram corretamente os polígonos que lhes foram entregues. Verifiquei que o uso das marcações numéricas nos eixos coordenados foi maior na segunda rodada. O aluno Carlos apresentou mais dificuldades para orientar-se no momento de descrever o polígono para seu colega, que insistia, dizendo: “usa os números das retas”, referindo-se às coordenadas cartesianas dos pontos.

Ao final da segunda rodada, questionei: foi mais fácil fazer a representação nessa segunda rodada? Os alunos responderam afirmativamente, pois já sabiam das “manhas” do jogo.

Ao final do jogo, todos receberam uma folha com a seguinte questão: “se esse mesmo jogo fosse feito com outra turma, o que você mudaria”? A maioria dos alunos escreveu que não mudaria nada, apenas simplificaria alguns elementos se o jogo fosse feito com alunos menores. A aluna Tatiana sugeriu que trocaria os números dos eixos por frutas e outro sugeriu a retirada dos números. Percebemos, através dessas escritas, que esses alunos não identificaram os números marcados dos eixos como medidas de distância ou de deslocamento (a partir da origem), apenas como marcadores, que poderiam ser dispostos em qualquer ordem (como as frutas). De fato, para essa atividade, o ordenamento e as medidas não eram cruciais.

Para esse momento, foi mantida a opção de não apresentar as definições e a linguagem convencionalmente adotada para as coordenadas cartesianas, que seriam apresentadas mais tarde. Revisando a atividade, observamos, contudo, que as propostas de retirar as marcações numéricas ou de substituí-las por outras poderiam ter sido questionadas, em diálogo com os alunos, e como preparação para atividades posteriores.

4.2.4 Atividade 6: O plano cartesiano e o movimento de reflexão no *software* GeoGebra

Nessa atividade, os alunos se dirigiram ao Laboratório de Informática da escola e abriram o arquivo salvo anteriormente para que pudessem recordar a atividade de reflexão de suas figuras. Após uma rápida retomada do que havia sido feito até então, foi pedido que cada aluno abrisse um novo arquivo no *software*. Quando isso foi feito, a janela fornecida pelo programa continha os eixos coordenados e a janela de álgebra, sem a malha quadriculada (figura 40). Solicitei que os alunos observassem os novos elementos presentes no ambiente do programa.

Questionei oralmente os alunos a respeito do que observaram na janela do GeoGebra:

a) O que aqueles números representam? Como estão posicionados? O que se pode dizer a respeito dessas retas?

b) Qual a relação dessas "retas numeradas" com o jogo feito na aula anterior?

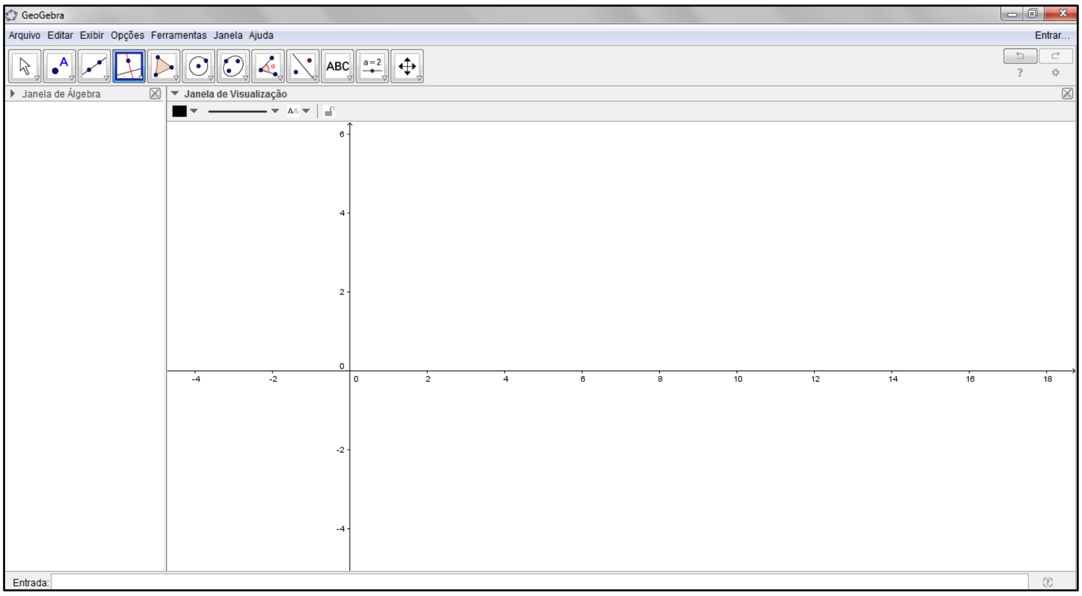


Figura 40 – Ambiente do GeoGebra exibindo a Janela de Álgebra e os eixos coordenados.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Percebi que rapidamente os alunos identificaram os eixos numerados com aqueles presentes no jogo feito na aula anterior. Ao serem questionados sobre o modo como os números estavam posicionados, Fabrício afirmou que apareciam da mesma maneira que as retas numéricas estudadas no sétimo ano (numa referência às retas numéricas usadas como apoio para o estudo dos números positivos e negativos), porém uma na horizontal e a outra na vertical. Ricardo disse que os números negativos estavam para baixo e para a esquerda e os positivos para cima e para a direita. Observei, assim, que os alunos em geral consideraram o sentido da numeração nos eixos.

Ainda sem comentar a respeito dos números e das retas que apareceram no GeoGebra, solicitei que a malha quadriculada fosse exibida para auxiliar na próxima tarefa.

Os alunos receberam o seguinte roteiro para orientá-los no seguimento da atividade (Quadro 4).

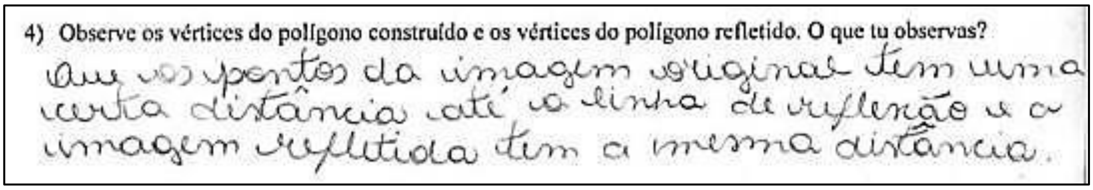
Quadro 4 – Atividades para relacionar o movimento de reflexão às coordenadas cartesianas.

Atividades – reflexão
1) Usando a ferramenta Polígono, desenhe um polígono qualquer e exiba os rótulos dos vértices.
2) Faça a reflexão desse polígono em torno da reta vertical numerada que aparece na tela. Exiba os rótulos dos vértices da figura refletida.
3) Com o auxílio da ferramenta “Mover”, modifique e movimente o polígono construído e observe as mudanças que ocorrem no polígono refletido. O que tu observas?
4) Observe os vértices do polígono construído e os vértices do polígono refletido. O que tu observas?
5) Agora, no menu “Exibir”, escolha a opção “Janela de Álgebra”. Essa opção exibe todos os objetos presentes na tela do programa, como pontos, segmentos, polígonos, etc. A seguir, responda as questões abaixo:
a) Observe, na Janela de Álgebra, o vértice A do polígono desenhado. Que relação há entre os números que aparecem e os eixos numerados?
b) Observe outros vértices do polígono desenhado e sua representação na Janela de Álgebra. O que os números que aparecem dentro dos parênteses representam? De que maneira eles estão organizados?
c) Sua dupla utilizou algo parecido para dar nome aos pontos no jogo da atividade anterior?
d) Agora observe na Janela de Álgebra o ponto A e sua imagem refletida, A’. Comparando-os, o que se pode observar? Esse fato é observado nos demais pontos refletidos?

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Por meio das atividades anteriores, pretendia-se observar quais contribuições poderiam ser feitas pelos alunos em relação ao polígono e aos eixos coordenados, se haveria identificação de relações entre vértices dos polígonos com as coordenadas nos eixos e se alguma relação seria estabelecida entre os vértices do polígono original e os vértices do polígono refletido, no sentido dos eixos coordenados.

Na resposta à questão 3, os alunos observaram que, quando se modifica ou se move o polígono construído, sua imagem refletida também se modifica ou se move segundo a alteração feita. Já na resposta ao questionamento 4, alguns alunos observaram novamente que os vértices do polígono construído estão à mesma distância do eixo de reflexão que suas respectivas imagens (figura 41).

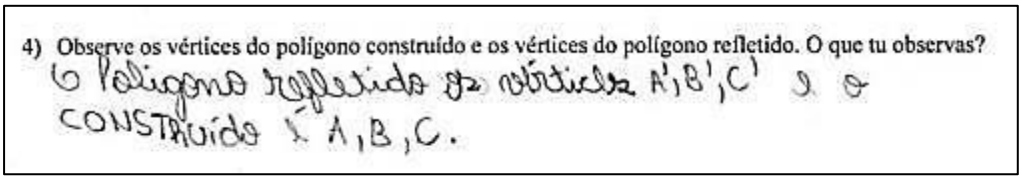

4) Observe os vértices do polígono construído e os vértices do polígono refletido. O que tu observas?

Que os pontos da imagem original tem uma certa distância até a linha de reflexão e a imagem refletida tem a mesma distância.

Figura 41 – Resposta da aluna Susana para a questão 4.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "Que os pontos da imagem original tem uma certa distância até a linha de reflexão e a imagem refletida tem a mesma distância.

Leonardo observou apenas a nomenclatura adotada pelo *software*, em que os vértices são nominados por A, B, C,.. e suas respectivas imagens por A', B', C'... (figura 42).

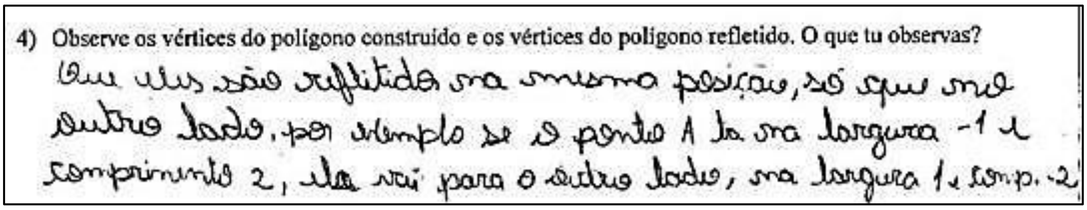

4) Observe os vértices do polígono construído e os vértices do polígono refletido. O que tu observas?

O polígono refletido os vértices A',B',C' e o CONSTRUÍDO É A,B,C.

Figura 42 – Resposta do aluno Leonardo para a questão 4.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno: "O polígono refletido os vértices A', B', C' e o construído é A, B, C".

O aluno Pedro relacionou os vértices dos polígonos com suas coordenadas cartesianas, mantendo a mesma nomenclatura utilizada no jogo (largura e comprimento) para se referir aos eixos coordenados (figura 43).

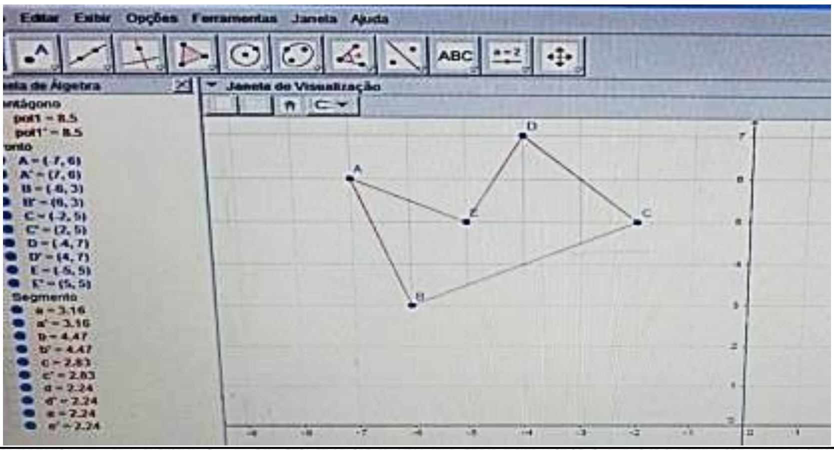

4) Observe os vértices do polígono construído e os vértices do polígono refletido. O que tu observas?

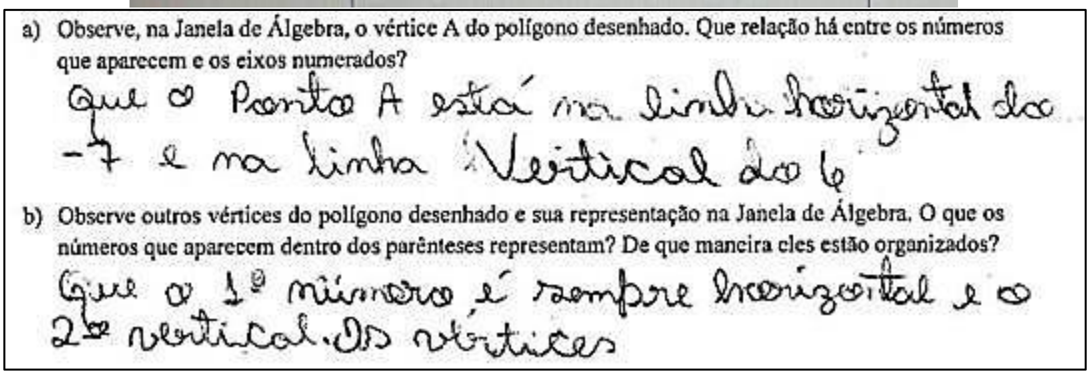
Que eles são refletidos na mesma posição, só que no outro lado, por exemplo se o ponto A ta na largura -1 e comprimento 2, ela vai para o outro lado, na largura 1 e comp. -2

Figura 43 – Resposta de Pedro para a questão 4.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno: "Que eles são refletidos na mesma posição, só que no outro lado, por exemplo, se o ponto A tá [sic] na largura -1 e comprimento 2, ela vai para o outro lado, a largura 1 e comp. -2".

Os questionamentos feitos no item 5 objetivavam relacionar os vértices às suas coordenadas cartesianas. Alguns alunos não observaram essa relação e me questionaram sobre o que deveriam responder nesse item. Orientei para que observassem o ponto A do polígono e os números correspondentes que aparecem na janela de álgebra e questionei: “o que aqueles números representam”? Após observarem atentamente, esses alunos perceberam que há uma relação entre a numeração presente na janela de álgebra e os eixos coordenados. A figura 44 mostra o polígono construído por Alice e sua resposta ao questionamento.




a) Observe, na Janela de Álgebra, o vértice A do polígono desenhado. Que relação há entre os números que aparecem e os eixos numerados?

Que o Ponto A está na linha horizontal do -7 e na linha Vertical do 6

b) Observe outros vértices do polígono desenhado e sua representação na Janela de Álgebra. O que os números que aparecem dentro dos parênteses representam? De que maneira eles estão organizados?

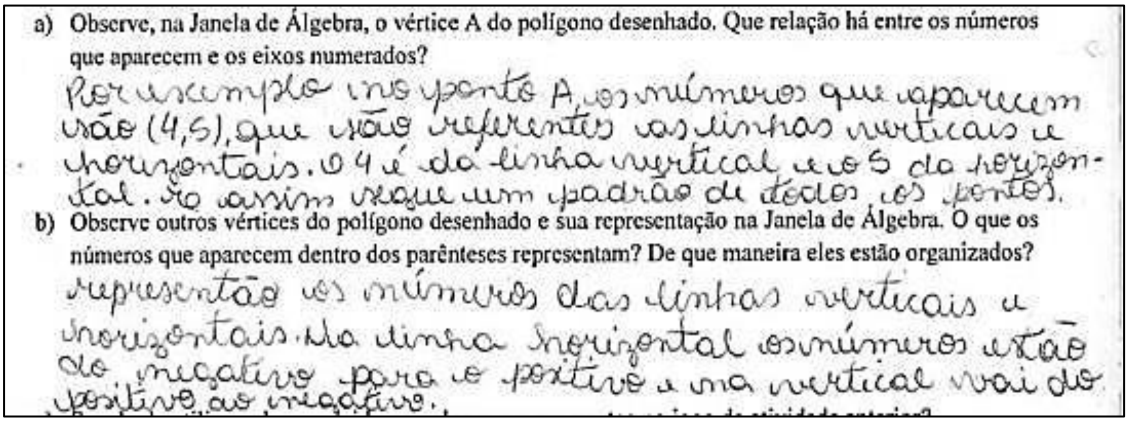
Que o 1º número é sempre horizontal e o 2º vertical. Os vértices

Figura 44 – Construção no GeoGebra e resposta da aluna Alice aos questionamentos do item 5.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna ao item a: “Que o ponto A está na linha horizontal do -7 e na linha vertical do 5”. Transcrição da resposta da aluna ao item b: “Que o 1º número é sempre horizontal e o 2º vertical. Os vértices”.

Vemos que Alice relacionou o vértice A às suas coordenadas: abscissa -7 e ordenada 6, e generalizou a ordenação dessas coordenadas no item *b*. Isso demonstra que Alice foi capaz de interpretar a figura e as representações dos pontos por pares ordenados, e estender essa interpretação para movimentações imaginadas, mostrando indícios de apreensão operatória.

A figura 45 mostra a resposta de Susana, que também se referiu aos eixos coordenados como horizontal e vertical. A aluna também observou que há um padrão: usando uma linguagem informal, já que a linguagem convencional ainda não havia sido apresentada, a aluna apresenta uma explicação que equivale a dizer que o primeiro número de cada par ordenado representa a projeção ortogonal do ponto sobre o eixo horizontal e o segundo número de cada par ordenado representa a projeção ortogonal do ponto sobre o eixo vertical.


a) Observe, na Janela de Álgebra, o vértice A do polígono desenhado. Que relação há entre os números que aparecem e os eixos numerados?

Por exemplo no ponto A os números que aparecem são (4,5), que são referentes as linhas verticais e horizontais. O 4 é da linha vertical e o 5 do horizon-tal. E assim segue um padrão de todos os pontos.

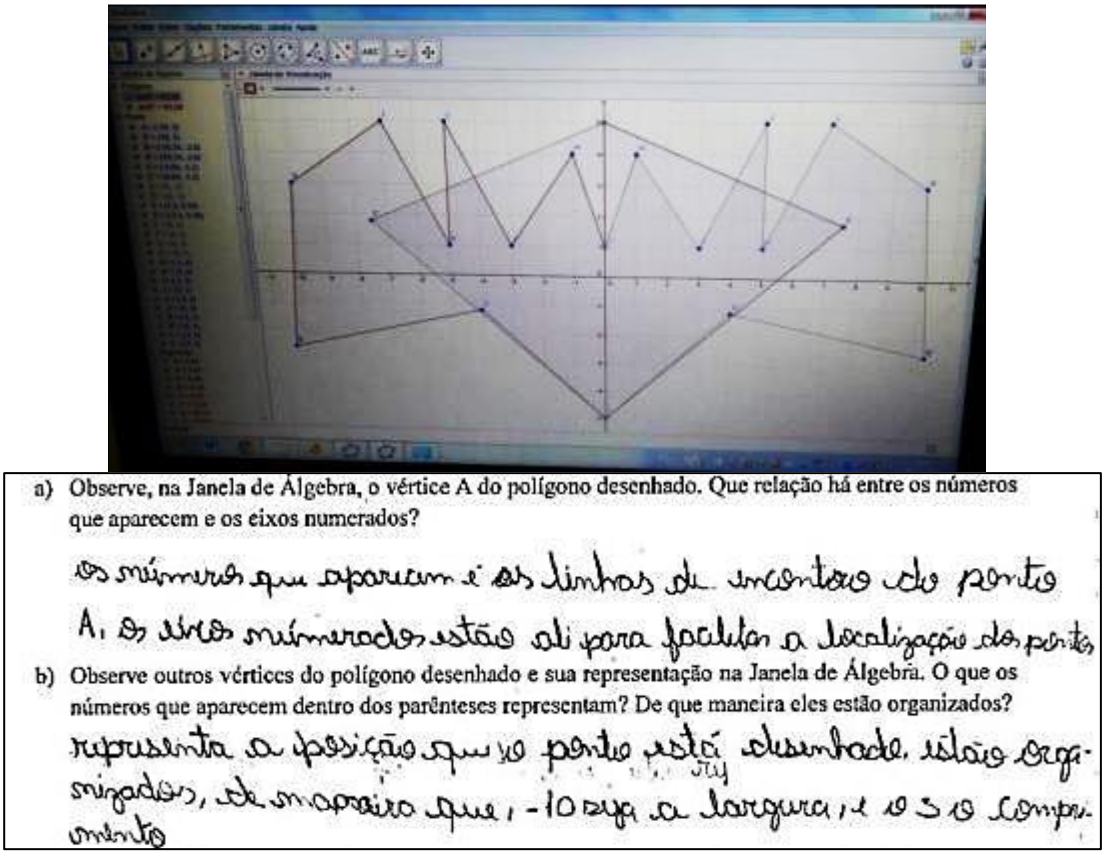
b) Observe outros vértices do polígono desenhado e sua representação na Janela de Álgebra. O que os números que aparecem dentro dos parênteses representam? De que maneira eles estão organizados?

representão os números das linhas verticais e horizontais. Na linha horizontal os números estão do negativo para o positivo e na vertical vai do positivo ao negativo.

Figura 45 – Resposta de Susana para as questões do item 5.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

> *Transcrição da resposta da aluna ao item a: "Por exemplo, no ponto A os números que aparecem são (4,5), que são referentes as linhas verticais e horizontais. O 4 é da linha vertical e o 5 da horizontal. E assim segue um padrão de todos os pontos". Transcrição da resposta da aluna ao item b: "representão [sic] os números das linhas verticais e horizontais. Na linha horizontal os números estão do negativo para o positivo e na vertical vai do positivo ao negativo".*

Já Pedro, que adotou "largura" e "comprimento" para nomear os eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente, manteve essa nomenclatura informal, uma vez que a nomenclatura convencional ainda não havia sido introduzida. A seguir (figura 46), vemos o polígono construído no GeoGebra e suas respostas às questões. Quando o aluno diz que a "largura" da posição do ponto é -10, podemos considerar que ele se refere ao comprimento (acrescido de sinal) do segmento que une o ponto até sua projeção no eixo das ordenadas, e quando diz que o "comprimento" da posição do ponto é 3, podemos considerar que ele se refere ao segmento que une o ponto até sua projeção no eixo das abscissas.



a) Observe, na Janela de Álgebra, o vértice A do polígono desenhado. Que relação há entre os números que aparecem e os eixos numerados?

os números que aparecem é as linhas de encontro do ponto A, os eixos númerados estão ali para facilitar a localização dos pontos

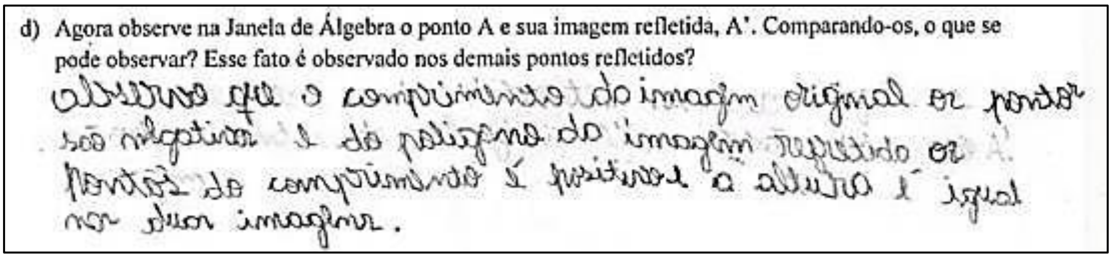
b) Observe outros vértices do polígono desenhado e sua representação na Janela de Álgebra. O que os números que aparecem dentro dos parênteses representam? De que maneira eles estão organizados?

representa a posição que o ponto está desenhado, estão organizados, de maneira que, -10 seja a largura, e o 3 o comprimento

Figura 46 – Polígono construído, uma de suas reflexões e respostas do aluno Pedro às questões do item 5.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno ao item a: "os números que aparecem é as linhas de encontro do ponto A, os eixos numerados estão ali para facilitar a localização dos pontos". Transcrição da resposta do aluno ao item b: "representa a posição que o ponto está desenhado. Estão organizados de maneira que -10 seja a largura e o 3 o comprimento".

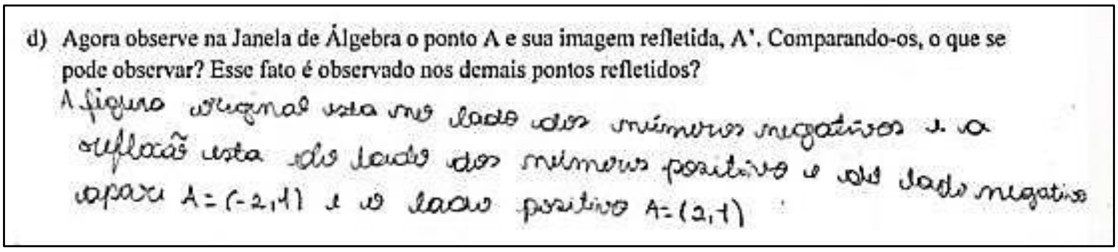
De maneira geral, os alunos perceberam que a reflexão da figura em torno do eixo das ordenadas altera o sinal das coordenadas dos vértices, mas apenas alguns perceberam que essa alteração ocorre nas abscissas dos pontos, sendo que as ordenadas se mantêm iguais. A seguir (figuras 47, 48 e 49), vemos as respostas dadas ao questionamento *d* do item 5 por três alunos. Novamente, observamos o uso de uma linguagem informal, criada pelos próprios alunos, como "comprimento da imagem" e "pontos do comprimento", uma vez que a linguagem convencional ainda não havia sido apresentada.



d) Agora observe na Janela de Álgebra o ponto A e sua imagem refletida, A'. Comparando-os, o que se pode observar? Esse fato é observado nos demais pontos refletidos?

Figura 48 – Resposta de Leonardo para o questionamento *d* do item 5.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

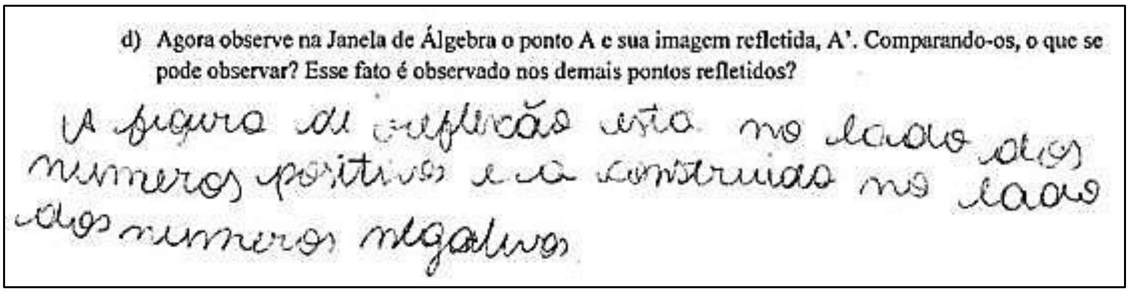
Transcrição da resposta do aluno: "Observo que o comprimento da imagem original os pontos são negativos e do polígono da imagem refletida os pontos do comprimento é positivo e a altura é igual nas duas imagens".



d) Agora observe na Janela de Álgebra o ponto A e sua imagem refletida, A'. Comparando-os, o que se pode observar? Esse fato é observado nos demais pontos refletidos?

Figura 47 – Resposta de Kelly para o questionamento *d* do item 5.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "A figura original está no lado dos números negativos e a reflexão está do lado dos números positivos e do lado negativo aparece A=(-2,1) e o lado positivo A=(2,1)".



d) Agora observe na Janela de Álgebra o ponto A e sua imagem refletida, A'. Comparando-os, o que se pode observar? Esse fato é observado nos demais pontos refletidos?

Figura 49 – Resposta de Beatriz para o questionamento *d* do item 5.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "A figura de reflexão está no lado dos números positivos e a construída no lado dos números negativos".

Após a entrega da resolução da atividade pelos alunos, discuti cada item com a turma. Os alunos foram convidados a expor suas opiniões, e o meu papel de professor foi o de mediar as discussões.

No momento de abordar o questionamento *b* do item 5, todos concordaram que o programa nomeou cada ponto usando dois números, sendo que o primeiro corresponde à projeção ortogonal do ponto sobre o eixo horizontal e o segundo à projeção ortogonal sobre o eixo vertical. Nesse momento, as nomenclaturas usuais (abscissa, ordenada, quadrante) foram apresentadas aos alunos e registradas em seus cadernos.

Já as discussões sobre a questão *d* do item 5 foram mais prolongadas. Convidei a aluna Beatriz, que escreveu a conclusão apresentada na figura 49, para expor sua opinião aos colegas. Ao término de sua fala, questionei:

– *Por que vocês acreditam que isso ocorreu*?

– *No meu isso não aconteceu* – afirmou Alice. *Foi o contrário: o primeiro valor é positivo e no refletido é negativo* – referindo-se à primeira coordenada de cada ponto dos polígonos.

Novamente, questionei:

– *O que vocês podem dizer sobre esses dois fatos observados*?

– *É que a reflexão aconteceu ao redor do eixo vertical. Tudo que estava de um lado foi pro outro, do positivo pro negativo ou vice-versa* – concluiu Jonas.

Nesse momento pensei em questionar os alunos sobre o que aconteceria se a reflexão fosse feita em torno do eixo horizontal, mas como o sinal para o intervalo já havia tocado, os alunos foram dispensados.

4.3 O ESTUDO DA TRANSLAÇÃO

4.3.1 Atividade 7: Translação no plano cartesiano

A translação foi a segunda isometria a ser desenvolvida junto aos alunos. O objetivo era abordá-la com o plano cartesiano como auxílio e, por esse motivo, optei por tratá-la após a reflexão. Nessa atividade, cada aluno recebeu uma folha com instruções que deveriam ser seguidas e com questões a serem respondidas, conforme o Quadro 5[7].

Pretendia-se verificar as propriedades do movimento de translação e o uso correto das coordenadas cartesianas em sua forma convencionada, ou seja, como pares ordenados (*a*,*b*). Para isso, no item 1, foi fornecida aos alunos uma sequência de pontos – já nomeados como A, B, C,.. – com suas coordenadas cartesianas dadas no formato de pares ordenados e um papel quadriculado, sem marcações de eixos ou numerações, para que esses pontos pudessem ser marcados.

[7] Para a questão 1, foram elaboradas situações diferentes, de modo que nos materiais entregues à turma houvesse pelo menos cinco polígonos distintos.

Quadro 5 – Relacionando o movimento de translação às coordenadas cartesianas.

Polígonos e suas coordenadas

1) Marca os pontos a seguir em um sistema de coordenadas cartesianas

A(2,3) B(4,1) C(5,-2) D(1,-2) E(-1,0) F(2,1)

2) Faça segmentos de reta unindo o ponto A ao ponto B, o ponto B ao ponto C, o ponto C ao ponto D e assim sucessivamente até unir o ponto F ao ponto A, fechando assim um polígono.
3) Agora sorteia um papel e observa a instrução escrita nele. Escreva abaixo a instrução que sorteaste e preencha a tabela. Nomeia os novos vértices de A', B', C'...

Instrução:

Vértices	A(,)	B(,)	C(,)	D(,)	E(,)	F(,)
Vértices após a instrução						

4) Agora, no mesmo sistema de eixos cartesianos, marca os novos vértices e una cada vértice ao outro assim como tu fizeste na atividade 2, até formar um outro polígono.
5) O que tu podes afirmar em relação ao polígono original e o novo polígono?
6) Podemos afirmar que o novo polígono é uma reflexão do polígono original? Por quê?
7) Faz um segmento de reta ligando os vértices A e A' e um segmento de reta ligando os vértices B e B'. O que tu observas? O que acontece se ligarmos os vértices C e C' ou então os vértices D e D'?
8) Em tua opinião, o que acontece se somarmos uma determinada quantidade x à abscissa e outra determinada quantidade y à ordenada de cada vértice do polígono original?
9) Em tua opinião, o que acontece se subtrairmos uma determinada quantidade x da abscissa e outra determinada quantidade y da ordenada de cada vértice do polígono original?

Fonte: arquivo pessoal do autor

Além disso, a atividade também teve como objetivo verificar se os alunos fariam a representação dos pontos corretamente e se a construção do plano cartesiano se mostraria necessária para o início da atividade. Ao receberem o papel quadriculado, alguns alunos questionaram se era preciso desenhar as "retas com números" – numa clara referência aos eixos coordenados. Outros alunos disseram: "Claro que precisa; como tu vai fazer os pontos sem a numeração?".

Percebi que os alunos não apresentaram dificuldades na representação de pontos no plano cartesiano, interpretando corretamente o significado de cada par ordenado. Apenas a marcação de pontos sobre os eixos coordenados gerou um pouco mais de dúvidas.

Após a conclusão do desenho do polígono, antes de iniciar o item 3, foram sorteadas as instruções a serem seguidas pelos alunos. As instruções eram as seguintes:

Soma duas unidades à abscissa e mantenha a ordenada fixa.

Subtraia duas unidades da abscissa e mantenha a ordenada fixa.

Soma duas unidades à ordenada e mantenha a abscissa fixa.

Subtraia duas unidades da ordenada e mantenha a abscissa fixa.

Soma três unidades à abscissa e mantenha a ordenada fixa.

Subtraia três unidades da abscissa e mantenha a ordenada fixa.

Soma três unidades à ordenada e mantenha a abscissa fixa.

Subtraia três unidades da ordenada e mantenha a abscissa fixa.

Cada aluno recebeu uma instrução a ser seguida. Neste item, muitos alunos apresentaram dificuldades nas operações com números negativos. Foi necessária minha intervenção para relembrar as operações de adição e subtração de números inteiros. De certa maneira, fiquei surpreso com tais dúvidas, pois essas operações foram feitas em outros momentos do ano letivo sem dificuldades, como, por exemplo, no cálculo de raízes de equações quadráticas usando a fórmula resolutiva. Talvez o obstáculo aqui tenha sido a introdução das palavras “subtraia” e “soma”. Por exemplo: muitos alunos, ao subtraírem 3 unidades do número -3, obtiveram a resposta “zero”. Quando escrevi o cálculo no quadro no formato -3 - 3, esses mesmos alunos concluíram que a operação resultava em -6. Isso mostra que registros diferentes da mesma situação são relevantes na compreensão de uma situação e que é preciso que o professor atente a esse fato; nesse caso, foi necessária a exploração da escrita -3 - 3 para que a atividade fosse respondida corretamente.

No item 4, alguns alunos iniciaram o traçado de um novo sistema de eixos cartesianos. Tive que intervir e orientar que lessem o enunciado novamente para dar seguimento à atividade. Apenas uma aluna necessitou de uma explicação mais detalhada para compreender que os novos pontos deveriam ser marcados no mesmo sistema de eixos já traçado.

No item 5, a maioria dos alunos observou que o polígono original havia se deslocado. Além disso, relacionaram corretamente esse deslocamento à operação de adição ou subtração feita à abscissa ou à ordenada dos vértices desse polígono. As figuras 50 e 51 mostram as respostas de duas alunas para esse questionamento, além de suas representações cartesianas.

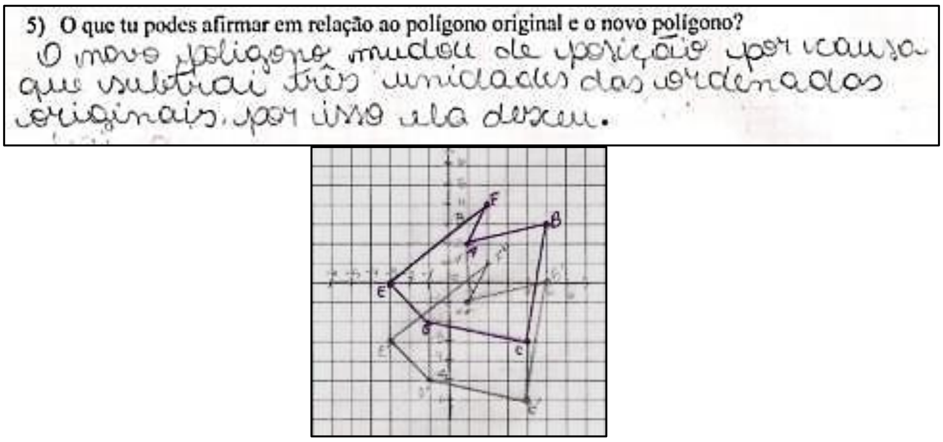


Figura 50 – Resposta ao questionamento 5 e representação cartesiana da aluna Susana, que tinha como instrução subtrair três unidades da ordenada e manter a abscissa fixa.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "O novo polígono mudou de posição por causa que subtraí três unidades das ordenadas originais, por isso ela desceu.

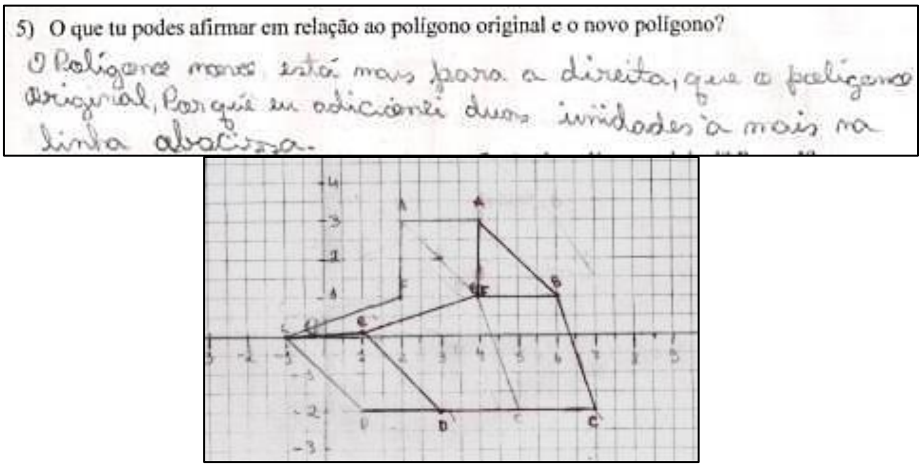


Figura 51 – Resposta ao questionamento 5 e representação cartesiana da aluna Alice, que tinha como instrução somar duas unidades à abscissa e manter a ordenada fixa.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "O polígono novo está mais para a direita que o polígono original, por que eu adicionei duas unidades a mais na linha abscissa".

Porém alguns alunos, apesar de terem observado que o polígono havia se deslocado, não relacionaram esse movimento às operações de adição ou subtração feitas em alguma das coordenadas dos vértices do polígono original. Isso foi constatado, pois os questionei oralmente e eles não souberam responder o porquê do deslocamento. As respostas a seguir (figuras 52 e 53) ilustram essas observações.

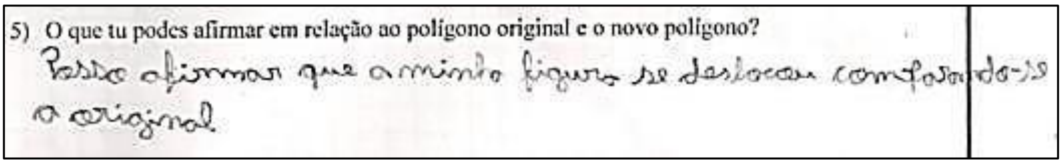


Figura 52 – Resposta de Evandro ao questionamento 5.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno: "Posso afirmar que a minha figura se deslocou comparando-se a original".

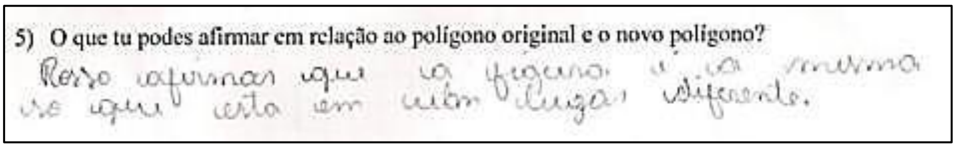


Figura 53 – Resposta de Ricardo para o questionamento 5.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno: "Posso afirmar que a figura é a mesma só que está em um lugar diferente".

A aluna Tatiana recebeu a instrução "subtraia duas unidades da ordenada e mantenha a abscissa fixa". Apesar de fazer os cálculos e representações corretamente, Tatiana não observou o efeito que essa instrução teve em seu polígono, ou seja, ela não percebeu que o polígono se deslocou duas unidades para baixo, em função da operação de subtração realizada nas ordenadas. As figuras 54 e 55 mostram a resposta da aluna para a questão 5, sua representação no plano cartesiano e suas respostas aos itens 8 e 9.

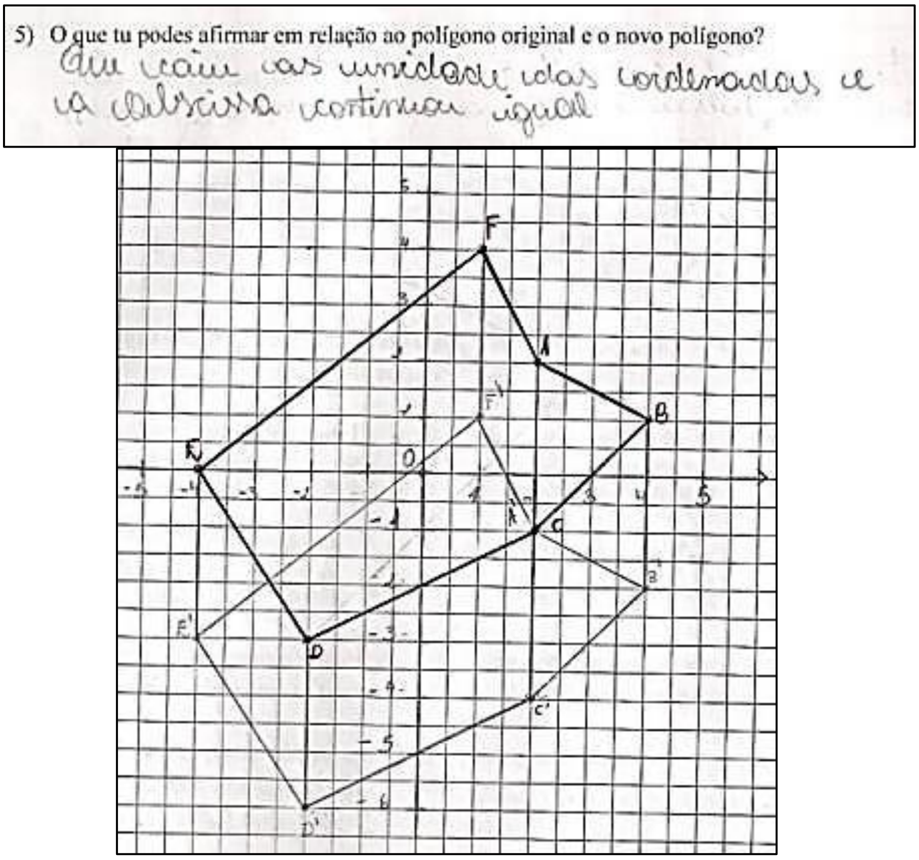
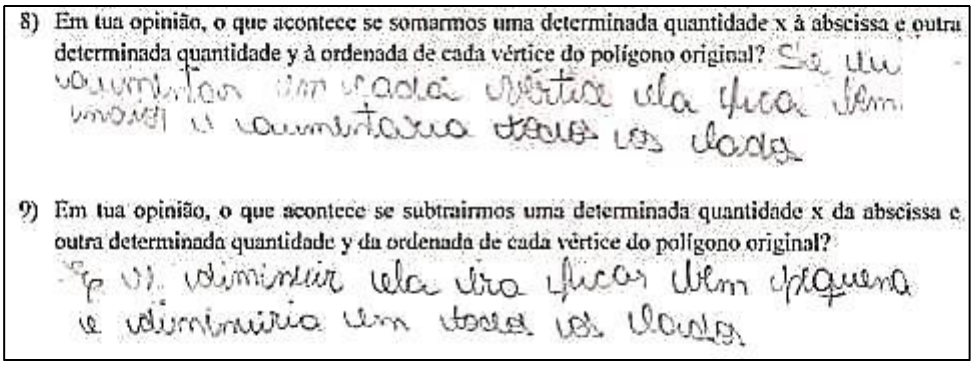


Figura 54 – Resposta de Tatiana para a questão 5 e sua representação cartesiana da situação.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "Que caiu as unidade [sic] das ordenadas e a abscissa continuou igual".


8) Em tua opinião, o que acontece se somarmos uma determinada quantidade x à abscissa e outra determinada quantidade y à ordenada de cada vértice do polígono original? Se eu aumentar em cada vértice ela fica bem maior e aumentaria todos os lados

9) Em tua opinião, o que acontece se subtrairmos uma determinada quantidade x da abscissa e outra determinada quantidade y da ordenada de cada vértice do polígono original? E se diminuir ela ira ficar bem pequena e diminuiria em todos os lados

Figura 55 – Respostas de Tatiana aos questionamentos 8 e 9.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna ao item 8: "Se eu aumentar em cada vértice ela fica bem maior e aumentaria todos os lados". Transcrição da resposta da aluna ao item 9: "E se diminuir ela irá ficar bem pequena e diminuiria em todos os lados".

Observamos que a resposta da aluna para os itens 8 e 9 não é coerente com suas anotações para o item 5 e suas observações sobre o movimento da figura. Essa resposta sugere uma dificuldade da aluna em diferenciar os números que expressam medidas dos polígonos dos números que expressam a localização dos pontos e, portanto, uma dificuldade em compreender a lógica da representação cartesiana das figuras.

No item 6, os alunos justificaram que o novo polígono não é uma reflexão do polígono original porque ele não ficou invertido.

No item 7, a maioria dos alunos observou que todos os segmentos traçados têm o mesmo comprimento, conforme demonstram suas respostas (figuras 56 e 57).

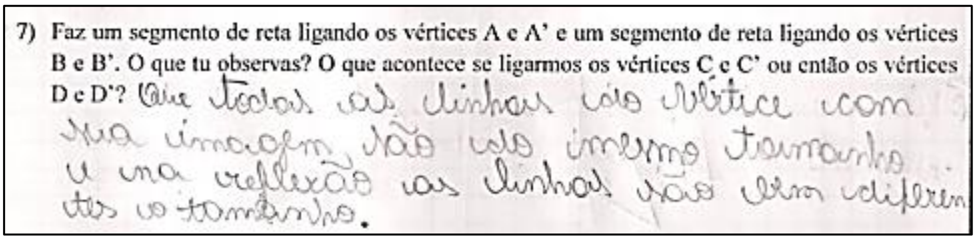

7) Faz um segmento de reta ligando os vértices A e A' e um segmento de reta ligando os vértices B e B'. O que tu observas? O que acontece se ligarmos os vértices C e C' ou então os vértices D e D'? Que todas as linhas do vértice com sua imagem são do mesmo tamanho e na reflexão as linhas são bem diferentes o tamanho.

Figura 56 – Resposta de Tatiana para o questionamento 7.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "Que todas as linhas do vértice com sua imagem são do mesmo tamanho e na reflexão as linhas são bem diferentes o tamanho".

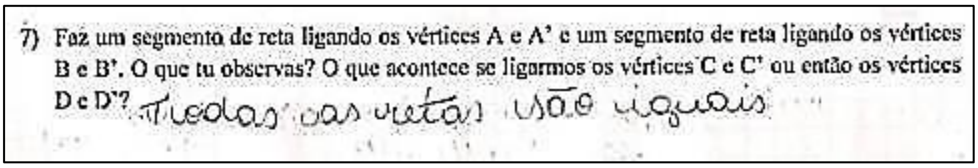

7) Faz um segmento de reta ligando os vértices A e A' e um segmento de reta ligando os vértices B e B'. O que tu observas? O que acontece se ligarmos os vértices C e C' ou então os vértices D e D'? Todas as retas são iguais

Figura 57 – Resposta de Susana para o questionamento 7.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "Todas as retas são iguais".

Interessante foi notar o comentário de Evandro de que, ao ligar os vértices do polígono original às suas respectivas imagens, os dois polígonos juntos “formam” uma única figura (figura 58). Podemos concluir que Evandro está fazendo referência a uma representação usual de prismas, que apresenta as duas bases ligadas por arestas paralelas.

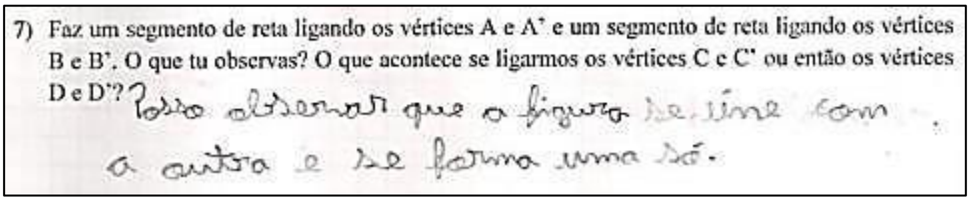
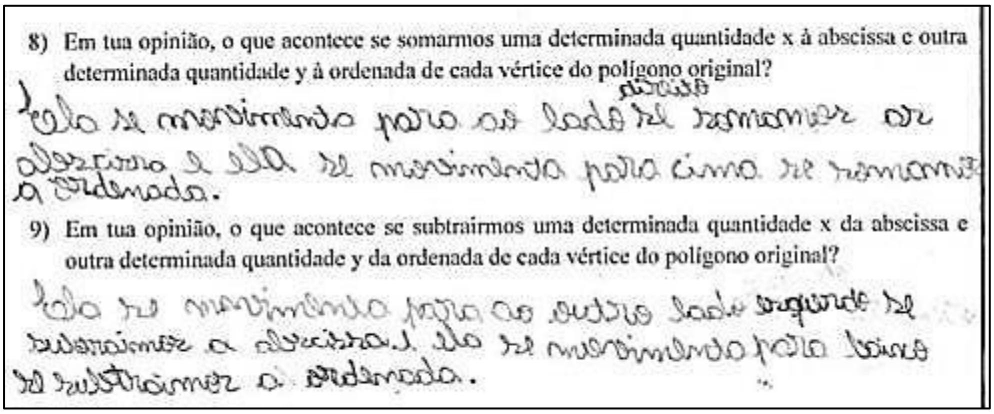

7) Faz um segmento de reta ligando os vértices A e A' e um segmento de reta ligando os vértices B e B'. O que tu observas? O que acontece se ligarmos os vértices C e C' ou então os vértices D e D'? Posso observar que a figura se une com a outra e se forma uma só.

Figura 58 – Resposta de Evandro ao questionamento 7.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno: “Posso observar que a figura se une com a outra e forma uma só”.

Esse item foi pouco discutido com os alunos visto que, em uma tarefa posterior, a ideia de vetor seria abordada e relacionada com o movimento de translação.

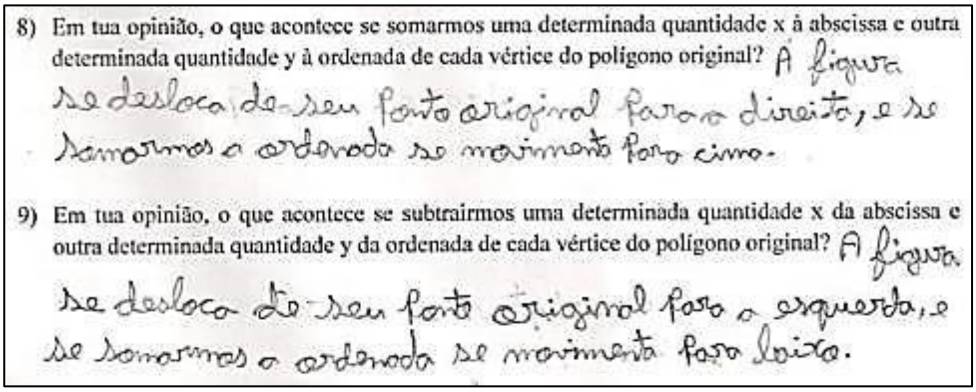
As questões 8 e 9 objetivavam uma generalização do movimento de translação com base nas operações de adição e subtração às abscissas e/ou às ordenadas. Muitos alunos observaram corretamente que a soma ou a subtração de uma quantidade fixa a cada abscissa ou a cada ordenada dos vértices de um polígono produz o efeito de movimentar esse polígono (figuras 59, 60 e 61).


8) Em tua opinião, o que acontece se somarmos uma determinada quantidade x à abscissa e outra determinada quantidade y à ordenada de cada vértice do polígono original?

9) Em tua opinião, o que acontece se subtrairmos uma determinada quantidade x da abscissa e outra determinada quantidade y da ordenada de cada vértice do polígono original?

Figura 59 – Respostas de Leonardo para as questões 8 e 9.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

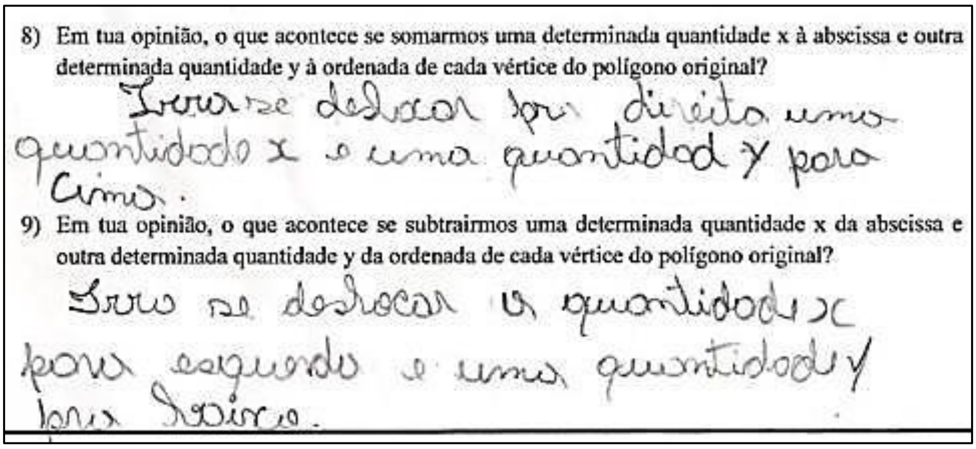
Transcrição da resposta do aluno ao item 8: “Ela se movimenta para o lado direito se somarmos as abscissas e ela se movimenta para cima se somarmos a ordenada”. Transcrição da resposta do aluno ao item 9: “Ela se movimenta para ao [sic] outro lado esquerdo se subtrairmos a abscissa e ela se movimenta para baixo se subtrairmos a ordenada”.


8) Em tua opinião, o que acontece se somarmos uma determinada quantidade x à abscissa e outra determinada quantidade y à ordenada de cada vértice do polígono original? A figura se desloca de seu ponto original para a direita, e se somarmos a ordenada se movimento para cima.

9) Em tua opinião, o que acontece se subtrairmos uma determinada quantidade x da abscissa e outra determinada quantidade y da ordenada de cada vértice do polígono original? A figura se desloca de seu ponto original para a esquerda, e se somarmos a ordenada se movimenta para baixo.

Figura 60 – Respostas de Evandro para as questões 8 e 9.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno ao item 8: "A figura se desloca de seu ponto original para a direita, e se somarmos a ordenada se movimenta para cima". Transcrição da resposta do aluno ao item 9: "A figura se desloca de seu ponto original para a esquerda, e se somarmos a ordenada se movimenta para baixo".


8) Em tua opinião, o que acontece se somarmos uma determinada quantidade x à abscissa e outra determinada quantidade y à ordenada de cada vértice do polígono original?
Irra se deslocar pra direita uma quantidade x e uma quantidad y para cima.

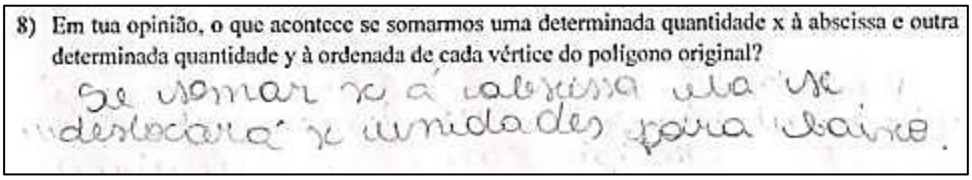
9) Em tua opinião, o que acontece se subtrairmos uma determinada quantidade x da abscissa e outra determinada quantidade y da ordenada de cada vértice do polígono original?
Irra se deslocar a quantidade x para esquerda e uma quantidade y pra baixo.

Figura 61 – Respostas de Maria para as questões 8 e 9.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna ao item 8: "Irra [sic] se deslocar pra direita uma quantidade x e uma quantidade y para cima". Transcrição da resposta da aluna ao item 9: "Irra [sic] se deslocar a quantidade x para esquerda e uma quantidade y pra baixo".

Notei que esses alunos interpretaram os enunciados dessas questões e os relacionaram com o movimento de translação do plano. Considero que os alunos mobilizaram a apreensão operatória, através de modificações posicionais, quando modificaram mentalmente a posição de uma figura imaginária e relacionaram esse movimento às coordenadas de seus vértices, generalizando as observações que haviam feito anteriormente.

Susana, que tinha como instrução subtrair três unidades da ordenada e manter a abscissa fixa, respondeu que a soma de uma quantidade *x* à abscissa desloca o polígono *x* unidades para baixo (figura 62).


8) Em tua opinião, o que acontece se somarmos uma determinada quantidade x à abscissa e outra determinada quantidade y à ordenada de cada vértice do polígono original?

se somar x á abscissa ela se deslocará x unidades para baixo.

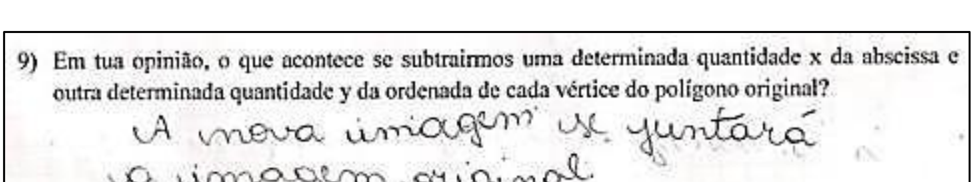
Figura 62 – Resposta de Susana à questão 8.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "Se somar x a abscissa ela se deslocará x unidades para baixo".

Questionada sobre sua resposta, Susana disse que se baseou em sua figura para responder a essa questão, ou seja, a aluna observou sua figura – que se deslocou três unidades para baixo. Sendo assim, nota-se que ela fez uma generalização incorreta, sem atentar à distinção entre abscissas e ordenadas, a partir de uma apreensão perceptiva da figura exibida na tela. Para Duval (2012),

> os alunos se apegam, na grande maioria, à apreensão perceptiva: estes não se dão conta de que uma figura deve ser olhada não mais do que através ou em função das propriedades, ou das condições formuladas como hipóteses. Isto pode ser observado pelas suas atitudes diante de um problema: eles leem o enunciado, constroem a figura e, em seguida, concentram-se na figura sem retornar ao enunciado (*Ibid.*,p. 124).

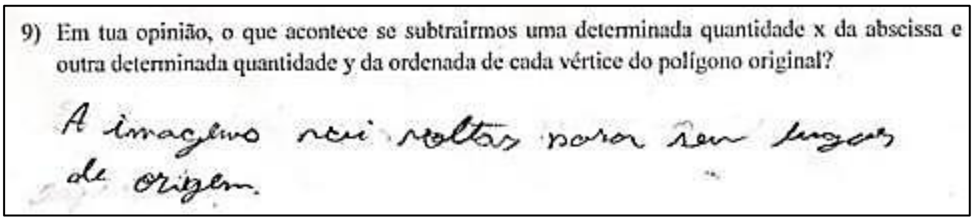
Nas respostas ao item 9, alguns alunos afirmaram que o polígono retorna à sua posição original (figuras 63 e 64). Novamente, vemos que o enunciado não foi interpretado corretamente, pois os alunos deveriam considerar o polígono original e não aquele obtido a partir do questionamento feito no item 8. Ainda assim, é interessante notar que esses alunos perceberam que a translação é reversível e que esse movimento se dá em função das operações de adição e subtração de uma mesma quantidade às abscissas e/ou ordenadas de cada vértice.


9) Em tua opinião, o que acontece se subtrairmos uma determinada quantidade x da abscissa e outra determinada quantidade y da ordenada de cada vértice do polígono original?

A nova imagem se juntará a imagem original

Figura 63 – Resposta de Susana para a questão 9.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "A nova imagem se juntará a imagem original".


9) Em tua opinião, o que acontece se subtrairmos uma determinada quantidade x da abscissa e outra determinada quantidade y da ordenada de cada vértice do polígono original?

A imagem vai voltar para seu lugar de origem.

Figura 64 – Resposta de Mauro para a questão 9.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno: "A imagem vai voltar para seu lugar de origem".

Mesmo com o desenvolvimento dessa atividade e das respostas muito interessantes, avalio que os alunos, em geral, não compreenderam a relação entre o movimento de translação e as operações de adição e/ou subtração de uma quantidade fixa às abscissas e/ou ordenadas dos vértices de um polígono. Isso pode ter ocorrido devido às dificuldades iniciais em operar com os números inteiros ou pelo fato dessa atividade ter sido bastante extensa, com muitos registros escritos e análises gráficas por parte dos alunos.

Por isso, desenvolvi uma atividade extra acerca dessa isometria na qual os alunos, em pequenos grupos, desafiariam outros grupos da turma a descrever um movimento de translação. Essa atividade está relatada a seguir.

4.3.2 Atividade 8: O desafio das translações

Nessa atividade, os alunos se reuniram em pequenos grupos, sendo que cada um recebeu uma folha onde constavam dois polígonos, sendo um a translação do outro. Coube a cada grupo observá-los e descrever qual movimento fora realizado, ou seja, como um polígono poderia ser obtido a partir do outro. Suas conclusões foram registradas em um papel separado e, a seguir, cada grupo desafiou outro a descrever na folha o mesmo movimento. Feito isso, o grupo desafiado devolveu a folha ao primeiro grupo que fez a correção da solução dada por esse grupo.

No Quadro 6, temos o exemplo de uma das atividades entregue para um dos grupos. Cabe ressaltar que cada grupo recebeu polígonos diferentes, porém cada um com o mesmo número de vértices dos outros.

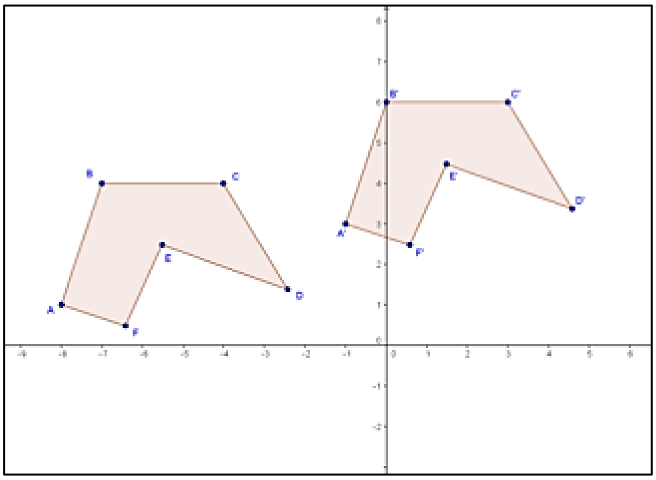
O fato de algumas coordenadas dos vértices não serem inteiras não representou um obstáculo para a resolução da atividade. Percebi também que o uso da malha quadriculada ainda foi um importante referencial, visto que dois grupos desenharam o quadriculado para melhor se orientarem nas coordenadas cartesianas. Os demais grupos utilizaram réguas para verificar as coordenadas dos pontos.

Quadro 6 – Atividade de descrição do movimento de translação.

Movimentando Polígonos no Plano Cartesiano

Seu grupo: ___________________________________

Observe o polígono ABCDEF. Discuta com seu grupo qual transformação deve ser aplicada nesse polígono para gerar o polígono A’B’C’D’E’F’, ou seja, como podemos obter o polígono A’B’C’D’E’F’ a partir do polígono ABCDEF. Registre suas conclusões em uma folha separada.



Agora desafie outro grupo da sala a descobrir a solução encontrada pelo seu grupo. Para isso, entregue essa folha a esse grupo, que deverá escrever suas conclusões abaixo. A seguir, verifique a solução apontada pelo grupo e faça anotações sobre suas observações.

Grupo desafiado: ____

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Quanto à observação do movimento de translação em termos de coordenadas, a maioria dos grupos se expressou utilizando termos como “subiu/desceu *y* unidades nas ordenadas”, “se deslocou *x* unidades para a direita/esquerda nas abscissas” ou simplesmente “aumentou/diminuiu *x* unidades nas abscissas/ordenadas”.

Uma dificuldade ainda presente para muitos alunos foi a comparação e ordenação dos números inteiros. Percebi isso assim que as discussões nos grupos começaram, pois as dúvidas pareciam ser as mesmas, como por exemplo: “se o vértice A tem abscissa -2 e sua imagem -5, podemos concluir que foi feita uma adição ou uma subtração?”. Novamente intervi e fui ao quadro negro para expor situações envolvendo relações de ordem. Lancei diversos questionamentos nesse sentido, como: “o que é maior: -5 ou -10?”; “se a temperatura de uma cidade é de -7°C e algum tempo depois é de -2°C, podemos afirmar que ela aumentou ou diminuiu?”. Após ouvirem-se as opiniões dos alunos e se discutir essas questões, a atividade foi retomada.

A figura 65 mostra a solução apresentada por um grupo de alunos para essa atividade. Para o grupo desafiado – composto pelas alunas Paula, Susana e Maria – fiz a seguinte questão: “como vocês concluíram que as ordenadas diminuíram duas unidades e as abscissas aumentaram oito unidades?”. Uma das alunas do grupo respondeu: “olhamos o ponto A e o ponto A’. O ponto A foi do -9 para o -1, aumentou 8 e do -3 para o -5, diminuiu 2”.

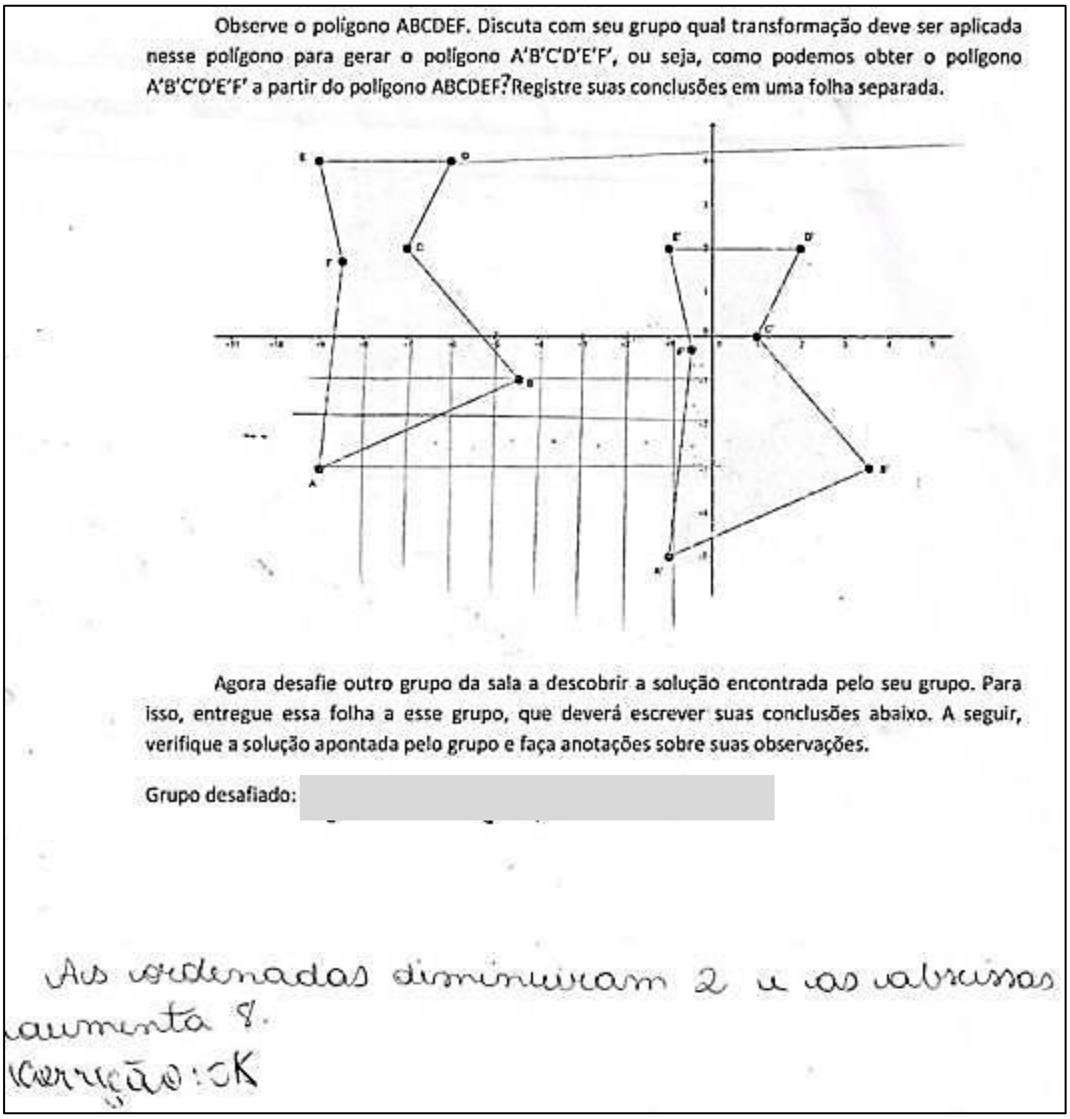


Figura 65 – Resolução da atividade 8 apresentada pelo grupo desafiado (Paula, Susana e Maria).
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do grupo desafiado: “As ordenadas diminuíram 2 e as abscissas aumenta [sic] 8. Transcrição da correção feita pelo grupo desafiante: “correção: OK”.

No próximo exemplo (figura 66) o grupo desafiado, formado pelos alunos Jonas, Tatiana e Kelly, além da malha quadriculada, também desenhou um segmento de reta orientado de B para B'.

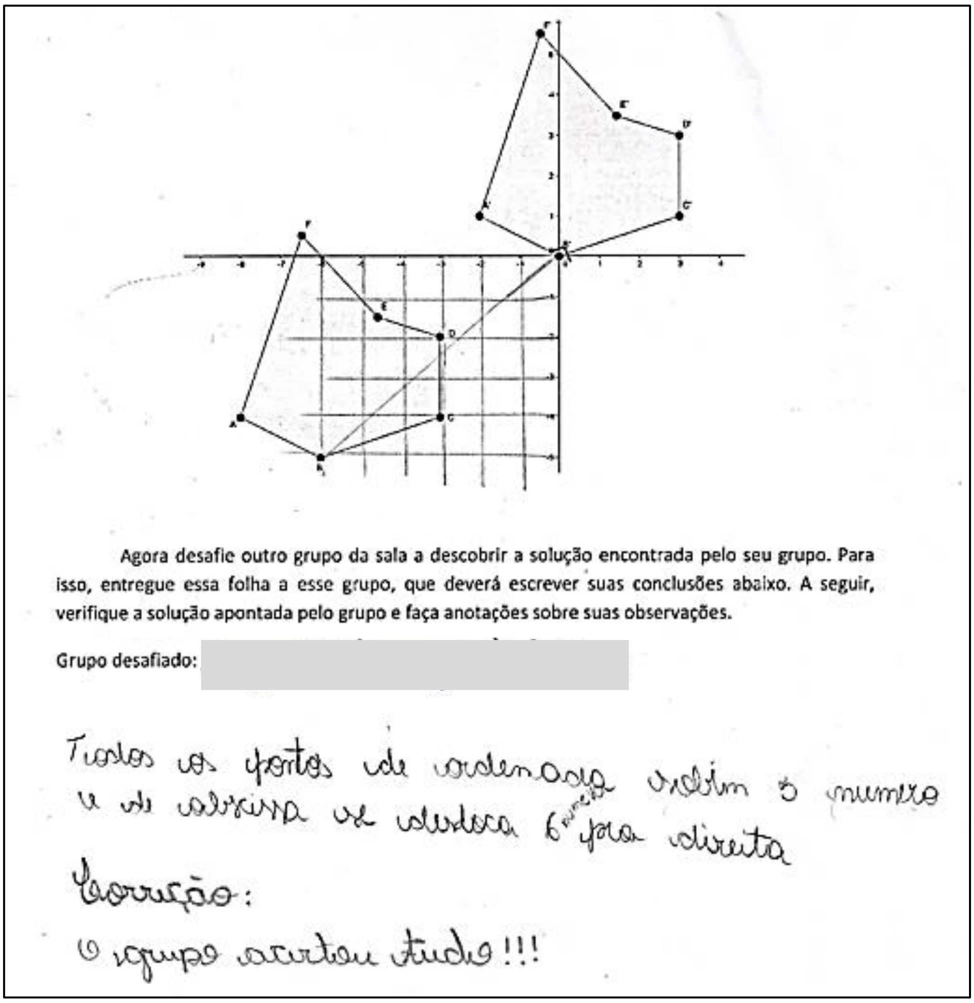


Figura 66 – Resolução da atividade 8 apresentada pelo grupo desafiado composto por Jonas, Tatiana e Kelly. Também observamos a correção feita pelo grupo desafiante.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do grupo desafiado: "Todos os pontos de ordenada sobem 5 número [sic] e de abscissa se desloca 6 número [sic] pra direita". Transcrição da correção feita pelo grupo desafiante: "Correção: O grupo acertou tudo!!!".

Questionei o grupo sobre a razão para terem traçado aquele segmento de reta. Jonas respondeu: "é que assim eu sei onde o ponto B foi parar; a seta aponta". Questionei se todos do grupo concordavam com o colega e eles afirmaram que "dessa maneira é bem mais fácil de ver como a figura se movimentou". Nota-se que a ideia utilizada pelo grupo remete ao conceito de vetor, que ainda não havia sido discutido nas aulas. Questionei o grupo sobre se essa ideia funcionaria para o ponto F, por exemplo. O mesmo aluno afirmou que não, pois "*o* [ponto] F *não fica certinho em cima das linhas*". Considero que o que ele quis afirmar é que o ponto F não possui coordenadas inteiras e, dessa maneira, em sua opinião, fica difícil identificar sua abscissa e sua ordenada, o que indica que esses alunos precisam desses números para descrever a transformação, o que decorre, em parte, da pouca familiaridade com as propriedades geométricas das figuras e com conceitos geométricos como o de paralelismo. Observamos, também, uma imprecisão de linguagem quando os alunos falam em “pontos de ordenada” e “pontos de abscissa”, ao invés de “ordenadas dos pontos” e “abscissas dos pontos”. Considero, contudo, que essa imprecisão não prejudicou a compreensão da resposta pelo grupo desafiante.

Desses dois exemplos, vê-se que os alunos analisaram o movimento que ocorreu com um dos vértices do polígono, concluindo a partir daí sobre o movimento do polígono todo. Como o texto informava que havia ocorrido um movimento do polígono ABCDEF, os alunos afirmaram que “não precisa ver o que acontece com todos os pontos, um só chega”.

A seguir (figura 67), vemos a solução da atividade apresentada pelo grupo desafiante (Ricardo, Camila e Amanda), seguida da solução apresentada pelo grupo desafiado, formado pelos alunos Mauro, Evandro e Carlos.

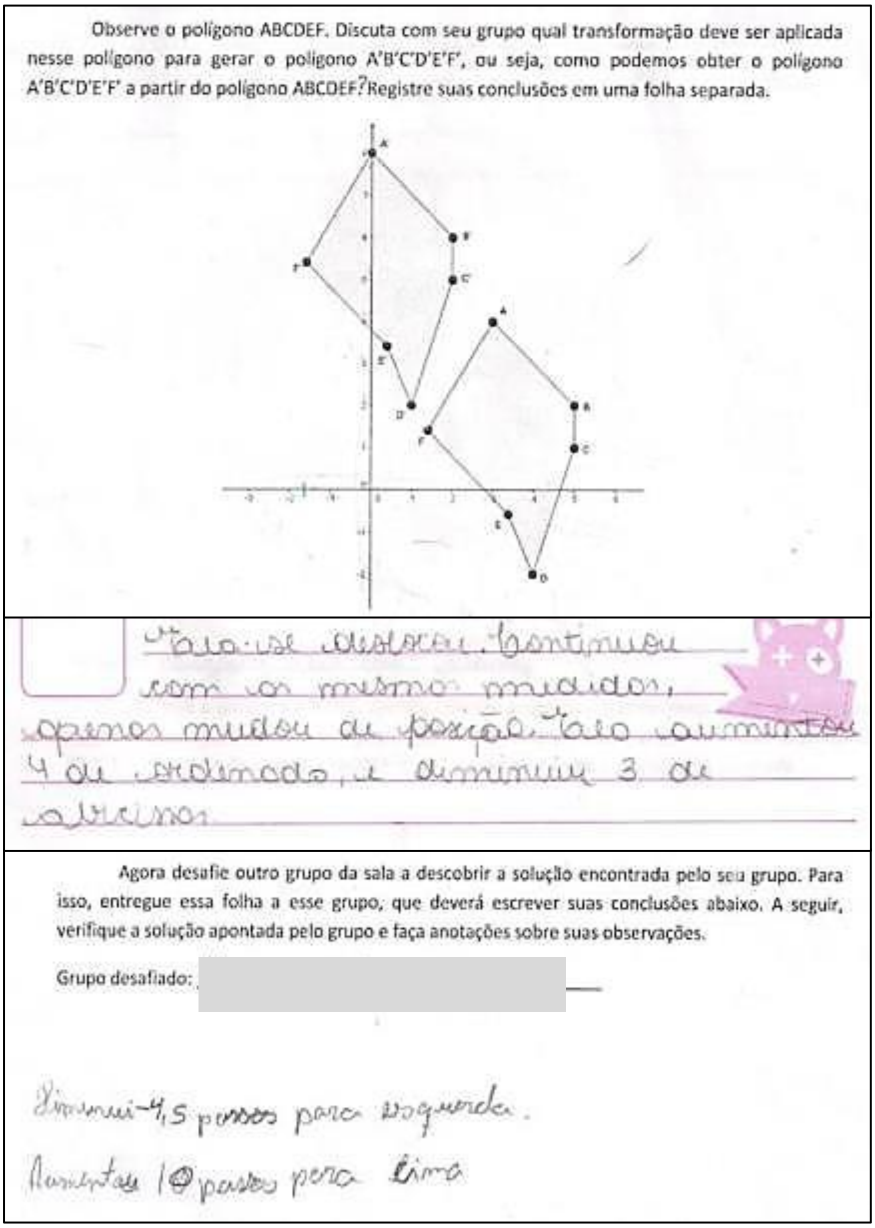


Figura 67 – Resolução da atividade 8 feita pelos grupos desafiante e desafiado.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do grupo desafiante: "Ela se deslocou. Continuou com as mesmas medidas, apenas mudou de posição. Ela aumentou 4 de ordenada e diminuiu 3 de abscissas". Transcrição da resposta do grupo desafiado: "Diminuiu -4,5 passos para esquerda. Aumentou 10 passos para cima".

O grupo que recebeu a atividade primeiramente para resolver, observou corretamente que o polígono mantém suas medidas preservadas (conceito de isometria). Já o grupo desafiado apresentou uma resposta muito diferente. Questionado sobre essa solução, Mauro afirmou que "olhou para as pontas das figuras", em referência aos pontos D e A', para afirmar que "aumentou 10 passos para cima". Essa atitude demonstra que apenas a apreensão perceptiva da figura foi evocada, sem levar em consideração suas partes constituintes. Quanto à frase "diminui -4,5 passos para a esquerda", o mesmo aluno disse: "nem eu sei o que eu escrevi ali”. Pela análise da figura e usando a mesma lógica anterior, é muito provável que o aluno tenha considerado os vértices A e F’ (ou outros dois vértices quaisquer que não correspondem um à imagem do outro). Isso mostra que não houve identificação dos vértices do polígono ABCDEF e de suas respectivas imagens, revelando que apenas a apreensão perceptiva esteve presente na resposta desse aluno.

Ao final dessa atividade, fiquei muito contente com a maneira como os alunos perceberam o movimento de translação, com base nas coordenadas cartesianas. Senti que muitos alunos que não compreendiam a relação de ordem entre números inteiros, conseguiram superar essa dificuldade. Isso se deu muito em virtude do diálogo entre os próprios alunos que, em diversos momentos, discutiam entre si sobre a solução do desafio proposto. Além disso, fizeram uso da apreensão operatória, modificando mentalmente a posição do polígono ABCDEF, e podendo, assim, concluir sobre o movimento de translação.

4.3.3 Atividade 9: O movimento de translação no *software* GeoGebra

Assim como nas atividades de estudo da reflexão, o *software* GeoGebra foi usado para analisar aspectos do movimento de translação. Nessa atividade, os alunos manipularam vetores para estabelecer uma translação no plano. Os alunos se reuniram nos mesmos trios da atividade anterior. Cada trio recebeu a folha com os polígonos ABCDEF e A’B’C’D’E’F’ que já havia recebido na aula anterior.

No ambiente do GeoGebra, mostrei aos alunos como obter a translação de um polígono qualquer. Para isso, o conceito de vetor foi mencionado, pois o *software* produz a translação segundo um determinado vetor (essa foi a primeira vez em que essa nomenclatura foi usada). Expliquei que um vetor é um segmento de reta que possui uma orientação e um sentido. Jonas, que havia desenhado um vetor na atividade anterior, rapidamente o identificou com a representação do GeoGebra.

Após mostrar um exemplo de translação de um polígono, pedi que os alunos modificassem o vetor, alterando seu “tamanho”, sua orientação e seu sentido e observassem o que acontece nos polígonos. Quando o fizeram, os alunos comentaram que o polígono transladado ficava “mais longe” ou “mais perto” do polígono original.

A seguir, solicitei que os alunos abrissem um novo arquivo. Cada trio recebeu as seguintes orientações e questões (Quadro 7). O polígono a ser representado no item 1 é o mesmo do desafio dado aos grupos na atividade anterior, apresentada no quadro 6 (p. 78).

Quadro 7 – Analisando o movimento de translação no GeoGebra.

Analisando o movimento de translação

1) Representa no GeoGebra o polígono ABCDEF de modo que ele ocupe no plano da tela a mesma posição que na folha da atividade anterior (verifica as coordenadas cartesianas de cada vértice). Exibe os rótulos dos vértices.

2) Agora, usando a opção "*Translação por um vetor*" do GeoGebra, obtém a translação desse polígono, de forma que o polígono transladado ocupe na tela a mesma posição do polígono A'B'C'D'E'F' na folha da atividade anterior. Exibe os rótulos dos vértices.

3) Usando a ferramenta "Segmento", traça os segmentos AA', BB', CC', DD', EE' e FF'. O que se pode dizer sobre esses segmentos? Que argumentos vocês podem usar para convencer os outros grupos?

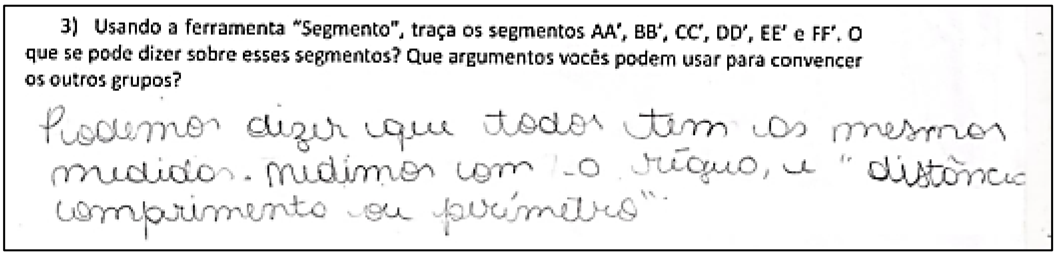
4) Agora, modifica o vetor que foi utilizado para a translação, alterando seu tamanho, seu sentido, sua orientação. O que teu grupo observa?

5) Com base nas conclusões anteriores, como o teu grupo define o movimento de translação de um polígono por um vetor?

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Nenhum grupo encontrou dificuldades ao representar os polígonos e suas translações (itens 1 e 2).

Na resolução da questão 3, à medida que os alunos traçavam os segmentos solicitados, percebiam que todos eles tinham o mesmo comprimento. A partir daí, os grupos utilizaram a ferramenta do programa "*Distância, comprimento ou perímetro*" para convencer-se de que os segmentos eram congruentes. Os alunos tiveram acesso a essa ferramenta por sugestão de um colega que baixou o programa no seu computador pessoal e que mostrou aos demais como usá-lo. Antes de conhecer a ferramenta, um dos grupos, formado pelos alunos Ricardo, Amanda e Camila, utilizou uma régua e mediu na tela do computador os segmentos, conforme descreveu na figura 68.



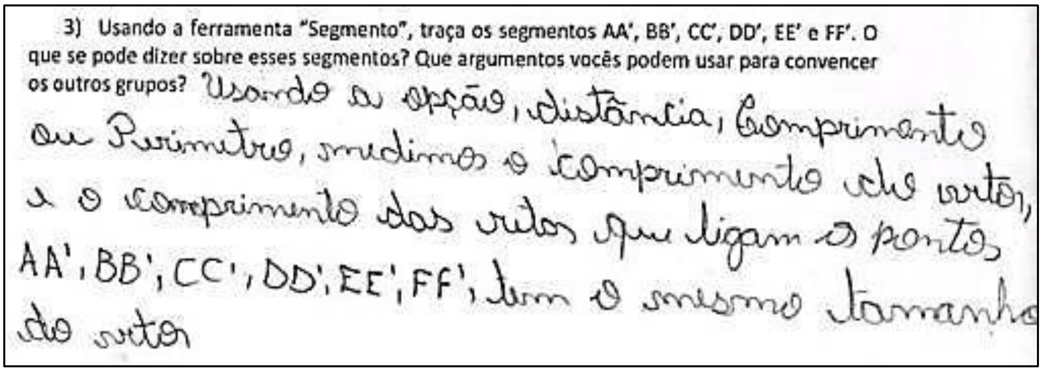
3) Usando a ferramenta "Segmento", traça os segmentos AA', BB', CC', DD', EE' e FF'. O que se pode dizer sobre esses segmentos? Que argumentos vocês podem usar para convencer os outros grupos?

Podemos dizer que todos tem os mesmos medidas. Medimos com a régua, e "distância comprimento ou perímetro"

Figura 68 – Resposta do questionamento 3 fornecida pelo grupo dos alunos Ricardo, Amanda e Camila.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do grupo: "Podemos dizer que todos tem as mesmas medidas. Medimos com a régua e 'distância, comprimento ou perímetro'".

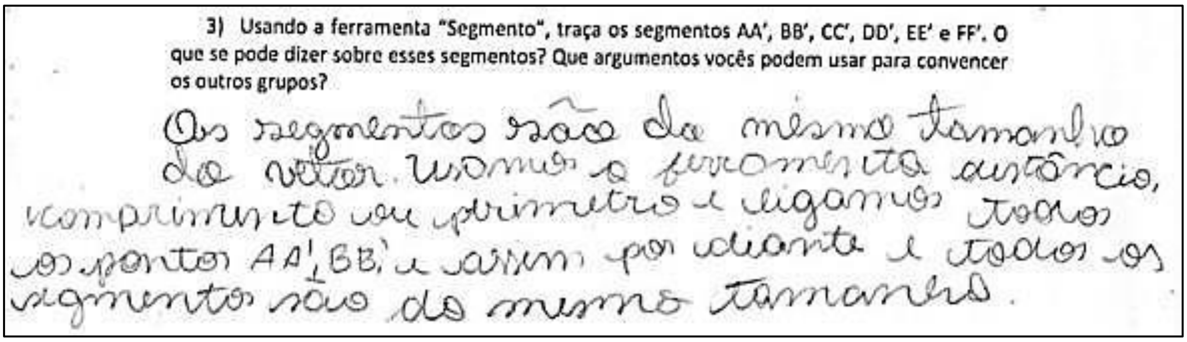
Outros grupos observaram que cada segmento tem o mesmo comprimento que o vetor da translação (figuras 69 e 70).



3) Usando a ferramenta "Segmento", traça os segmentos AA', BB', CC', DD', EE' e FF'. O que se pode dizer sobre esses segmentos? Que argumentos vocês podem usar para convencer os outros grupos? Usando a opção, distância, Comprimento ou Perímetro, medimos o comprimento do vetor e o comprimento das retas que ligam os pontos AA', BB', CC', DD', EE', FF', tem o mesmo tamanho do vetor

Figura 69 – Resposta ao questionamento 3 do grupo formado pelos alunos José, Pedro e Fabrício.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do grupo: "Usando a opção distância, comprimento ou perímetro, medimos o comprimento do vetor e o comprimento das retas que ligam os pontos AA'. BB', CC', DD', EE', FF', tem o mesmo tamanho do vetor".



3) Usando a ferramenta "Segmento", traça os segmentos AA', BB', CC', DD', EE' e FF'. O que se pode dizer sobre esses segmentos? Que argumentos vocês podem usar para convencer os outros grupos?

Os segmentos são do mesmo tamanho do vetor. Usamos a ferramenta distância, comprimento ou perímetro e ligamos todos os pontos AA', BB' e assim por diante e todos os segmentos são do mesmo tamanho.

Figura 70 – Resposta ao questionamento 3 do grupo formado pelos alunos Beatriz, Leonardo e Alice.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do grupo: "Os segmentos são do mesmo tamanho do vetor. Usamos a ferramenta distância, comprimento ou perímetro e ligamos todos os pontos AA', BB' e assim por diante e todos os segmentos são do mesmo tamanho".

Na explicação a seguir (figura 71), quando se refere ao vetor ter "4 de ordenada e 7 de abscissa", considero que o grupo está se referindo às projeções ortogonais desse vetor sobre os eixos cartesianos.

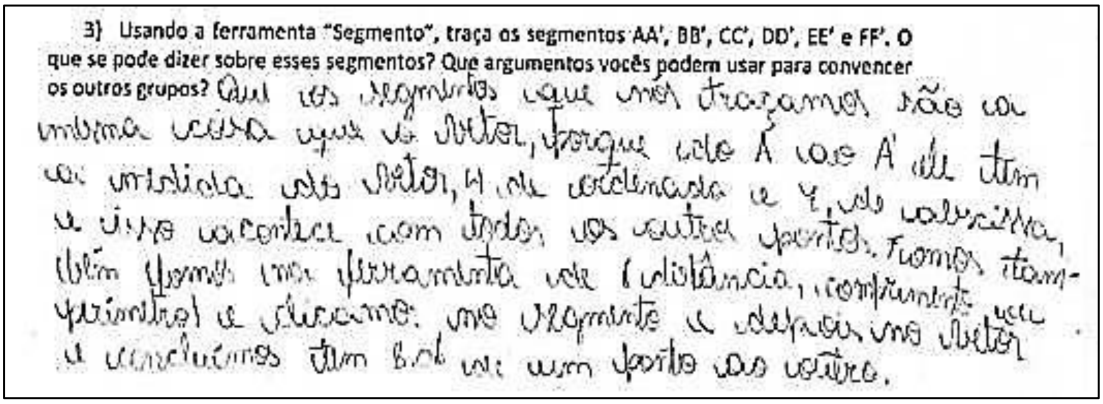


Figura 71 – Resposta ao questionamento 3 dada pelo grupo formado pelos alunos Jonas, Tatiana e João.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do grupo: "Que os segmentos que nós traçamos são a mesma coisa que o vetor, porque do A ao A' ele tem a medida do vetor, 4 de ordenada e 7 de abscissa, e isso acontece com todos os outros pontos. Fomos também fomos [sic] na ferramenta de (distância, comprimento ou perímetro) e clicamos no segmento e depois no vetor e concluímos tem 8,06 de um ponto ao outro".

A figura 72 mostra a representação do polígono, sua translação e as medidas dos segmentos que unem cada vértice à sua imagem, além da medida do vetor utilizado nesse movimento. Essa construção foi feita pelo mesmo grupo cuja resposta ao item 3 está mostrada na figura 68. A medida mostrada na imagem, 7,81, difere daquela descrita na resposta do grupo, pois os alunos manipularam o vetor da translação após redigirem a resposta.

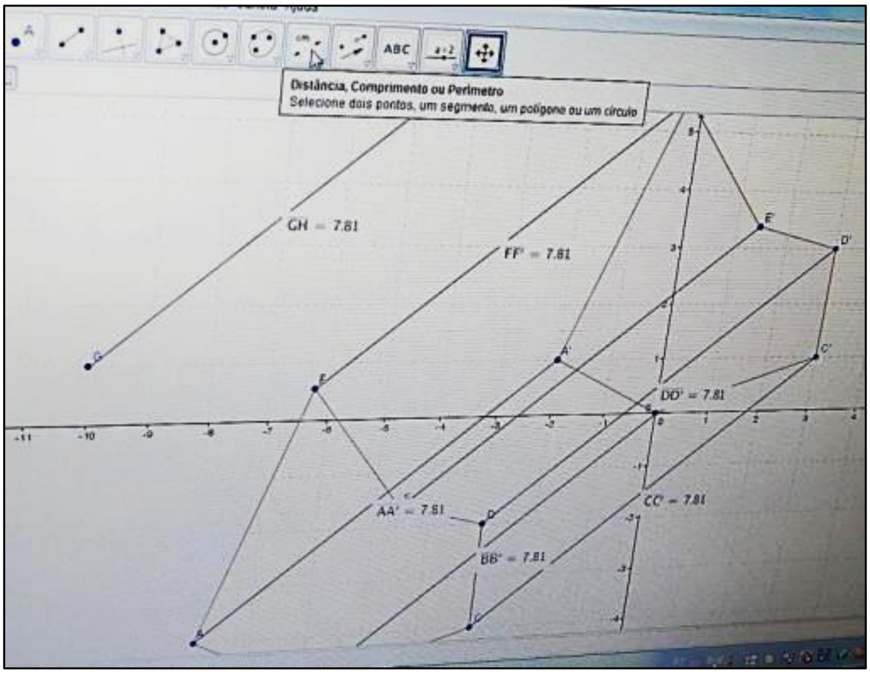
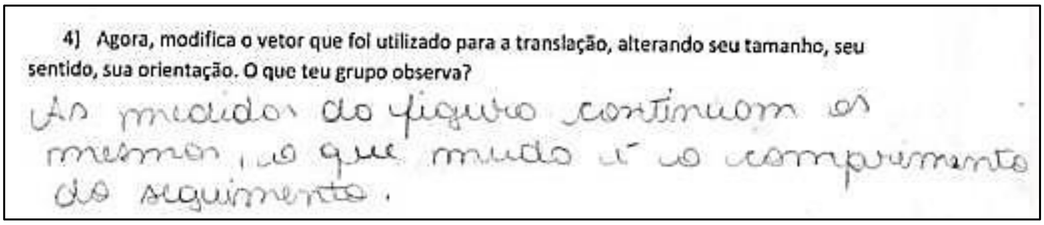


Figura 72 – Construção no GeoGebra feita pelo grupo de alunos Jonas, Tatiana e João.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Nas respostas à questão 4, os alunos observaram que, ao modificar o vetor, as medidas dos polígonos não se alteram; o que se modifica são apenas os comprimentos dos segmentos que unem cada vértice do polígono à sua imagem (figuras 73 e 74).


4) Agora, modifica o vetor que foi utilizado para a translação, alterando seu tamanho, seu sentido, sua orientação. O que teu grupo observa?

As medidas da figura continuam as mesmas, o que muda é o comprimento do seguimento.

Figura 73 – Resposta ao questionamento 4 fornecida pelo grupo de alunos Amanda, Camila e Ricardo.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do grupo: "As medidas da figura continuam as mesmas, o que muda é o comprimento do seguimento [sic]".

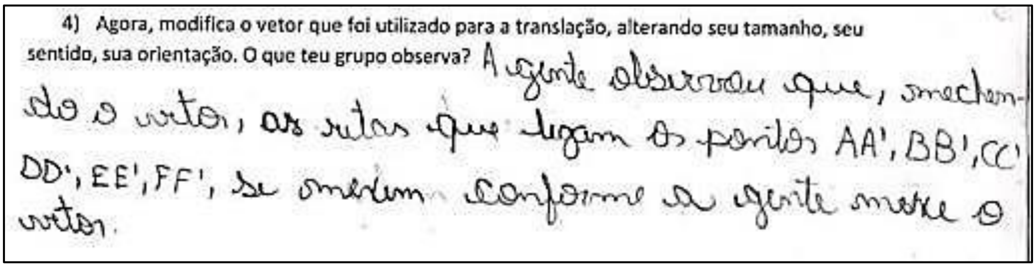

4) Agora, modifica o vetor que foi utilizado para a translação, alterando seu tamanho, seu sentido, sua orientação. O que teu grupo observa? A gente observou que, mechendo o vetor, as retas que ligam os pontos AA', BB', CC' DD', EE', FF', se mexem conforme a gente mexe o vetor.

Figura 74 – Resposta ao questionamento 4 dada pelo grupo de alunos José, Pedro e Fabrício.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do grupo: "A gente observou que, mechendo [sic] o vetor, as retas que ligam os pontos AA', BB', CC', DD', EE', FF', se mexem conforme a gente mexe o vetor".

Na questão 5, os alunos foram desafiados a definir o movimento de translação. Algumas das definições dadas pelos grupos estão mostradas a seguir (figuras 75, 76 e 77).

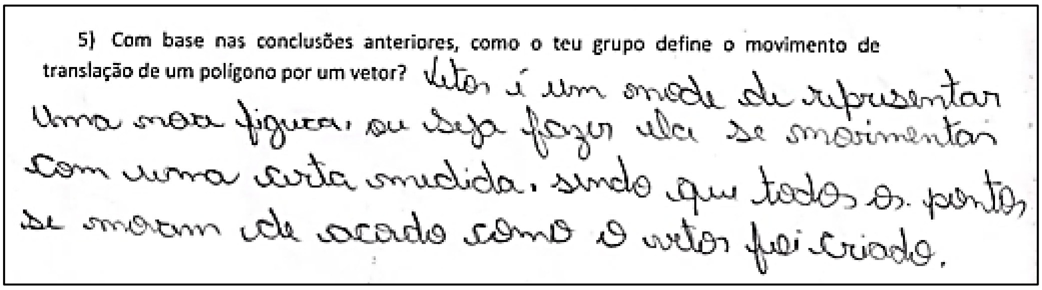

5) Com base nas conclusões anteriores, como o teu grupo define o movimento de translação de um polígono por um vetor? Vetor é um modo de representar uma nova figura, ou seja fazer ela se movimentar com uma certa medida. sendo que todos os pontos se movam de acordo como o vetor foi criado.

Figura 75 – Definição de translação dada pelo grupo de alunos José, Pedro e Fabrício.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do grupo: "Vetor é um modo de representar uma nova figura, ou seja, fazer ela se movimentar com uma certa medida, sendo que todos os pontos se movam de acordo com o vetor foi criado".

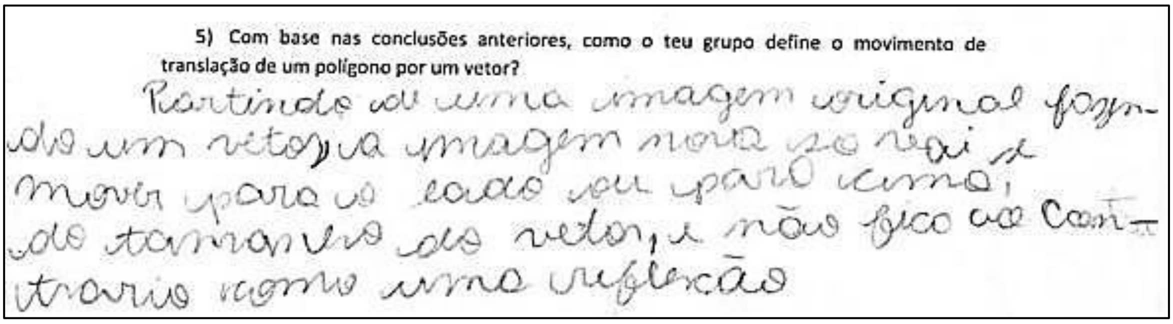

5) Com base nas conclusões anteriores, como o teu grupo define o movimento de translação de um polígono por um vetor?

Figura 76 – Definição de translação dada pelo grupo de alunos Beatriz, Leonardo e Alice.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do grupo: "Partindo de uma imagem original fazendo um vetor, a imagem nova só vai se mover para o lado ou para cima, do tamanho do vetor, e não fica ao contrário como na reflexão".

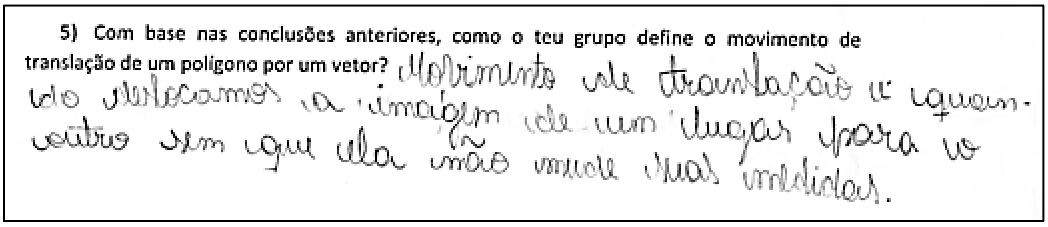

5) Com base nas conclusões anteriores, como o teu grupo define o movimento de translação de um polígono por um vetor?

Figura 77 – Definição de translação dada pelo grupo de alunos Jonas, Tatiana e João.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do grupo: "Movimento de translação é quando deslocamos a imagem de um lugar para o outro sem que ela não mude suas medidas".

Os alunos perceberam que o movimento de translação não altera as medidas de uma figura. Esse fato é importante, pois pretendia-se definir a congruência de polígonos a partir das transformações isométricas.

Partindo das escritas dos alunos, procurei incentivar a turma a chegar a uma "definição" única para a translação para que pudesse ser registrada nos cadernos. Apresentei o seguinte questionamento: "como vocês diriam o que é o movimento de translação para uma pessoa que nunca ouviu falar nisso?". Nesse momento, todos os alunos procuraram se manifestar; cada grupo querendo que sua definição fosse a definitiva.

Um dos grupos destacou que para definir o que é translação, é necessário primeiramente definir o que é vetor. Nas palavras de Fabrício: "quem ler a palavra vetor não vai saber o que é. Por isso precisa dizer primeiro o que é vetor". Todos os demais alunos concordaram com essa observação e, a partir daí, procuraram, coletivamente, uma maneira de definir vetor.

Então pedi que cada grupo lesse para os demais colegas qual a definição dada para o movimento de translação e fui registrando cada uma delas no quadro-negro. Questionei os alunos sobre quais palavras eram as mais citadas nas escritas dos grupos. Os alunos notaram que “deslocar”, “mover” e “movimentar” eram vocábulos que apareciam praticamente em todas. Além disso, os alunos destacaram que a figura transladada não altera suas medidas e que o deslocamento da figura depende do vetor. A partir daí, pedi que os alunos formulassem uma frase para definir o que é translação. Nesse momento, deixei que conversassem entre si. Pedro liderou as discussões e registrou as opiniões dos colegas em seu caderno até que, após cerca de dez minutos, a turma concordou sobre a “melhor” definição para translação, mostrada na figura 78.

Notamos, nessa escrita, que os alunos utilizaram um registro figural para complementar a definição. Por ora, essa foi a definição adotada para translação. Observamos que, nessa definição, não há referência ao comprimento do vetor. Mais adiante, ao final do trabalho com as isometrias, a definição foi revisada.

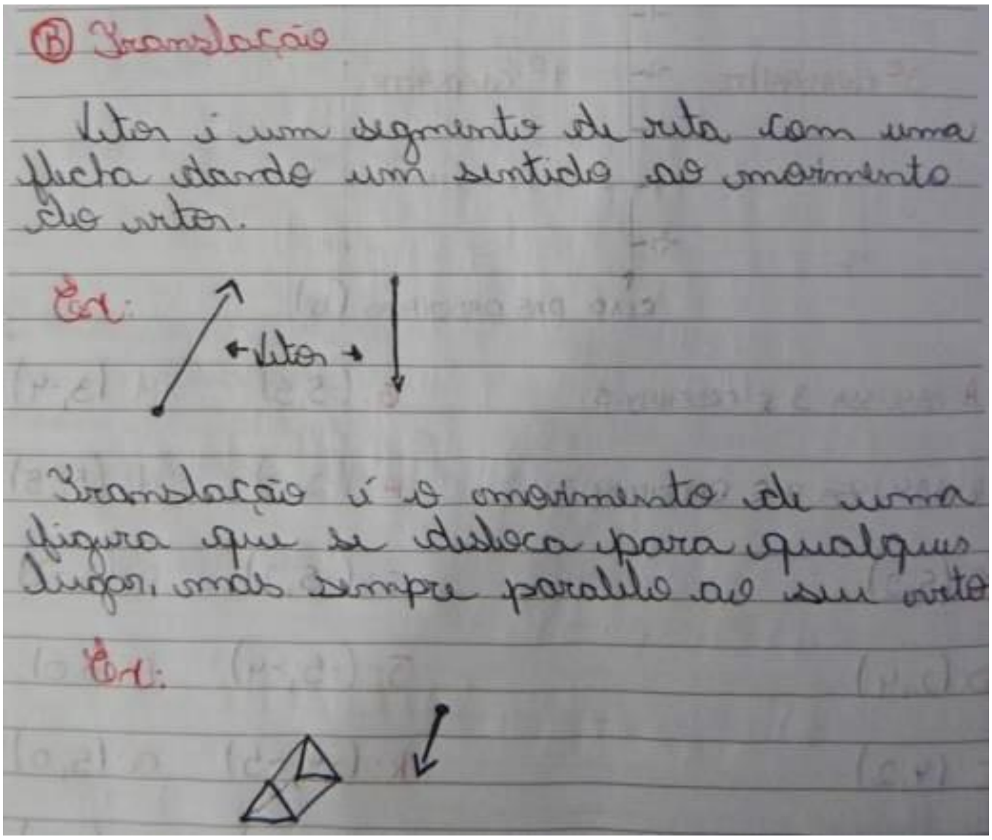


Figura 78 – Definição de translação construída pelos alunos da turma.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição: “B Translação. Vetor é um segmento de reta com uma flecha dando um sentido do movimento do vetor. Translação é o movimento de uma figura que se desloca para qualquer lugar, mas sempre paralelo ao seu vetor”.

4.4 O ESTUDO DA ROTAÇÃO

4.4.1 Atividade 10: Rotação

A rotação foi a última isometria abordada neste trabalho. Optei por deixá-la para o final, pois é o movimento que envolve maior número de elementos a serem analisados, tais como o centro e a amplitude da rotação, além de sua orientação.

A turma de alunos na qual foi aplicada a sequência de atividades teve seu ensino de Geometria no Ensino Fundamental baseado em cálculos de perímetros e áreas de figuras planas, classificações de ângulos e triângulos e nomenclaturas de polígonos. Segundo relatos dos alunos, raramente usaram transferidores, compasso ou réguas em anos anteriores, nas aulas de Matemática. Por isso, antes de desenvolver as atividades dessa sequência, busquei enfocar o estudo dos ângulos e suas interpretações como giros, mudanças de direção e regiões determinadas por duas semirretas, visando familiarizar os alunos com esses conceitos para uma melhor compreensão do movimento de rotação.

As atividades iniciais de rotação foram baseadas na dissertação de Élio Mega (2001), na qual foram estudadas as implicações da compreensão do movimento de rotação através do uso de diversos materiais com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental (atualmente 6º ano do Ensino Fundamental).

Cada aluno recebeu duas folhas nas quais constavam cinco questões envolvendo a rotação de alguns objetos. Também receberam materiais manipulativos (palitos de picolé e bandeirinhas feitas com palitos de dente) para auxiliar na resolução das questões. Elas podiam ser discutidas com outros alunos, em duplas ou pequenos grupos.

O objetivo dessa atividade era verificar se os alunos compreendiam, mesmo que intuitivamente, o movimento de rotação e os sentidos horário e anti-horário. Além disso, pretendia-se verificar se havia a compreensão das amplitudes dos ângulos reto e raso.

A seguir (Quadros 8, 9, 10, 11 e 12) estão descritas as questões que foram propostas aos alunos.

Quadro 8 – Questão 1 das atividades de rotação.

Questão 1

Uma caneta estava na posição mostrada a seguir.

Pedro girou a caneta em volta da ponta esferográfica e a caneta ficou assim:

De quantos graus foi o giro da caneta?

O giro da caneta foi no sentido horário ou no sentido anti-horário? Justifique.

Fonte: arquivo pessoal do autor, baseado em Mega (2001, p. 206)

Quadro 9 – Questão 2 das atividades de rotação.

Questão 2

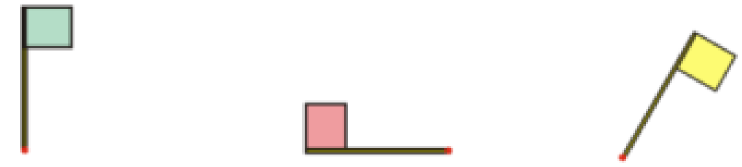
Desenhe o palito depois que ele girar 90° em volta do furo, no sentido horário, nas situações a seguir:

Fonte: Mega (2001, p. 207).

Quadro 10 – Questão 3 das atividades de rotação.

Questão 3

Desenhe a bandeira depois que ela sofre uma rotação de 90º ao redor de seu "pé" (ponto vermelho). O sentido da rotação é o anti-horário.

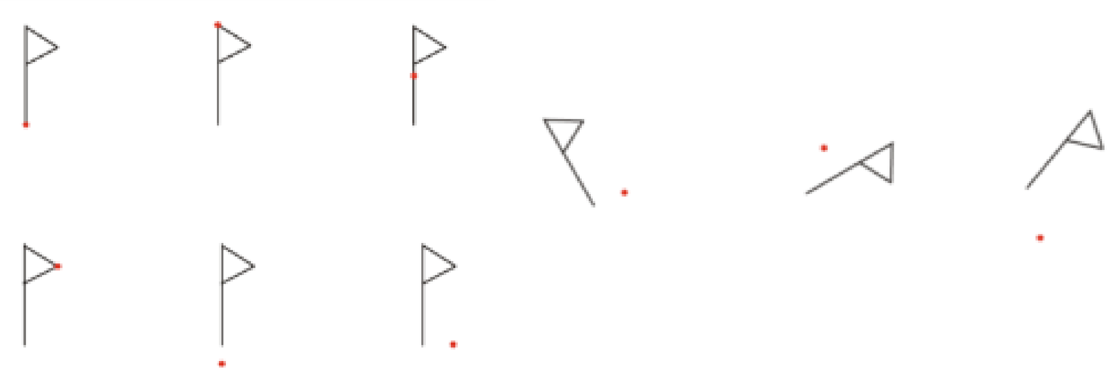


Fonte: Mega (2001, p. 208).

Quadro 11 – Questão 4 das atividades de rotação.

Questão 4

Gire cada bandeirinha 180° no sentido horário, em torno do ponto vermelho e represente a bandeirinha após essa rotação.

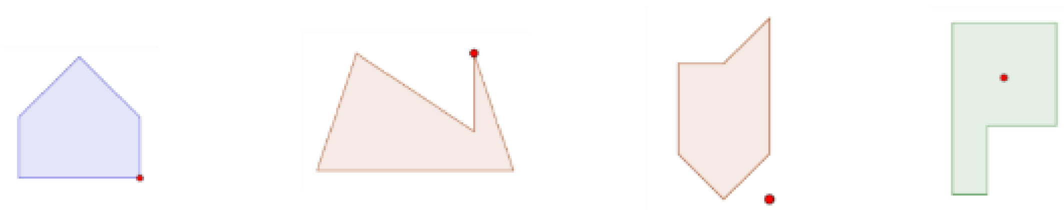


Fonte: Mega (2001, p. 209).

Quadro 12 – Questão 5 das atividades de rotação.

Questão 5 – DESAFIO

Gire cada figura 45° no sentido anti-horário em torno do ponto vermelho. Represente cada figura após essa rotação.



Fonte: elaboração do autor.

Na questão 1, os alunos deveriam determinar qual a rotação aplicada a uma caneta, dadas suas posições inicial e final. Nas respostas à essa questão, os alunos observaram que a rotação fora efetuada no sentido horário com amplitude de 90°. Ao comentar a questão com os alunos, questionei se não havia outra rotação possível para que a caneta ficasse naquela posição. José aventou a hipótese de que a caneta poderia girar 450° no sentido horário, assim ela daria uma volta inteira e mais 90°, ficando assim na mesma posição. Insisti no questionamento, porém as respostas sempre foram no mesmo sentido, ou seja, a caneta poderia dar um número inteiro de voltas no sentido horário e mais 90° e ficaria na posição indicada. Nenhum aluno considerou a possibilidade de a caneta girar 270° no sentido anti-horário.

Nas respostas à questão 2 (e também nas subsequentes), o material manipulativo foi muito utilizado (figura 79). Notei que os alunos recorreram a esse apoio para visualizar como se dá o movimento.

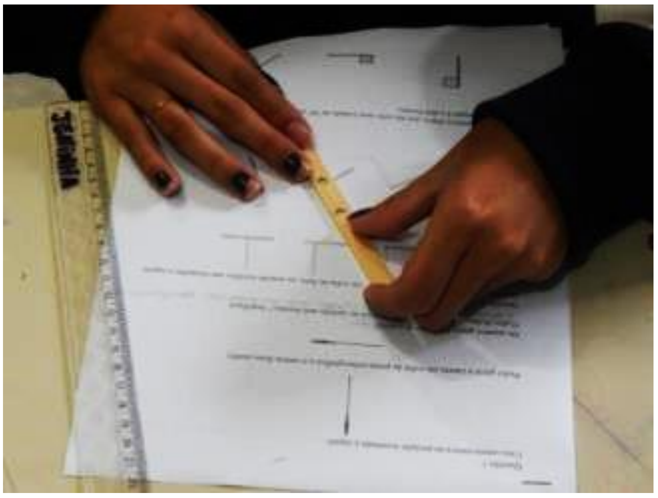


Figura 79 – Susana utilizando material manipulativo para compreensão do movimento de rotação.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Porém, o uso desses materiais não foi suficiente para a compreensão do movimento de rotação por todos os alunos. Muitos não representaram a rotação solicitada ou então se preocuparam apenas com a posição final do objeto, sem manter a congruência entre a figura original e a sua imagem após a rotação.

Nas figuras 80 e 81 temos as representações das respostas às questões 2 e 3 de dois alunos. Mauro observou a congruência entre a figura fornecida e sua representação após a rotação. Já Pedro, apesar de observar corretamente a posição do objeto após a rotação, não o representou com as mesmas medidas.

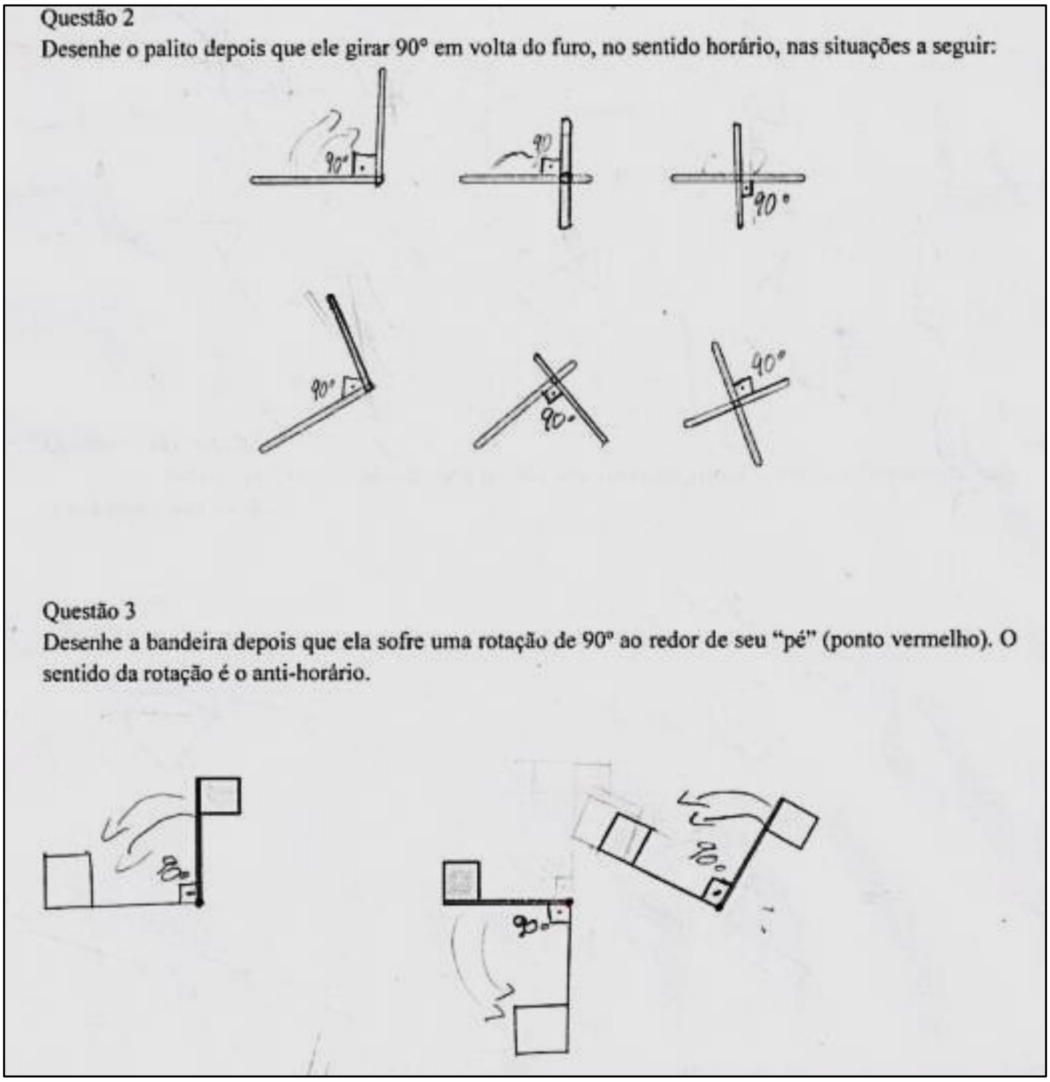


Figura 80 – Soluções apresentadas por Mauro para as questões 2 e 3.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

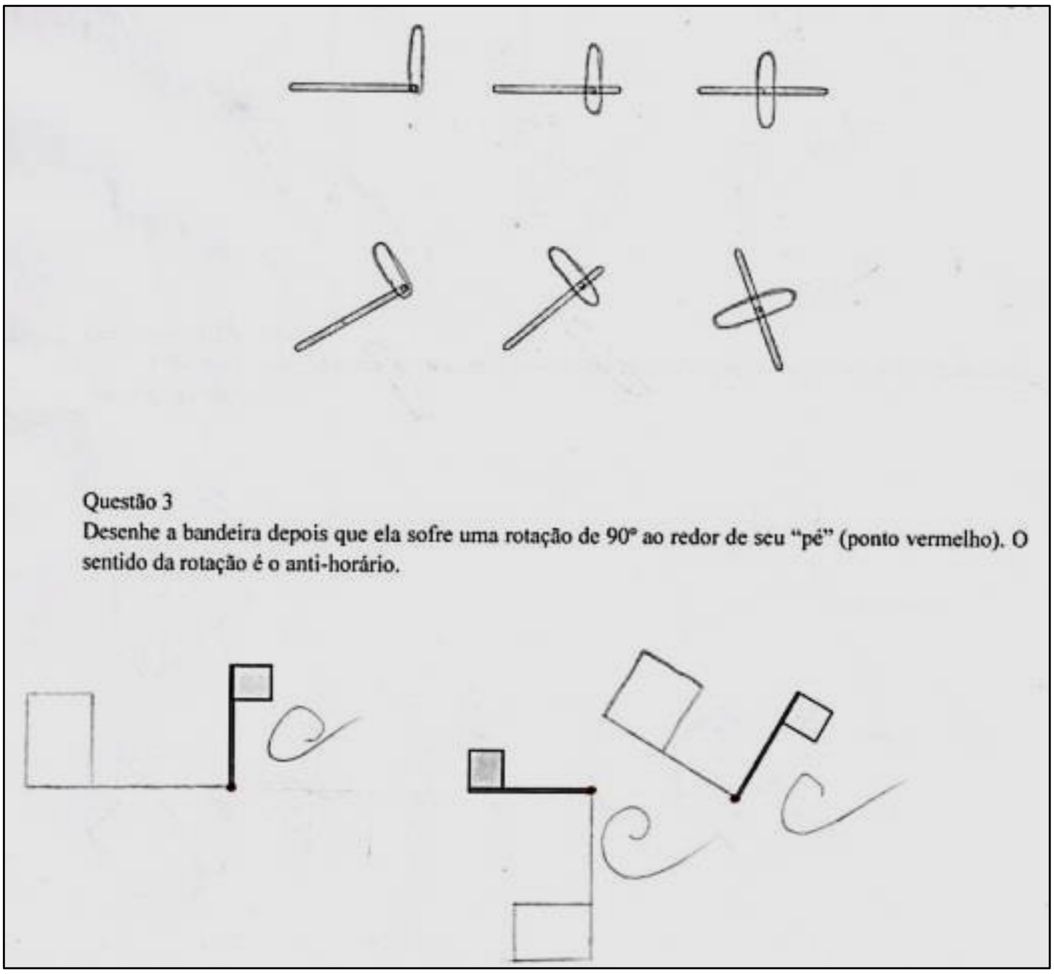


Figura 81 – Soluções apresentadas por Pedro para as questões 2 e 3.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Outro elemento que deveria ser observado pelos alunos é o centro de rotação. Notei que, nos objetos em que o centro de rotação não está situado em uma de suas extremidades ou, ainda, quando o centro de rotação está fora do objeto, as dificuldades apresentadas foram maiores, como ilustram as soluções apresentadas pelos alunos (figuras 82, 83 e 84).

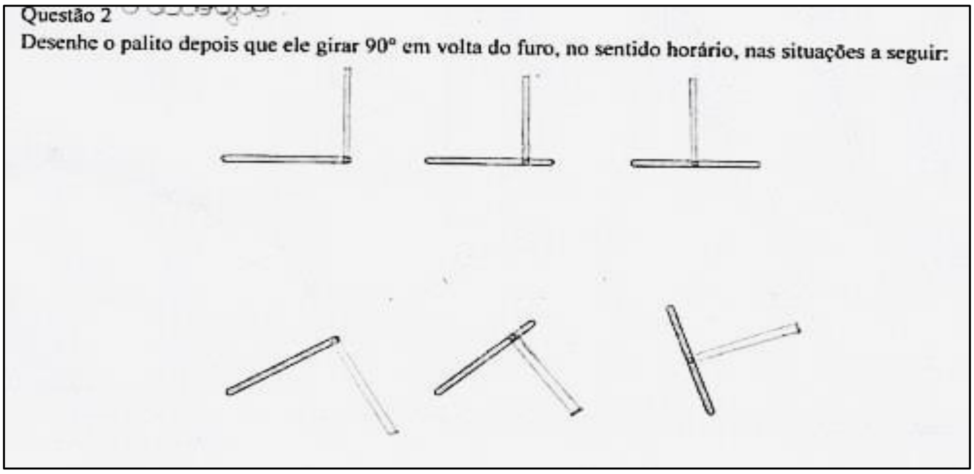


Figura 82 – Soluções apresentadas por Susana para a questão 2.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

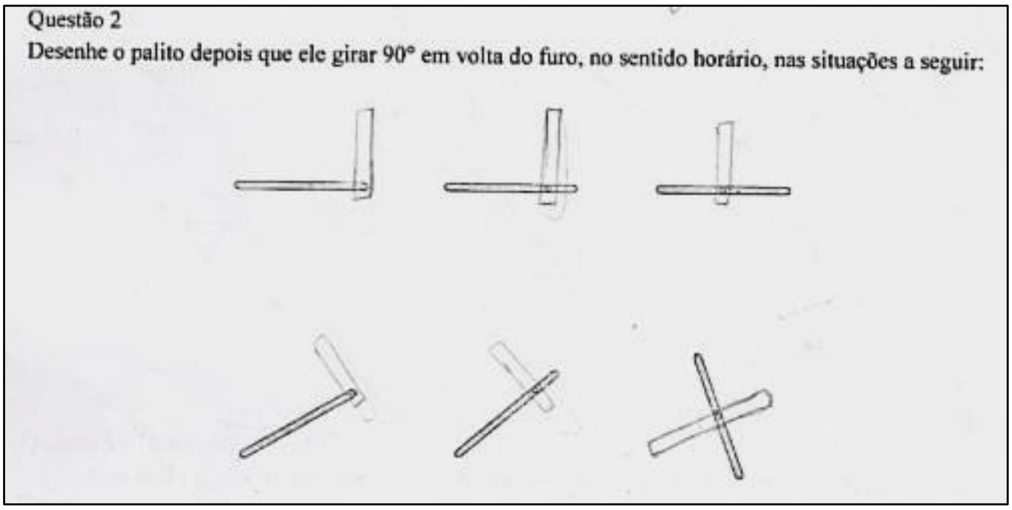


Figura 83 – Soluções apresentadas por Camila para a questão 2.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

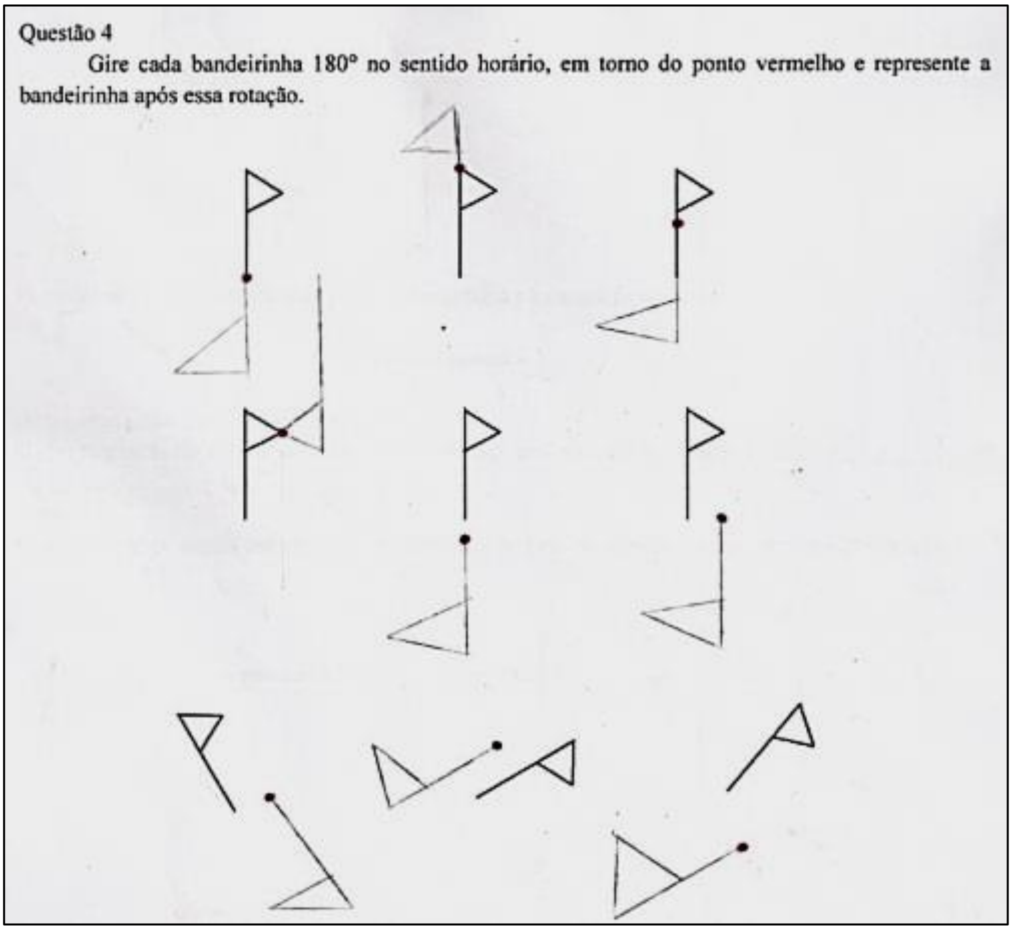


Figura 84 – Soluções apresentadas por Alice para a questão 4.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Como era esperado, a questão 5, na qual os alunos deveriam obter a rotação de amplitude 45° de um polígono, foi a que representou um desafio maior. Os alunos não receberam material concreto, porém estavam livres caso quisessem confeccionar. Além disso, a novidade da questão foi o ângulo de 45°. Pretendia observar de que maneira esse ângulo seria obtido (uso de transferidor? metade de 90°?...). Por esse motivo, muitos alunos optaram por desenhar polígonos congruentes àqueles apresentados, utilizando uma folha de papel ofício ou de seus próprios cadernos, e então recortaram esses polígonos e os utilizaram para obter a rotação desejada (figura 85).

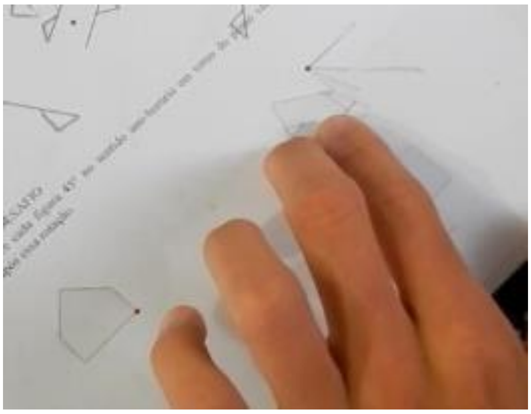


Figura 85 – Pedro utilizando um polígono de papel para visualizar a rotação.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Para determinar o ângulo de 45°, apenas Pedro utilizou transferidor. Todos os demais alunos usaram o fato de que 45° é a metade de 90° e então desenharam a figura rotada segundo um giro com amplitude próxima à da metade de 90°.

Na figura 86 temos as representações de Alice para a questão 5. Nos itens que ela mesma nomeou como "C" e "D", os desenhos feitos com caneta (traçado mais forte) representam as soluções corrigidas após o uso do GeoGebra. Os polígonos a serem rotados são os mesmos apresentados no quadro 12 (p. 101).

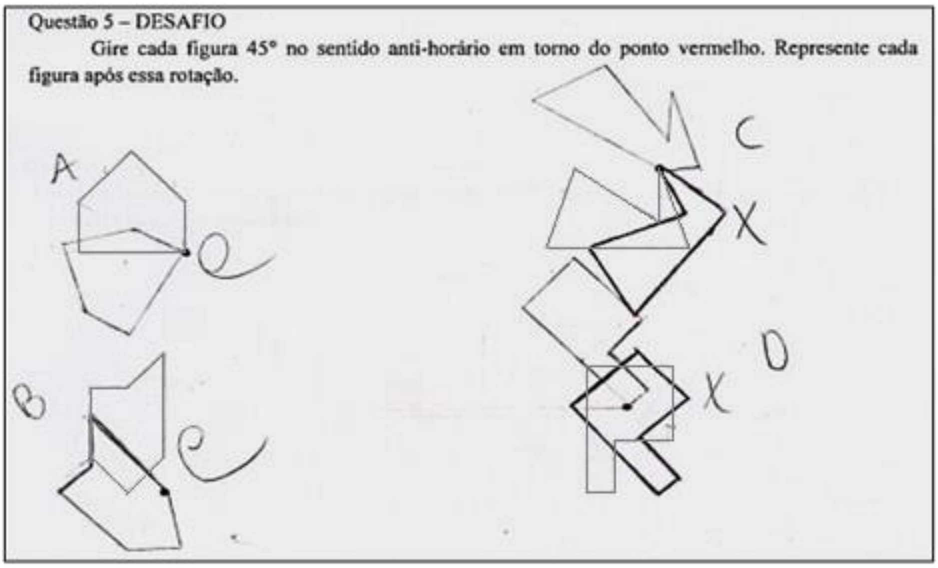


Figura 86 – Soluções apresentadas por Alice para a questão 5.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Para Tatiana, o centro de rotação externo à figura representou uma dificuldade adicional à questão, conforme vemos a seguir (figura 87). Percebemos que Tatiana obteve a rotação do polígono considerando o centro de rotação como um dos seus vértices, e não aquele indicado na figura.

Figura 87 – Solução apresentada por Tatiana de um dos itens da questão 5.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Pedro, que utilizou transferidor e também representou as figuras em papel, disse que “não achou difícil a questão 5”. Para ele, “com o transferidor, o cara tem a certeza de onde fica o ângulo de 45°”. Na figura 88, temos suas soluções para a questão 5.

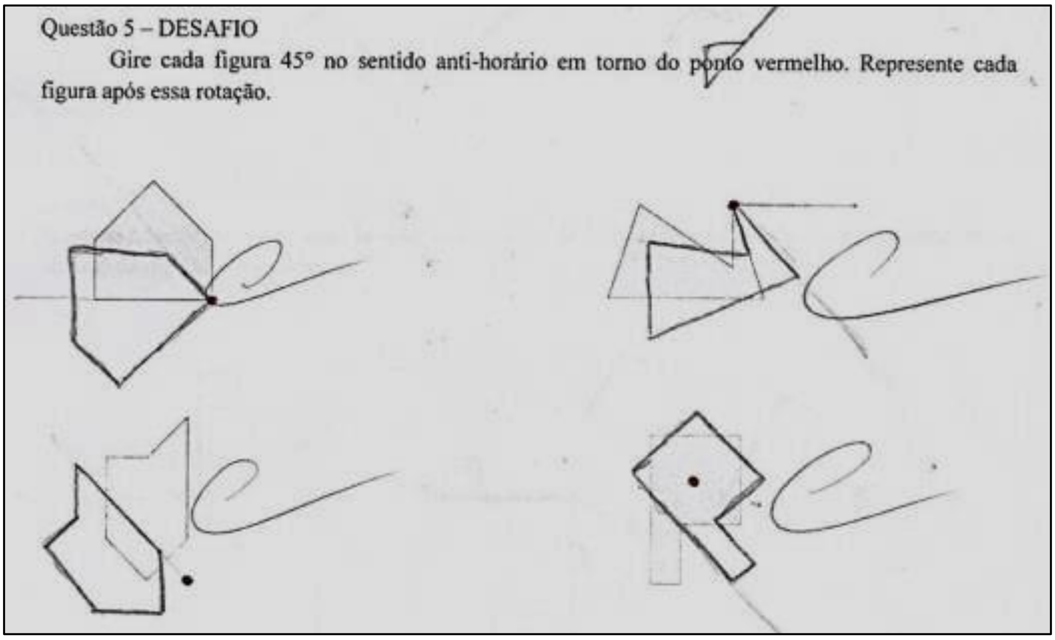


Figura 88 – Soluções apresentadas por Pedro para a questão 5.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Após essas discussões dos alunos, no encontro seguinte, os alunos compararam seus resultados com construções no GeoGebra, utilizando a ferramenta *Rotação*. Cada aluno representou, no ambiente do *software*, as situações que haviam sido propostas na questão 5 (vide figuras 86, 87 e 88) e obteve a rotação desejada, utilizando essas imagens como um critério de correção.

A seguir, cada aluno recebeu uma folha com as seguintes questões (Quadro 13).

Quadro 13 – Questões a serem discutidas após a realização das atividades iniciais.

a) Houve diferenças entre tua representação no papel e as rotações apresentadas no programa? Em quais itens? Para cada item diferente, compara a rotação feita no papel com a rotação feita no GeoGebra e explica as diferenças.

b) Quais rotações tu encontraste maior dificuldade de representar? Por quê?

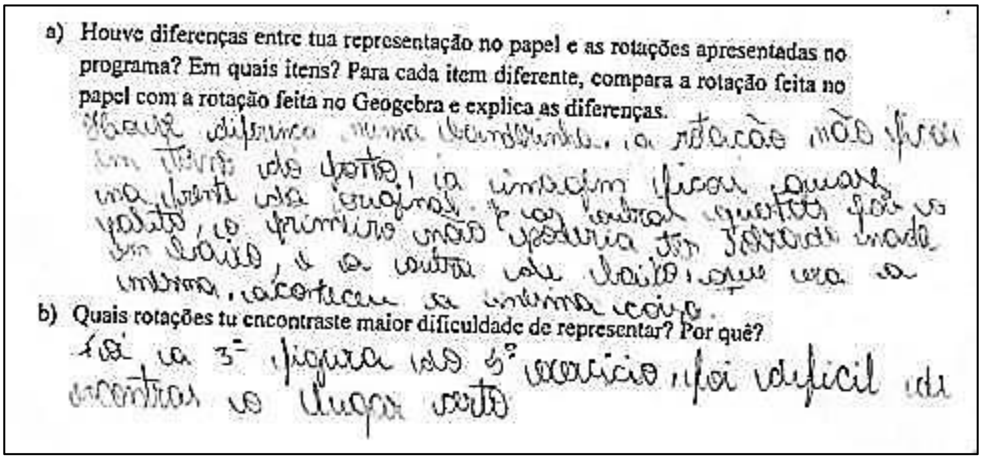
c) O ponto em torno do qual o objeto gira influencia no movimento de rotação? De que maneira?

d) É possível que a rotação de uma figura nos leve à mesma figura, na mesma posição? Explica e exemplifica.

e) Em quais situações do cotidiano as rotações estão presentes? Para cada situação, procura explicar em torno de qual ponto ocorre a rotação.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Nas respostas à primeira questão, os alunos compararam as rotações efetuadas no papel com aquelas apresentadas no *software*. Todos os alunos concordaram que, em pelo menos um item, houve diferenças entre as soluções. As questões que, segundo os alunos, mais geraram dúvidas e/ou dificuldades, foram as de número 2 e 5 (rotação de amplitude de 90° do palito de picolé e rotação de amplitude 45° de um polígono, respectivamente), conforme mostram suas respostas (figuras 89, 90 e 91).

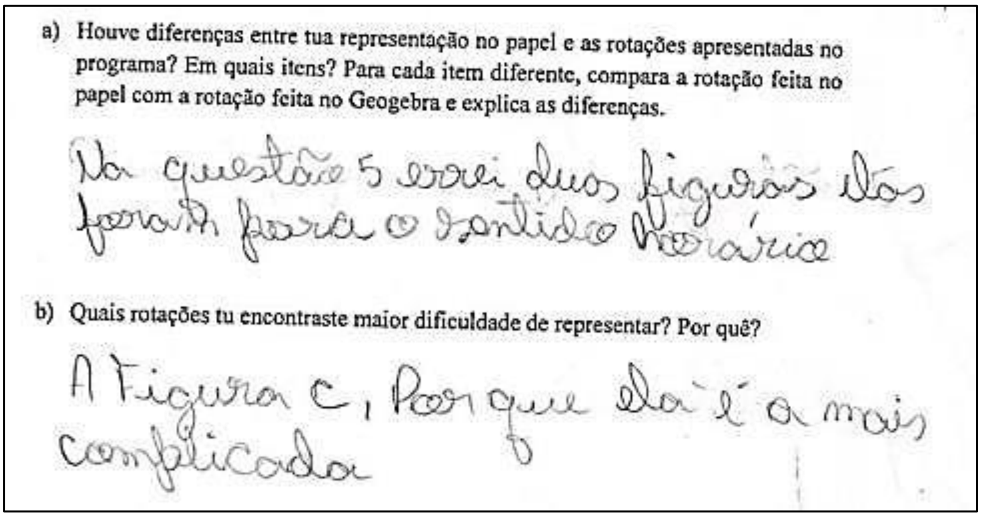

a) Houve diferenças entre tua representação no papel e as rotações apresentadas no programa? Em quais itens? Para cada item diferente, compara a rotação feita no papel com a rotação feita no Geogebra e explica as diferenças.

b) Quais rotações tu encontraste maior dificuldade de representar? Por quê?

Figura 89 – Respostas de Tatiana para os questionamentos *a* e *b*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna para o item a: "Houve diferença numa bandeirinha, a rotação não ficou em torno do ponto, a imagem ficou quase na frente da original. E as outras questões foi o palito, o primeiro não poderia ter sobrado nada em baixo [sic], e a outra de baixo, que era a mesma, aconteceu a mesma coisa". Transcrição da resposta da aluna para o item b: "Foi a 3ª figura do 5º exercício, foi difícil de encontrar o lugar certo".

Observamos aqui o uso de uma linguagem informal e imprecisa, sugerindo que a aluna mobilizou apenas a apreensão perceptiva.



a) Houve diferenças entre tua representação no papel e as rotações apresentadas no programa? Em quais itens? Para cada item diferente, compara a rotação feita no papel com a rotação feita no Geogebra e explica as diferenças.

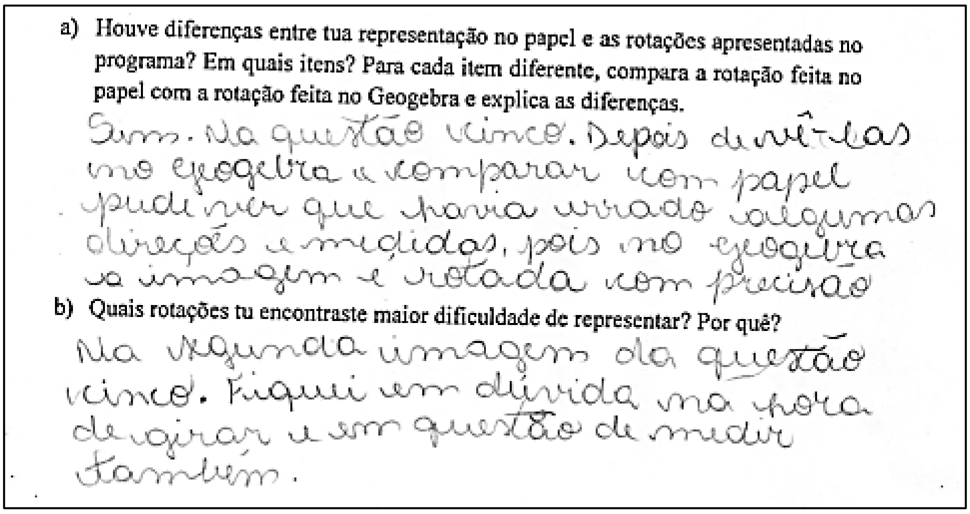
Na questão 5 errei duas figuras elas foram para o sentido horário

b) Quais rotações tu encontraste maior dificuldade de representar? Por quê?

A Figura c, Porque ela é a mais complicada

Figura 90 – Respostas de Alice para os questionamentos *a* e *b*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna para o item a: "Na questão 5 errei duas figuras elas foram para o sentido horário". Transcrição da resposta da aluna para o item b: "A figura c porque ela é a mais complicada".



a) Houve diferenças entre tua representação no papel e as rotações apresentadas no programa? Em quais itens? Para cada item diferente, compara a rotação feita no papel com a rotação feita no Geogebra e explica as diferenças.

Sim. Na questão cinco. Depois de vê-las no geogebra e comparar com papel pude ver que havia errado algumas direções e medidas, pois no geogebra a imagem é rotada com precisão

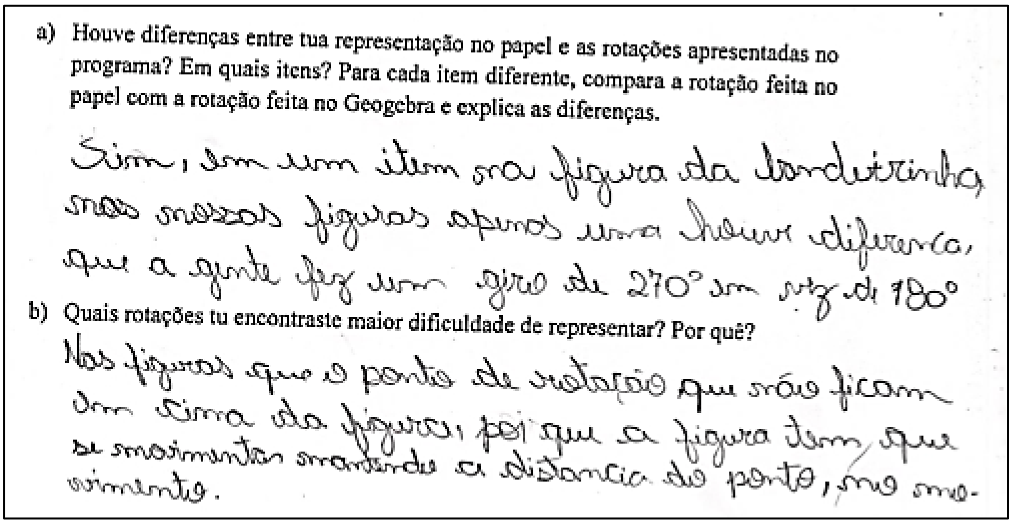
b) Quais rotações tu encontraste maior dificuldade de representar? Por quê?

Na segunda imagem da questão cinco. Fiquei em dúvida na hora de girar e em questão de medir também.

Figura 91 – Respostas de Susana para os questionamentos *a* e *b*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna para o item a: "Sim. Na questão cinco. Depois de vê-las no GeoGebra e comparar com papel pude ver que havia errado algumas direções e medidas, pois no GeoGebra a imagem é rotada com precisão". Transcrição da resposta da aluna para o item b: "Na segunda imagem da questão cinco. Fiquei em dúvida na hora de girar e em questão de medir também".

Outros alunos mencionaram sua dificuldade com relação ao centro de rotação. Pedro comentou que sua maior dificuldade surge quando esse ponto está fora da figura, mas observou acertadamente que as distâncias do centro de rotação até o polígono e do centro de rotação até a imagem do polígono devem se manter iguais (figura 92).


a) Houve diferenças entre tua representação no papel e as rotações apresentadas no programa? Em quais itens? Para cada item diferente, compara a rotação feita no papel com a rotação feita no Geogebra e explica as diferenças.

Sim, em um item na figura da bandeirinha nas nossas figuras apenas uma houve diferença, que a gente fez um giro de 270° em vez de 180°

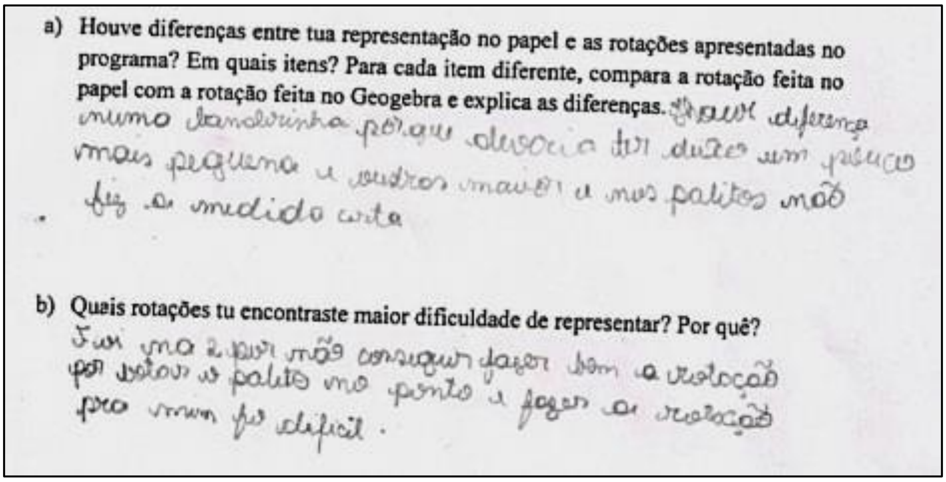
b) Quais rotações tu encontraste maior dificuldade de representar? Por quê?

Nas figuras que o ponto de rotação que não ficam em cima da figura, por que a figura tem que se movimentar mantendo a distancia do ponto, no movimento.

Figura 92 – Respostas de Pedro para os questionamentos *a* e *b*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno para o item a: "Sim, em um item na figura da bandeirinha, nas nossas figuras apenas uma houve diferença que a gente fez um giro de 270° em vez de 180°". Transcrição da resposta do aluno para o item b: "Nas figuras que o ponto de rotação que não ficam em cima da figura, por que a figura tem que se movimentar mantendo a distância do ponto, no movimento".

Kelly observou, no item *a*, que seus desenhos deveriam ficar congruentes aos desenhos originais após a rotação (figura 93). No item *b*, Kelly também destacou sua dificuldade com o centro de rotação.


a) Houve diferenças entre tua representação no papel e as rotações apresentadas no programa? Em quais itens? Para cada item diferente, compara a rotação feita no papel com a rotação feita no Geogebra e explica as diferenças. Houve diferença numo bandeirinha porque deveria ter deixo um pouco mais pequena e outros maior e nos palitos não fiz a medido certa

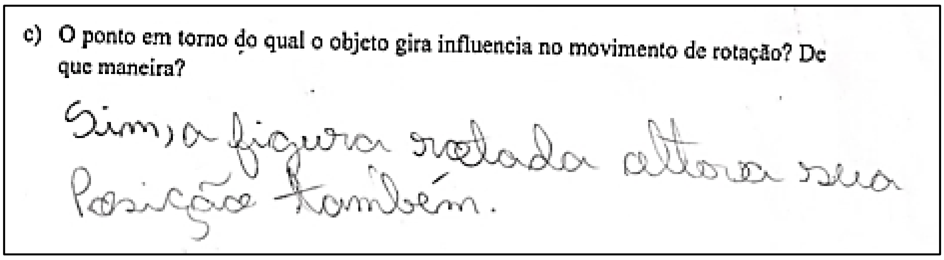
b) Quais rotações tu encontraste maior dificuldade de representar? Por quê?

Foi na 2 por não conseguir fazer bem a rotação por botar o palito no ponto e fazer a rotação pra mim foi dificil.

Figura 93 – Respostas de Kelly para os questionamentos *a* e *b*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna para o item a: "Houve diferença numa bandeirinha porque deveria ter deixo [sic] um pouco mais pequena [sic] e outras maior e nos palitos não fiz a medida certa". Transcrição da resposta da aluna para o item b: "Foi a 2 por não conseguir fazer bem a rotação por botar o palito no ponto e fazer a rotação pra mim foi difícil".

Contudo, todos os alunos perceberam que a posição do centro de rotação influencia na posição da imagem após a rotação, conforme mostram suas respostas ao item *c* (figuras 94, 95 e 96). Isso demonstra que tanto a amplitude quanto o centro da rotação (elementos constituintes dessa isometria) foram considerados pelos alunos, o que considero que caracteriza indícios de apreensões operatórias sobre as figuras. Além disso, em muitas questões, os alunos procuraram obter a rotação sem recorrer ao material manipulativo, ou seja, usando apenas a figura representada no papel para guiar-se na solução do problema.


c) O ponto em torno do qual o objeto gira influencia no movimento de rotação? De que maneira?

Sim, a figura rotada altera sua
Posição também.

Figura 94 – Resposta de Alice para o questionamento *c*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "Sim, a figura rotada altera sua posição também".

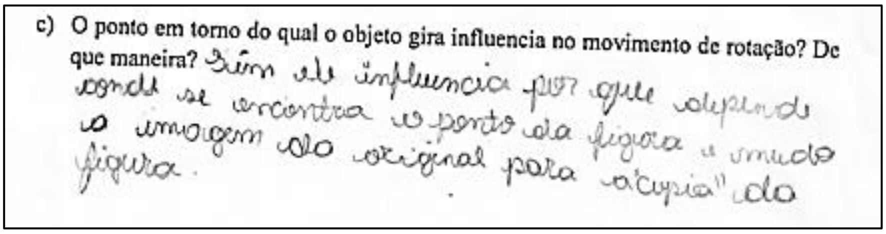

c) O ponto em torno do qual o objeto gira influencia no movimento de rotação? De que maneira? Sim ele influencia por que depende
onde se encontra o ponto da figura e muda
a imagem do original para "a cópia" da
figura.

Figura 95 – Resposta de Kelly para o questionamento *c*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "Sim ele influencia por que depende onde se encontra o ponto da figura e muda a imagem da original para a 'cópia' da figura".

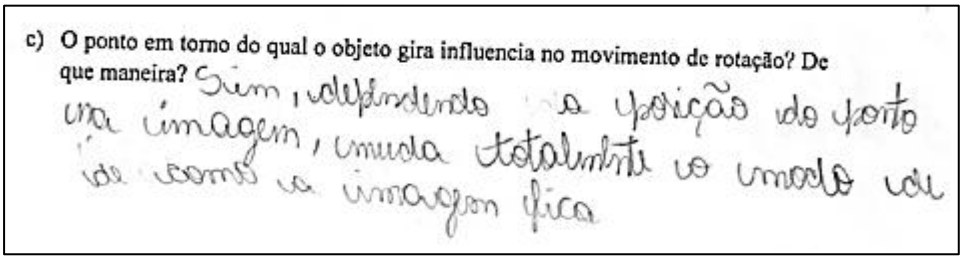

c) O ponto em torno do qual o objeto gira influencia no movimento de rotação? De que maneira? Sim, dependendo a posição do ponto
na imagem, muda totalmente o modo de
de como a imagem fica

Figura 96 – Resposta de Tatiana para o questionamento *c*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "Sim, dependendo da posição do ponto na imagem, muda totalmente o modo de de [sic] como a imagem fica".

Para responder o item *d* – que questionava se é possível que a rotação de uma figura nos leve à mesma figura, na mesma posição – um grupo de alunas representou um polígono no

GeoGebra e marcou um centro de rotação. A seguir, efetuaram uma rotação desse polígono com amplitude de 45° no sentido anti-horário. A partir desse novo polígono, fizeram uma nova rotação de 45° no sentido anti-horário com o mesmo centro de rotação e assim sucessivamente. Ao indagar o que as alunas haviam pensado, Paula, uma das alunas do grupo, respondeu o seguinte:

– *Fomos girando de 45* [graus] *em 45* [graus] *no sentido anti-horário.*

Então questionei:

– *Depois de quantas rotações o polígono voltou para o mesmo lugar?*

Paula contou e concluiu:

– *Sete. Não! Oito.*

Nesse instante, perguntei:

– *Não seria possível fazer uma única rotação no polígono para leva-lo à posição original?*

Maria, também do grupo, pegou uma calculadora e efetuou o produto entre 45 e 8 e afirmou:

– *Oito rotações de 45* [graus] *é o mesmo que uma de 360* [graus].

As imagens a seguir (figuras 97 e 98) mostram a representação da situação descrita acima e a resposta dada por Susana, a terceira componente desse grupo, para o item *d*.

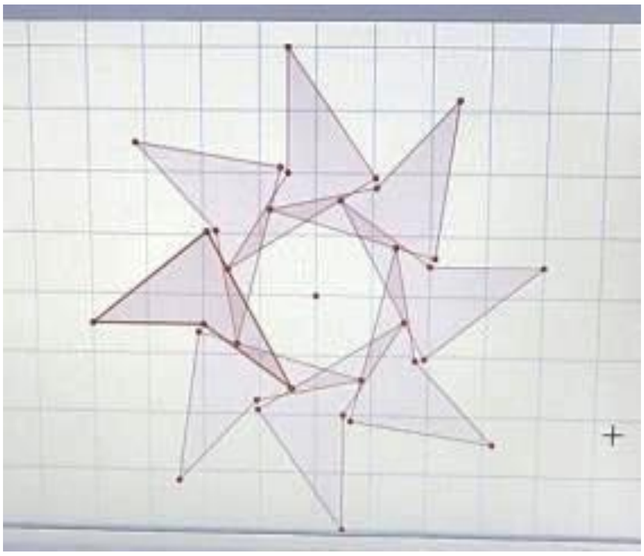
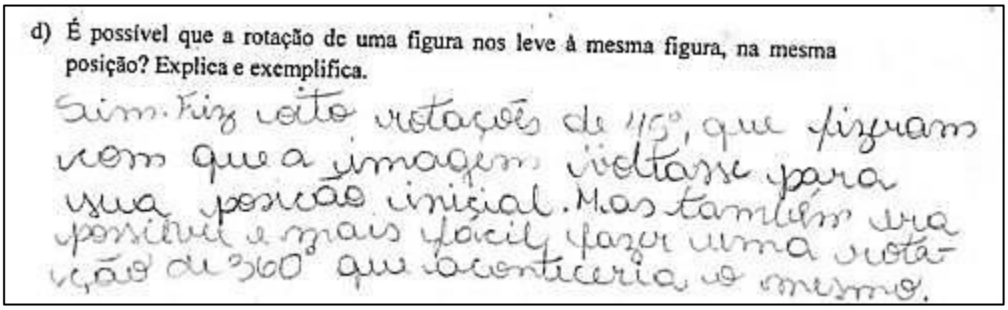


Figura 97 – Construção no GeoGebra feita pelas alunas Susana, Paula e Maria.
Fonte: arquivo pessoal do autor.



d) É possível que a rotação de uma figura nos leve à mesma figura, na mesma posição? Explica e exemplifica.

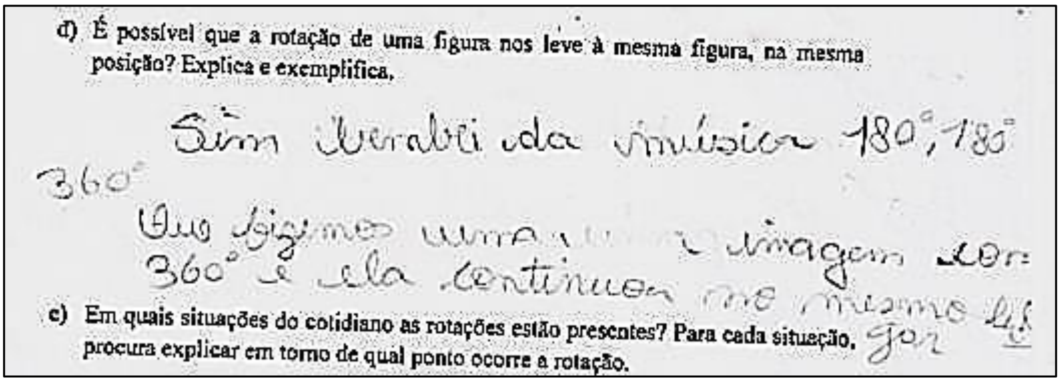
Sim. Fiz oito rotações de 45°, que fizeram com que a imagem voltasse para sua posição inicial. Mas também era possível e mais fácil fazer uma rotação de 360° que aconteceria o mesmo.

Figura 98 – Resposta de Susana para o questionamento *d*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "Sim. Fiz oito rotações de 45°, que fizeram com que a imagem voltasse para sua posição inicial. Mas também era possível e mais fácil fazer uma rotação de 360° que aconteceria o mesmo".

A maneira como as alunas desenvolveram essa justificativa me surpreendeu muito, pois percebi que houve compreensão do movimento de rotação e de seus elementos como a amplitude e o centro de rotação.

Uma dupla de alunas afirmou que se lembrou de uma música chamada "180, 180, 360". Segundo elas, na coreografia da música os dançarinos efetuam duas "meias voltas" e assim voltam à posição original. Pedi que então representassem algo semelhante no GeoGebra e registrassem suas conclusões no item *d*. A figura 99 mostra o registro escrito de Camila, uma das alunas dessa dupla.



d) É possível que a rotação de uma figura nos leve à mesma figura, na mesma posição? Explica e exemplifica.

Sim lembrei da música 180°, 180° 360°

Que fizemos uma imagem com 360° e ela continuou no mesmo lugar

c) Em quais situações do cotidiano as rotações estão presentes? Para cada situação, procura explicar em torno de qual ponto ocorre a rotação.

Figura 99 – Resposta de Camila para o questionamento *d*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "Sim lembrei da música 180°, 180°, 360°. Que fizemos uma imagem com 360° e ela continuou no mesmo lugar".

Os demais grupos também observaram, corretamente, que uma rotação de 360° de uma figura nos leva à sua posição original, como mostram suas respostas (figuras 100 e 101).

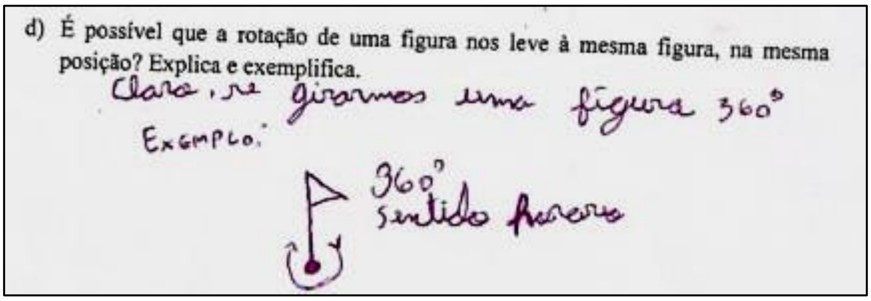


Figura 100 – Resposta de Fabrício para o questionamento *d*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno: "Claro, se girarmos uma figura 360°. Exemplo: 360° sentido horário".

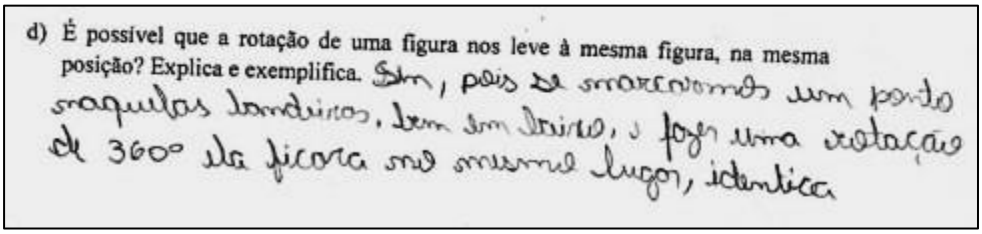


Figura 101 – Resposta de Pedro para o questionamento *d*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno: "Sim, pois se marcarmos um ponto naquelas bandeiras, bem em baixo, e fazer uma rotação de 360° ela ficara [sic] no mesmo lugar, identica [sic]".

Na questão *e*, os alunos foram desafiados a procurarem exemplos do cotidiano nos quais o movimento de rotação está presente e determinar o centro de rotação para cada situação. Percebi que os alunos refletiram muito antes de responder, procurando exemplos mais "elaborados", mas a maioria baseou sua resposta no movimento de portas e maçanetas, como mostram as figuras 102, 103 e 104.

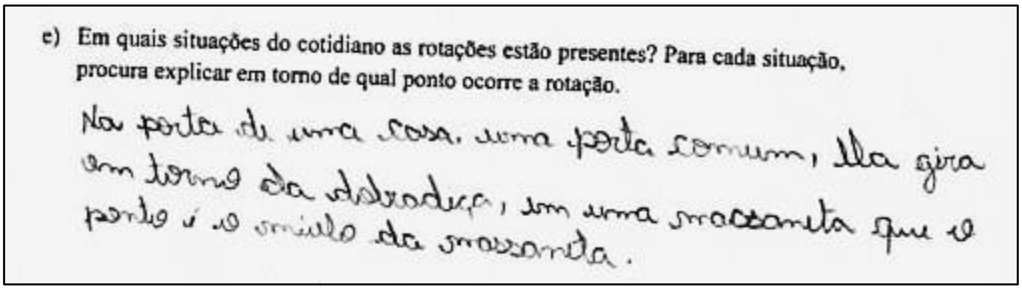
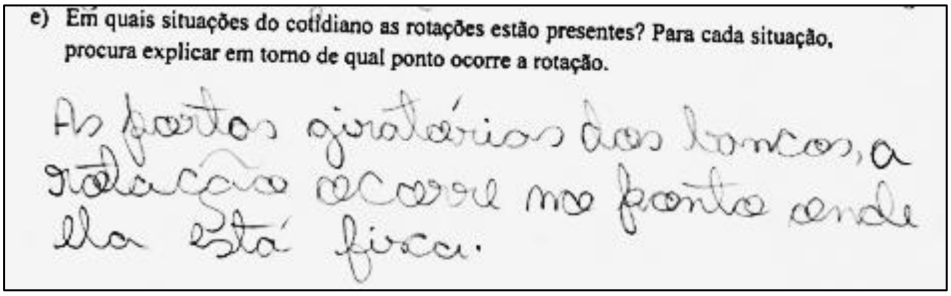


Figura 102 – Resposta de Pedro para o questionamento *e*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

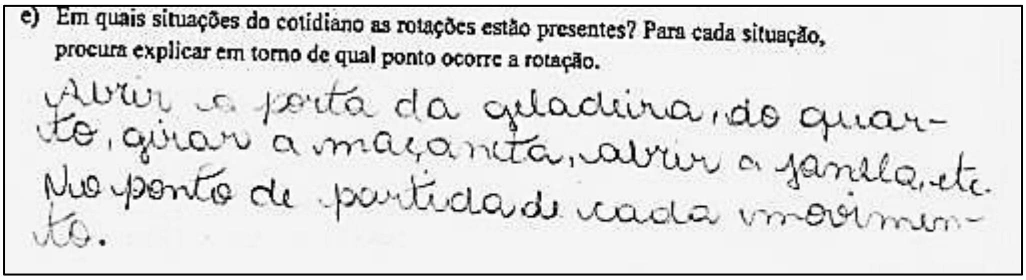
Transcrição da resposta do aluno: "Na porta de uma casa, uma porta comum, ela gira em torno da dobradiça, em uma massaneta [sic] que o ponto é o miolo da massaneta [sic]".


e) Em quais situações do cotidiano as rotações estão presentes? Para cada situação, procura explicar em torno de qual ponto ocorre a rotação.

As portas giratórias dos bancos, a rotação ocorre no ponto onde ela está fixa.

Figura 103 – Resposta de Alice para o questionamento *e*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "As portas giratórias dos bancos, a rotação ocorre no ponto onde ela está fixa".


e) Em quais situações do cotidiano as rotações estão presentes? Para cada situação, procura explicar em torno de qual ponto ocorre a rotação.

Abrir a porta da geladeira, do quarto, girar a maçaneta, abrir a janela, etc. No ponto de partida de cada movimento.

Figura 104 – Resposta de Susana para o questionamento *e*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna: "Abrir a porta da geladeira, do quarto, girar a maçaneta, abrir a janela, etc. No ponto de partida de cada movimento".

Após as discussões das questões acerca da rotação, os alunos receberam, em uma folha, novas definições dos movimentos estudados, buscando maior precisão e ao mesmo tempo preservando a linguagem adotada pelos alunos anteriormente (Quadro 14). Forneci um tempo para que cada aluno lesse essas definições e anotasse os aspectos que não haviam sido compreendidos.

Na definição apresentada para o movimento de reflexão, foi citado pela primeira vez o fato de que os segmentos que unem cada vértice à sua respectiva imagem são perpendiculares ao eixo de reflexão. A maioria dos alunos observou que essa relação ainda não havia sido discutida. Para que os alunos compreendessem melhor essa ideia, pedi que utilizassem a figura apresentada no material e traçassem os segmentos BB', CC' e DD' e observassem que cada um deles é perpendicular ao eixo de reflexão.

Ao discutirem formalmente a definição de translação, a principal dúvida dos alunos era a respeito do paralelismo entre o vetor e os segmentos que unem cada vértice do polígono à sua respectiva imagem. Pedi que os alunos traçassem os segmentos BB' e CC' na figura presente nessa definição e observassem que esses segmentos são paralelos ao vetor da translação.

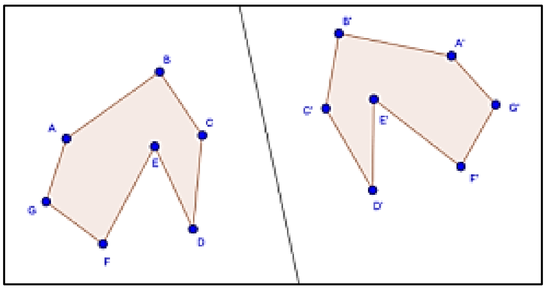
Nesse momento, não me preocupei em demonstrar a perpendicularidade dos segmentos BB', CC' e DD' (presentes na figura da definição de reflexão) em relação ao eixo de reflexão, nem o paralelismo dos segmentos BB' e CC' (presentes na figura da definição de translação) com o vetor. Os alunos também não reivindicaram tais demonstrações. Para a distância entre ponto e reta, considerei que era intuitiva a ideia de que essa é a menor distância do ponto dado a um ponto qualquer da reta, e portanto corresponde à medida de um segmento perpendicular à reta, com um extremo no ponto dado e outro em ponto da reta. Penso que essas provas e definições poderiam ser desenvolvidas na continuidade do trabalho ou, talvez, em outra abordagem do tema.

Já na discussão sobre o movimento de rotação, a principal observação dos alunos foi em relação ao sinal do ângulo de amplitude, pois, segundo eles, nunca tinham estudado ângulos com orientação ou ângulos positivos e negativos.

Quadro 14 – Definições finais para as isometrias.

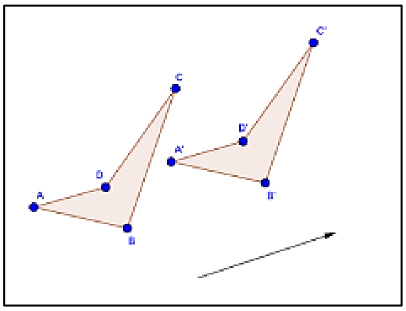
Definições dos três movimentos

A) Reflexão em torno de uma reta



A **reflexão** em torno de uma reta é a isometria que leva cada ponto P de uma figura ao ponto P' (chamado de imagem do ponto P) de modo que:
- a distância do ponto P à reta (chamada de eixo de reflexão) é a mesma que a distância do ponto P' a essa mesma reta;
- o segmento que une P e P' é perpendicular à reta.

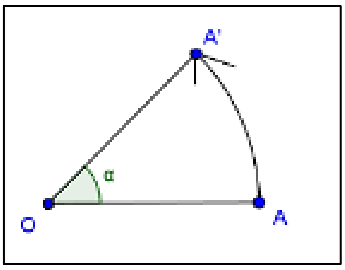
B) Translação por um vetor



Vetor é um segmento de reta com sentido, direção e um determinado comprimento; no plano cartesiano, cada vetor plano corresponde a um determinado deslocamento vertical e a um determinado deslocamento horizontal.
Translação por um vetor é a isometria que leva cada ponto P de uma figura ao ponto P', de modo que cada ponto P é deslocado segundo um mesmo vetor, levando ao ponto P'. Desse modo, o segmento PP' tem o mesmo comprimento que o vetor da translação e é paralelo a esse vetor.

C) Rotação em torno de um ponto

Para que ocorra uma rotação de uma figura são necessários dois elementos:
1º) Um ponto em torno do qual ocorrerá a rotação. Esse ponto chama-se **centro da rotação**;
2º) Um ângulo de rotação (chamado de **amplitude da rotação**). Esse ângulo pode ser determinado no sentido horário ou no sentido anti-horário.
Costuma-se adotar amplitudes positivas para ângulos no sentido anti-horário e amplitudes negativas para ângulos no sentido horário. Por exemplo: se uma rotação tem amplitude de -90°, significa que a rotação será de 90° no sentido horário.
Assim, a rotação de centro O e amplitude α é a transformação que leva o ponto A ao ponto A', como ilustra a figura ao lado.



Fonte: arquivo pessoal do autor.

4.5 ATIVIDADE 11: VERIFICANDO A COMPREENSÃO DAS ISOMETRIAS

Nessa atividade, os alunos, após as discussões das definições mais precisas das transformações isométricas estudadas, deveriam identificar qual transformação foi aplicada a um determinado polígono para obter cada um dos demais polígonos.

Além de verificar a compreensão de cada aluno acerca dessas definições, essa atividade teve como objetivo discutir com os alunos o conceito de congruência de polígonos, por meio das isometrias (reflexão, translação e rotação).

Para isso, cada aluno recebeu o material mostrado a seguir (Quadro 15).

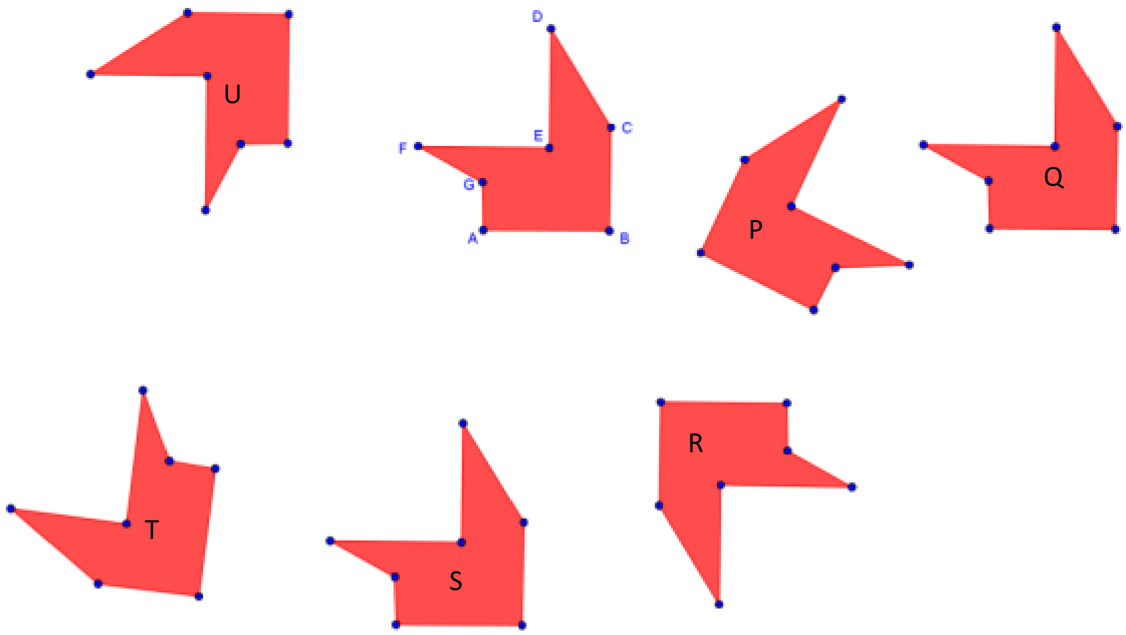
Quadro 15 – Atividade para verificação da compreensão das transformações geométricas.

Transformações Geométricas

Nome: ______________________

Na figura abaixo, o polígono ABCDEFG foi feito no GeoGebra. Os demais polígonos (chamados de P, Q, R, S, T e U) foram obtidos a partir de uma transformação no polígono ABCDEFG. Essa transformação ou é uma reflexão, ou uma translação ou uma rotação. Tendo como base o polígono ABCDEFG, identifique para cada outro polígono qual transformação geométrica foi aplicada.

1) Se for uma reflexão, identifique o eixo de reflexão.
2) Se for uma translação, desenhe o vetor.
3) Se for uma rotação, identifique o centro de rotação.



Fonte: arquivo pessoal do autor.

Os polígonos Q e S do material foram obtidos a partir de translações do polígono ABCDEFG. Todos os alunos identificaram essas transformações, embora alguns alunos não tenham representado o vetor da translação congruente aos segmentos que ligam cada vértice do polígono ABCDEFG à sua imagem no polígono Q ou S. Outros alunos traçaram o vetor da translação com sua direção invertida.

Os polígonos P e T do material são reflexões do polígono ABCDEFG. O polígono P foi identificado corretamente por todos os alunos, porém muitos alunos identificaram o polígono T como sendo uma rotação do polígono ABCDEFG. Outro aluno o identificou como sendo uma translação. Para o desenho do eixo de reflexão, a maioria dos alunos considerou dois pares de pontos (formados por pontos do polígono e por suas respectivas imagens), observando que a distância de um ponto ao eixo deve ser igual à distância de sua imagem ao eixo. Embora tivesse sido discutido que os segmentos que unem os pontos do polígono à sua imagem são perpendiculares ao eixo de reflexão, esse fato não foi usado por nenhum aluno para o traçado do eixo, conforme constatei nas falas dos alunos ao corrigir a atividade com a turma. Isso revela mais um indício de que essa propriedade não foi bem compreendida pelos alunos e talvez, ao abordar as definições mais precisas das transformações isométricas, fosse necessário dispensar um tempo maior para essa observação.

Os polígonos R e U são obtidos por rotações do polígono ABCDEFG. Novamente, a principal dificuldade dos alunos foi encontrar a posição dos centros dessas rotações; de todo modo, a maioria dos alunos marcou pontos muito próximos desses centros, o que indica que eles os obtiveram por tentativas, porém com a preocupação de que a distância do centro de rotação marcado até um determinado ponto do polígono fosse igual à distância do centro até a imagem do ponto. Ainda assim, muitos alunos consideraram apenas um ponto (e sua imagem) para essa análise. Penso que, novamente pelo fato dessa propriedade não ter surgido nas discussões com os alunos, ela pode ter sido desconsiderada por muitos alunos ou sua importância relativizada.

Nesta atividade, objetivava-se o uso da apreensão operatória, pois os alunos necessitariam realizar modificações posicionais ou ópticas do polígono ABCDEFG para concluírem sobre a transformação geométrica aplicada a ele.

A seguir, comentamos as soluções apresentadas por alguns alunos (figuras 105, 106, 107, 108 e 109).

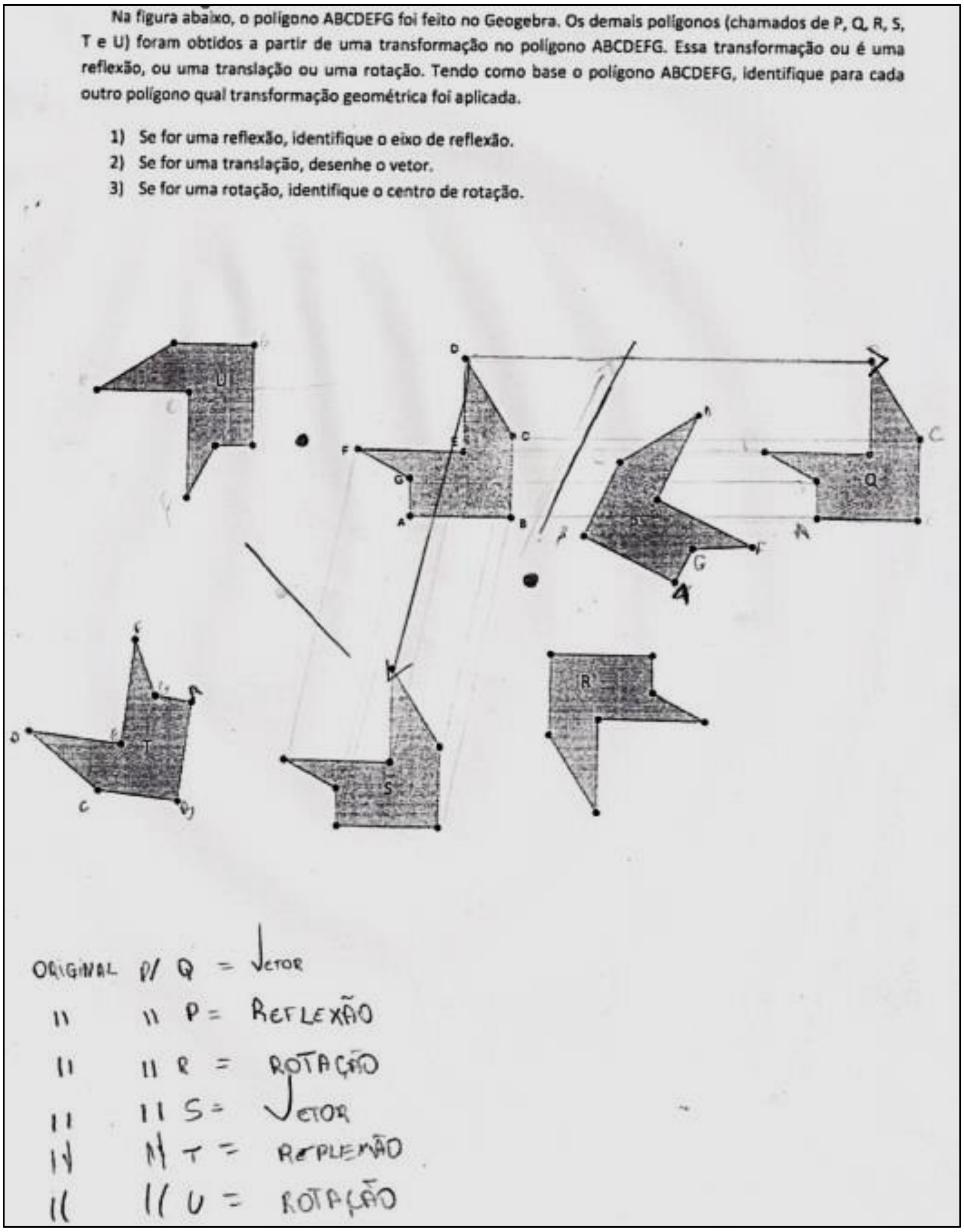


Figura 105 – Solução da atividade apresentada por Jonas.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição: "Original p/ Q = vetor, original p/ P = reflexão, original p/ R = rotação, original p/ S = vetor, original p/ T = reflexão, original p/ U = rotação".

Os pontos marcados são, segundo Jonas, os centros de rotação. Pelo fato desses pontos estarem fora do polígono ABCDEFG, a dificuldade em sua determinação foi maior. Mesmo assim, notamos que Jonas marcou corretamente o centro da rotação que transforma o polígono ABCDEFG no polígono R. Também podemos visualizar os eixos das reflexões e os vetores das translações desenhados pelo aluno.

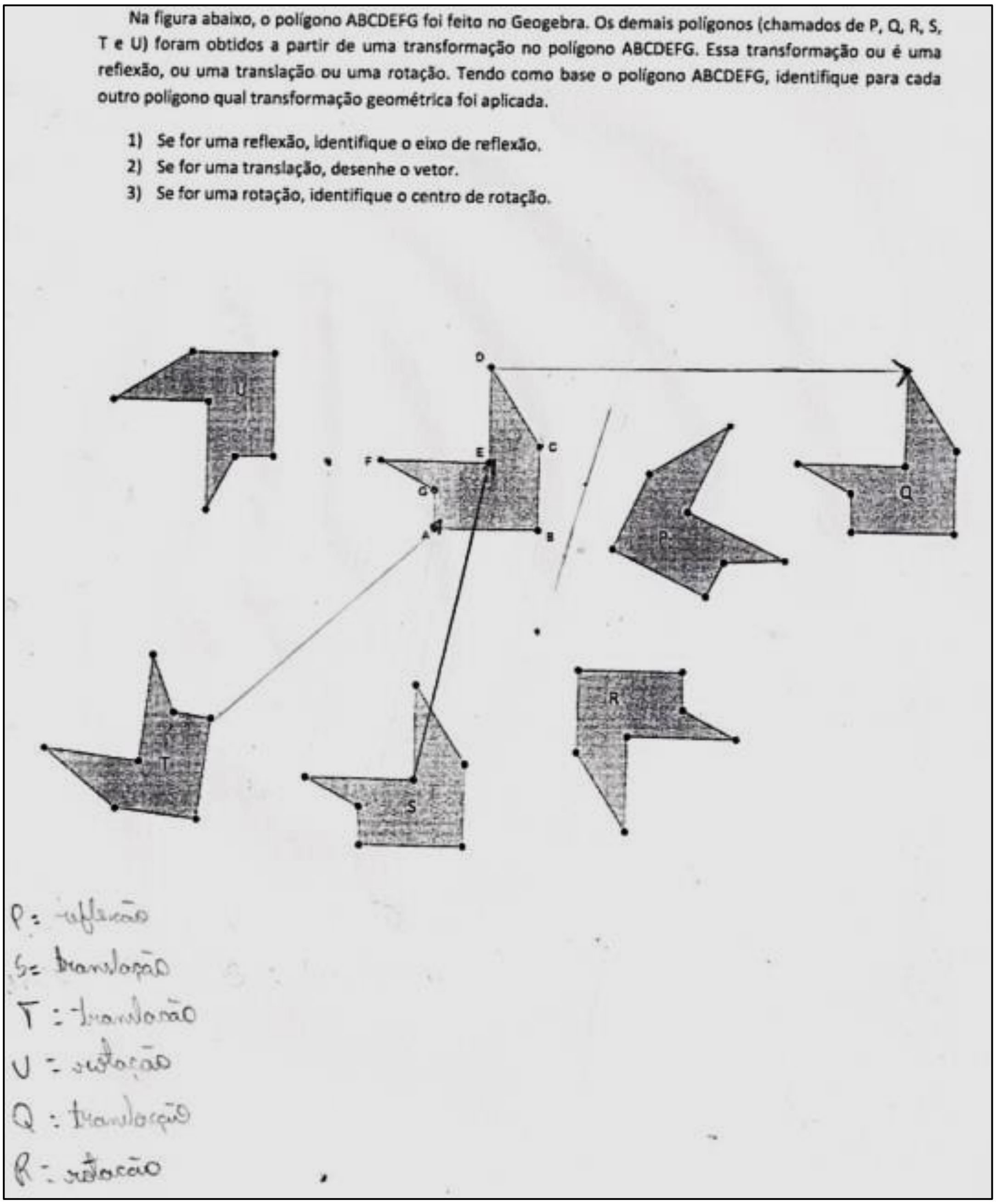


Figura 106 – Solução da atividade apresentada por Paula.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição: "P = reflexão, S = translação, T = translação, U = rotação, Q = translação, R = rotação".

Vemos que Paula equivocadamente considerou o polígono T como uma translação do polígono ABCDEFG, embora tivesse identificado corretamente a imagem do vértice A no polígono T. Além disso, identificou o vetor da translação que leva o polígono ABCDEFG ao polígono S, embora invertido. Paula identificou corretamente os polígonos R e U como sendo rotações do polígono ABCDEFG. Novamente observamos que o fato de os centros de rotação estarem posicionados fora do polígono ABCDEFG representou uma dificuldade adicional.

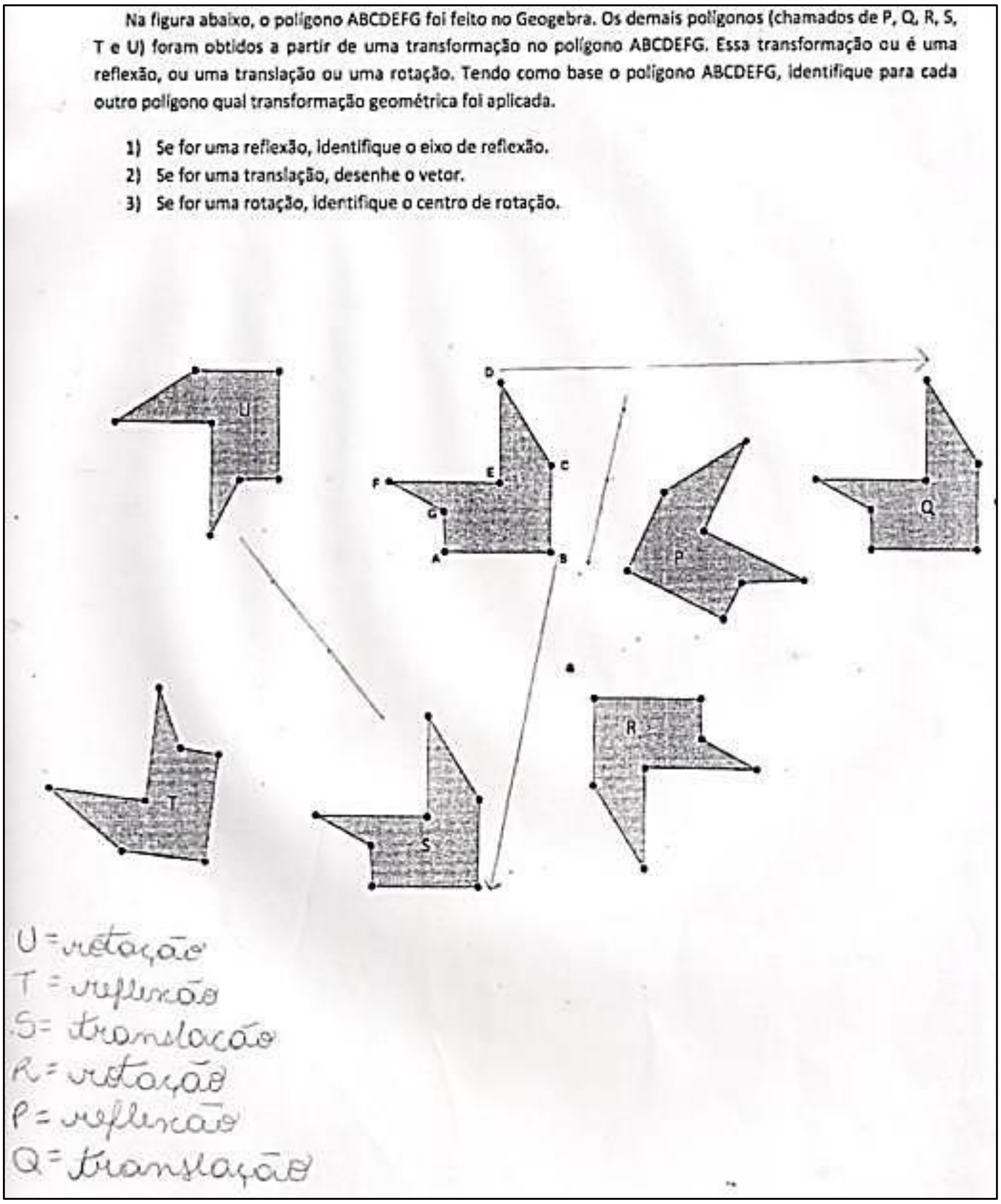


Figura 107 – Solução da atividade apresentada por Susana.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição: "U = rotação, T = reflexão, S = translação, R = rotação, P = reflexão, Q = translação".

Susana considerou o polígono U como uma rotação do polígono ABCDEFG, mas disse que não conseguiu identificar o centro dessa rotação. Todas as demais isometrias foram identificadas corretamente e, para o desenho de cada eixo de reflexão, Susana usou um par de pontos. Para isso, a aluna posicionou a régua sobre o segmento com extremidades em um vértice e sua respectiva imagem e marcou o ponto médio desse segmento, utilizando a graduação da régua.

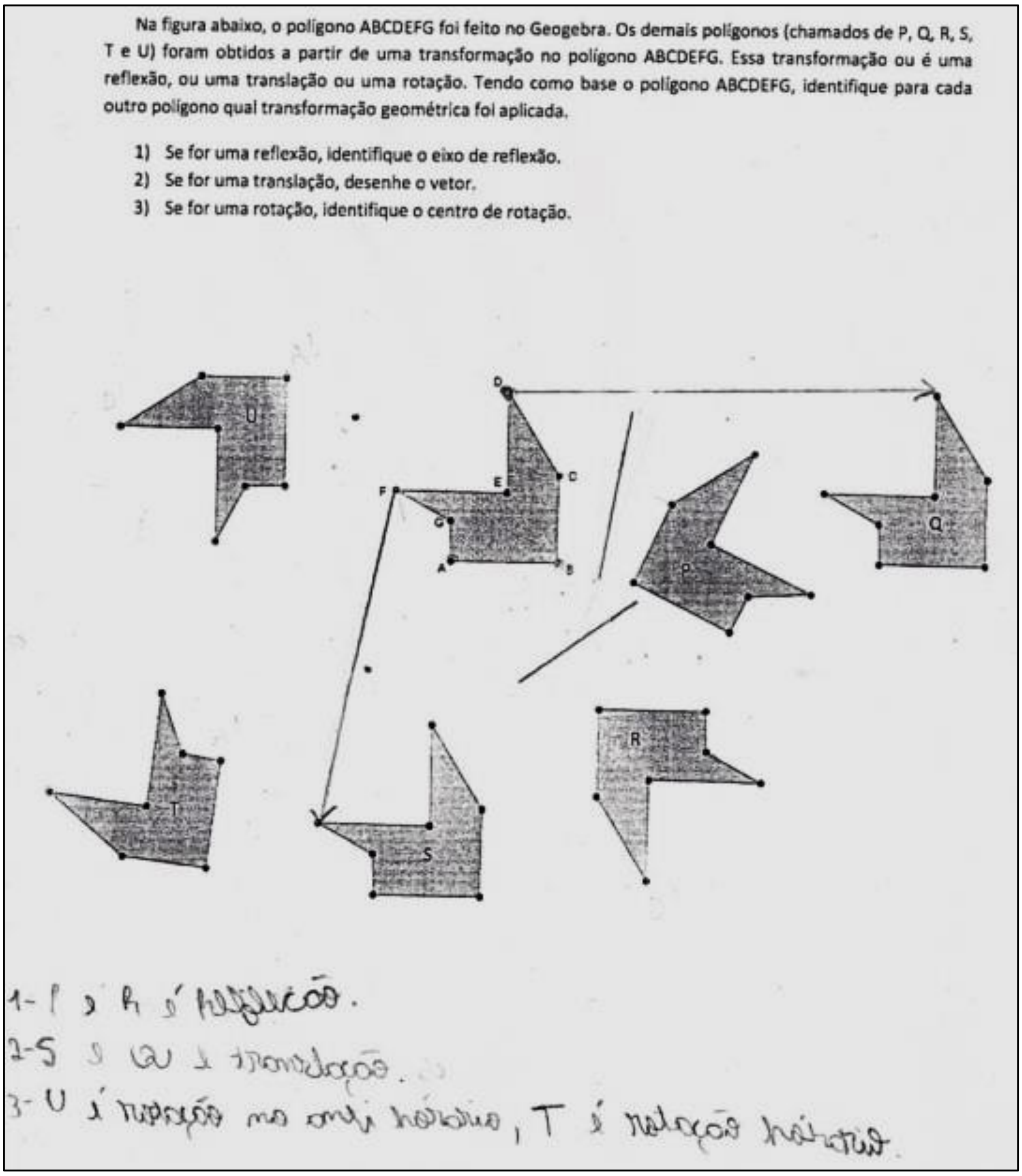


Figura 108 – Solução da atividade apresentada por Leonardo.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição: "P e R é reflexão. S e Q é translação. U é rotação no anti-horário, T é rotação horário".

Vemos que Leonardo identificou o polígono R como uma reflexão e desenhou o "eixo de reflexão" considerando apenas um par de pontos e traçando o segmento "a olho". O polígono T foi identificado como uma rotação do polígono ABCDEFG com "centro de rotação" próximo do ponto médio do segmento com extremidades no ponto A e na sua respectiva imagem.

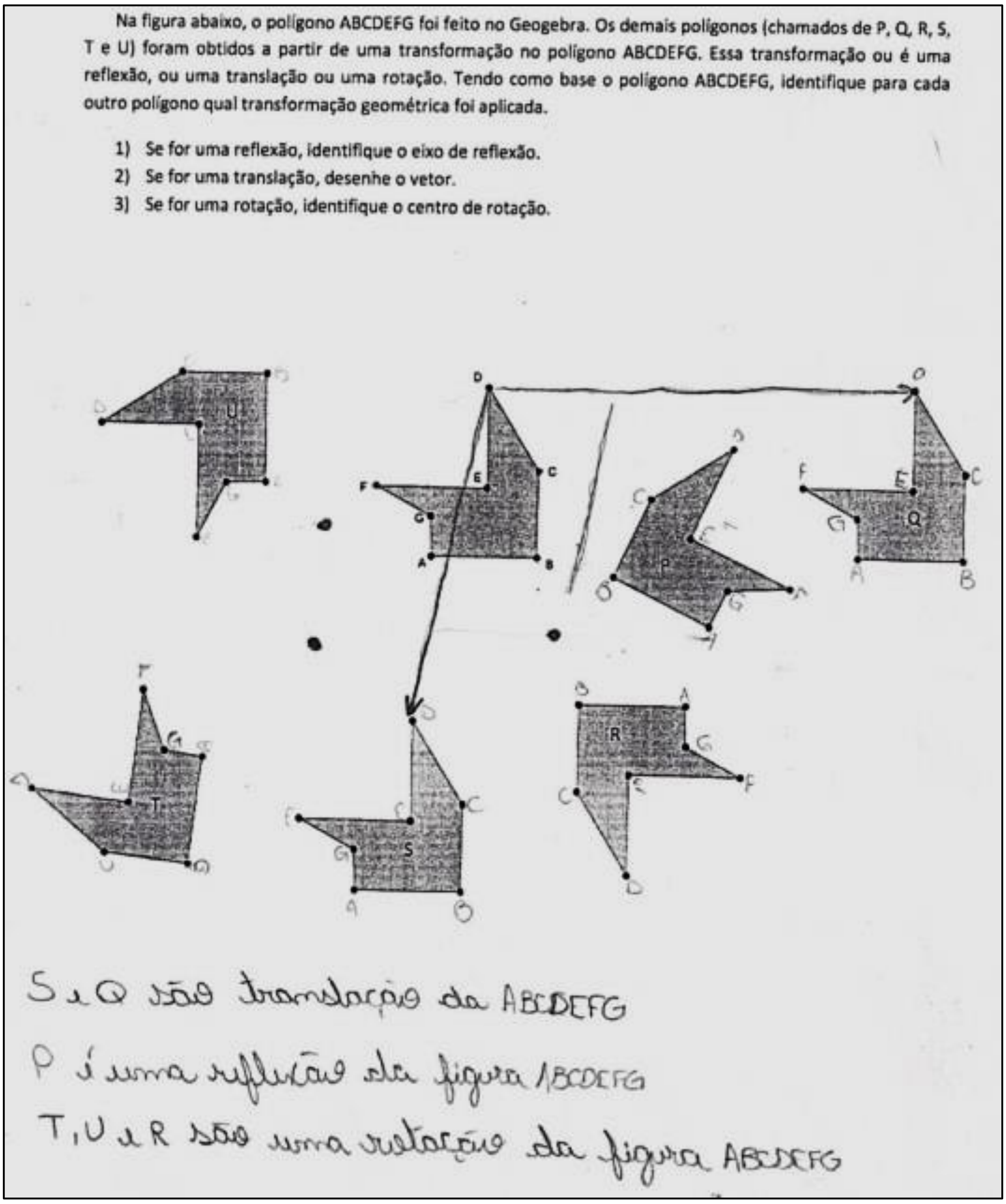


Figura 109 – Solução da atividade apresentada por Pedro.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição: "S e Q são translação da ABCDEFG. P é uma reflexão da figura ABCDEFG. T, U e R são uma rotação da figura ABCDEFG".

Notamos que Pedro identificou o polígono T como uma rotação do polígono ABCDEFG, marcando o "centro de rotação" no ponto médio do segmento com extremidades no ponto A e na sua respectiva imagem, conforme dito pelo próprio aluno ao ser questionado oralmente sobre o modo como marcara esse ponto. Para o desenho do eixo de reflexão que transforma o polígono ABCDEFG no polígono P, Pedro também utilizou dois pares de pontos e considerou os pontos médios dos segmentos BB' e CC' nessa construção, de acordo com o exposto pelo aluno.

Assim que os alunos entregaram a atividade resolvida, utilizei o projetor para projetar a imagem do polígono ABCDEFG e as imagens dos demais polígonos no quadro-negro e, juntamente com todos os alunos, discutir qual transformação deveria ser aplicada ao polígono ABCDEFG para obter cada um dos demais polígonos. Esse foi um momento de muitas trocas e discussões entre os alunos.

Apesar de algumas transformações não terem sido identificadas por alguns alunos, verifiquei que, de maneira geral, concluíram a atividade observando vários elementos das figuras geométricas, embora não considerassem, nas suas avaliações, todos os componentes das isometrias apresentados nas definições. É possível verificar que os alunos operaram com a figura original, modificando-a óptica ou posicionalmente na busca da transformação isométrica adequada e, nesse sentido, mobilizaram a apreensão operatória. Isso ficou evidente quando os alunos se referiam ao polígono ABCDEFG e aos movimentos que deveriam ser aplicados a ele para gerar os demais polígonos.

Após a conclusão das análises das transformações, lancei o seguinte questionamento oral aos alunos[8]:

– *Observando todos os polígonos, o que se pode afirmar em relação às suas medidas?*

Leonardo disse:

– *Todas elas são iguais, só mudam de posição.*

– *É a mesma figura, em lugares diferentes.* Reforçou Pedro.

Insisti questionando:

– *O que mais vocês podem me dizer de todos esses polígonos?*

Evandro observou a medida dos perímetros dos polígonos. Como ele percebeu que as medidas dos lados dos polígonos e de suas imagens são congruentes, ele concluiu que todos têm mesmo perímetro. Esse mesmo aluno, inclusive, usou essa justificativa para concluir sobre a não congruência de polígonos em atividade posterior.

– *Todas as figuras têm o mesmo perímetro. Se eu somar os lados da primeira vai ser igual das outras*, disse Evandro.

Sabemos que dois polígonos de mesmo perímetro não são necessariamente congruentes. Por isso, insisti na discussão da relação entre os perímetros e a congruência de polígonos.

Susana observou a medida dos ângulos:

[8] Durante essa discussão, preferi usar a palavra “iguais” para me referir a polígonos congruentes.

– Tem também os ângulos. A parte mais pontuda da figura, lá no F, tem a mesma abertura que em todas as outras figuras.

– E no B, o ângulo é reto, disse Alice.

– No A também, complementou Paula.

– Ok, então vocês me disseram que todos os polígonos possuem os mesmos ângulos e o mesmo perímetro. O que mais vocês observam? Questionei novamente.

Nesse momento os alunos observaram a imagem projetada no quadro e ficaram alguns instantes em silêncio. Novamente assumi o diálogo:

– Vocês também me disseram que todos os polígonos são iguais. E que também têm o mesmo perímetro. Será que sempre que dois polígonos têm o mesmo perímetro eles serão iguais?

Os alunos pareceram não compreender a pergunta e pediram que eu a repetisse. Assim que conclui a questão, Jonas disse:

– Não. Eu posso desenhar um quadrado com perímetro de 16 e também um retângulo de perímetro 16. E eles não são iguais.

– Então, não é o perímetro que permite eu dizer que os polígonos são iguais, concluí.

Os alunos concordaram, mas pareciam estar confusos. Onde o professor estava querendo chegar?

– Por que vocês podem me dizer que esses polígonos são iguais, então? Insisti na pergunta.

– Sor, já respondemos. Os ângulos são iguais e a figura é a mesma. Todo mundo "tá" vendo, falou Jonas visivelmente irritado com o rumo das discussões.

– É que, por exemplo, o Q e o S só se "moveu", foi uma translação. O P e o T são reflexões e o R e o U são rotações. Tudo partiram da mesma figura original, concluiu Pedro.

– Então, a translação, a reflexão e a rotação não alteram as medidas de uma figura?, perguntei a eles.

– Não "sor"!, respondeu Jonas.

– Para concluir me respondam: o que é preciso acontecer para que duas figuras sejam consideradas iguais?

– Uma tem que ser a translação da outra, disse Alice.

– Ou uma rotação ou uma reflexão, complementou Fabrício.

– Mas a rotação e a reflexão invertem a figura. Daí não fica igual, rebateu Alice.

– Mas ficam com as mesmas medidas, os lados e os ângulos, concluiu Fabrício.

Neste momento da discussão, abordei o conceito de congruência de polígonos a partir das transformações isométricas. Expliquei que a congruência entre segmentos e ângulos, nos casos dos polígonos, é uma consequência dessa definição; expliquei também que dois polígonos diferentes podem ser *congruentes*, mas não *iguais*. A seguir, os alunos registraram em seus cadernos a definição de figuras congruentes, conforme o texto apresentado no Quadro 16.

Quadro 16 – Definições de isometria e congruência registradas pelos alunos.

Isometrias e congruência

As transformações geométricas que acabamos de estudar (reflexão, translação e rotação) são chamadas de **isometrias** (do grego: iso = mesmo, metria = medida). Elas recebem esse nome porque mantêm as medidas de uma figura (lados e ângulos) ao sofrer a transformação.

Nos livros de Matemática também é usado o nome **congruência** para se referir a figuras com mesmas medidas de lados e ângulos.

Dessa maneira, duas figuras são congruentes se uma pode ser transformada na outra por isometria (reflexão, translação, rotação ou combinações entre elas).

Fonte: arquivo pessoal do autor.

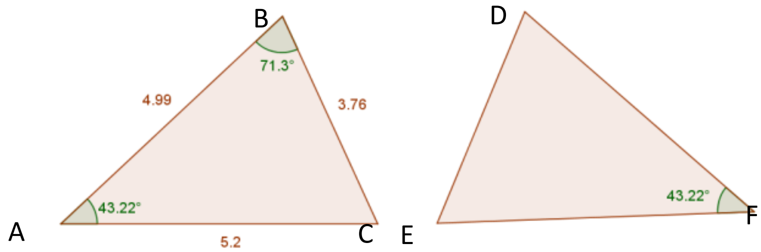
4.6 ATIVIDADE 12: CONGRUÊNCIA DE POLÍGONOS

A fim de avaliar a compreensão dos alunos acerca do conceito de congruência – e de sua relação com as isometrias – entreguei a cada aluno, em uma folha de papel, as atividades mostradas a seguir (Quadros 17 e 18). Pretendia observar de que maneira os alunos justificariam suas respostas e se utilizariam os vocábulos "congruente" e/ou "congruência" nessas justificativas.

Quadro 17 – Atividade 1 para verificação da compreensão das relações de congruência e isometria.

<u>Atividade: verificando a congruência de polígonos</u>

1) Os triângulos abaixo são congruentes. As medidas dos lados do triângulo ABC estão indicadas em centímetros.

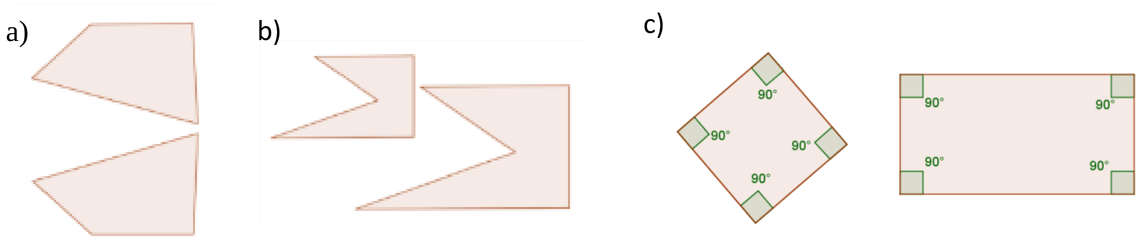


a) Qual foi a isometria aplicada ao triângulo ABC para obter o triângulo DEF? Justifique.
b) Determine a medida do ângulo B$\hat{C}$A.
c) Determine as medidas dos lados do triângulo DEF.
d) Determine as medidas dos ângulos E$\hat{D}$F e D$\hat{E}$F.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Quadro 18 – Atividade 2 para verificação da compreensão das relações de congruência e isometria.

2) Identifique, em cada item, se as figuras são congruentes. Justifique sua resposta.



Fonte: arquivo pessoal do autor.

Nas respostas aos questionamentos da atividade 1, os alunos observaram corretamente que a isometria aplicada ao triângulo foi a reflexão, embora nem todas as justificativas tenham sido precisas. Evandro, por exemplo, escreveu que os vértices do polígono ABC são perpendiculares às suas imagens (figura 110). No momento da correção das atividades juntamente com os alunos da turma, pedi que ele lesse sua resposta para os colegas. O próprio aluno percebeu que um ponto não pode ser perpendicular a outro. Na sua correção da questão, ele desenhou o eixo de reflexão e traçou os segmentos que unem cada vértice do polígono ABC às suas respectivas imagens. Todos esses segmentos estavam perpendiculares ao eixo de reflexão.

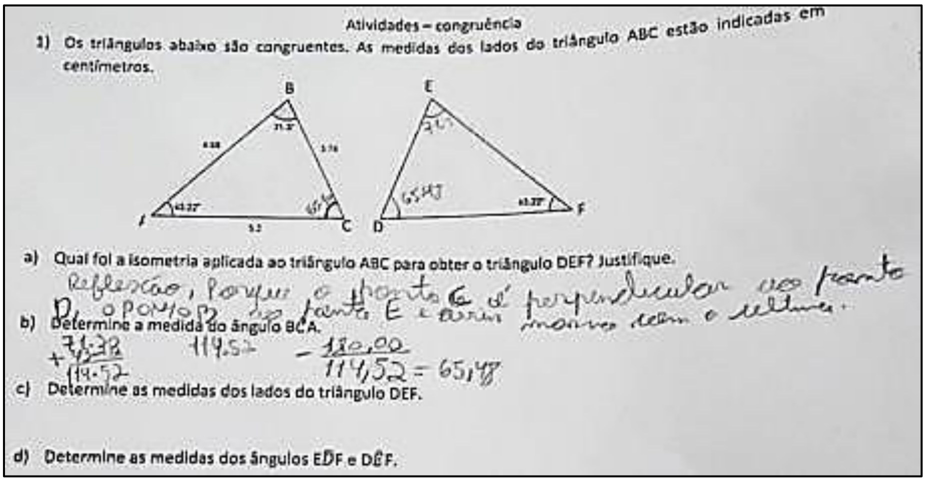


Figura 110 – Soluções da questão 1 apresentadas por Evandro.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno ao item a: “Reflexão, porque o ponto C é perpendicular ao ponto D, o ponto B ao ponto E e assim mesmo com último”.

Evandro foi o único aluno a justificar a reflexão com base na perpendicularidade dos segmentos que ligam cada vértice do polígono original às suas imagens, em relação ao eixo de reflexão.

No momento de discussão da definição do movimento de reflexão na atividade 4 (p. 66), apenas analisou-se as distâncias entre um ponto do polígono e sua imagem ao eixo de reflexão, sem considerar a perpendicularidade do segmento com extremidades nesses pontos e o eixo de reflexão. Essa observação só surgiu quando eu trouxe uma definição mais precisa de todas as transformações isométricas, na atividade 11 (quadro 14, p. 116). Penso que por esse motivo apenas um aluno levou em consideração essa perpendicularidade, pois a primeira definição foi construída após discussões, manipulações no GeoGebra e no papel quadriculado, além de contribuições de todos os alunos, ao passo que a definição com mais detalhes foi apresentada pronta, embora tenha sido discutida com os alunos.

Quanto à análise dos ângulos internos, os alunos se recordaram das atividades propostas antes de se iniciar o estudo das transformações isométricas (estudo dos ângulos) e usaram corretamente o fato de que em um triângulo a soma dos ângulos internos é de 180°. A seguir, vemos as soluções apontadas por alguns alunos para esse questionamento (figuras 111, 112 e 113).

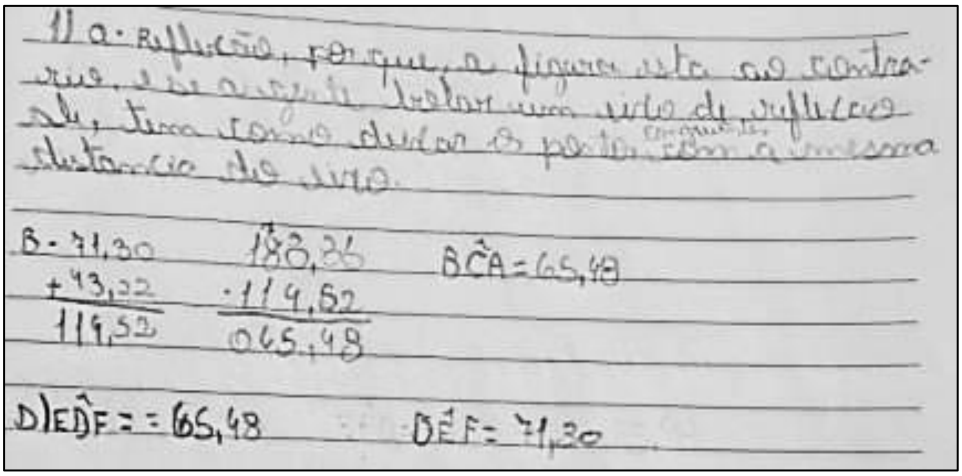
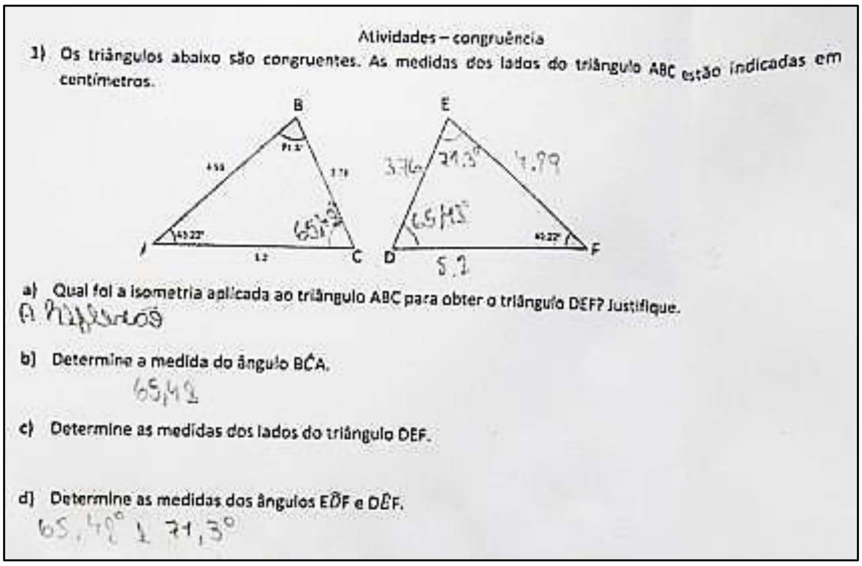


Figura 111 – Soluções da questão 1 apresentadas por Pedro.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno ao item a: “Reflexão, por que a figura está ao contrário, e se a gente botar um eixo de reflexão ali, tem como deixar os pontos congruentes com a mesma distância do eixo”.


Atividades – congruência

1) Os triângulos abaixo são congruentes. As medidas dos lados do triângulo ABC estão indicadas em centímetros.

a) Qual foi a isometria aplicada ao triângulo ABC para obter o triângulo DEF? Justifique.

A Reflexão

b) Determine a medida do ângulo BĈA.

65,48

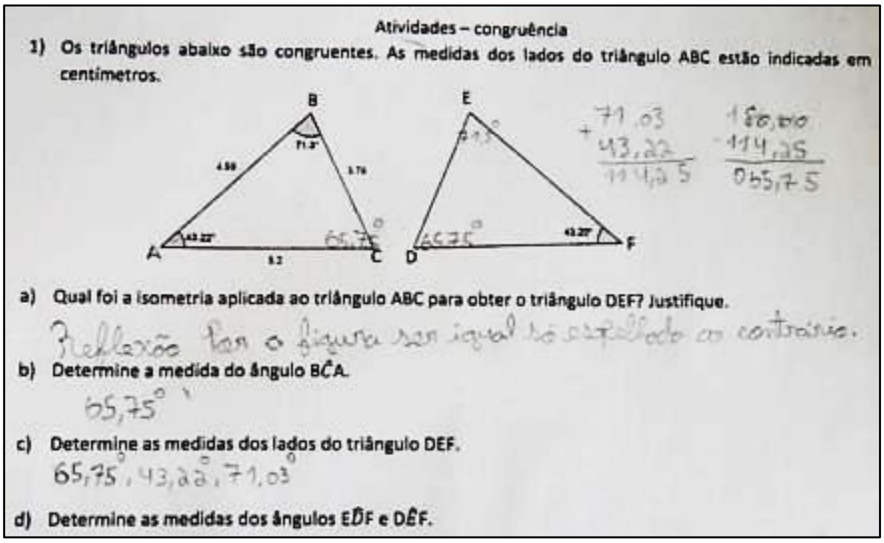
c) Determine as medidas dos lados do triângulo DEF.

d) Determine as medidas dos ângulos EDF e DÊF.

65,48° e 71,3°

Figura 112 – Soluções da questão 1 apresentadas por Leonardo.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno para o item a: "A Reflexão".


Atividades – congruência

1) Os triângulos abaixo são congruentes. As medidas dos lados do triângulo ABC estão indicadas em centímetros.

71,03 + 43,22 = 114,25 ; 180,00 − 114,25 = 065,75

a) Qual foi a isometria aplicada ao triângulo ABC para obter o triângulo DEF? Justifique.

Reflexão por a figura ser igual só espelhada ao contrário.

b) Determine a medida do ângulo BĈA.

65,75°

c) Determine as medidas dos lados do triângulo DEF.

65,75°, 43,22°, 71,03°

d) Determine as medidas dos ângulos EDF e DÊF.

Figura 113 – Soluções da questão 1 apresentadas por Fabrício.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno ao item a: "Reflexão por a figura ser igual só espelhada ao contrário".

Nas respostas à atividade 2, todos os alunos observaram que somente no item *a* os polígonos são congruentes. Abaixo as soluções apresentadas por alguns alunos (figuras 114, 115 e 116).

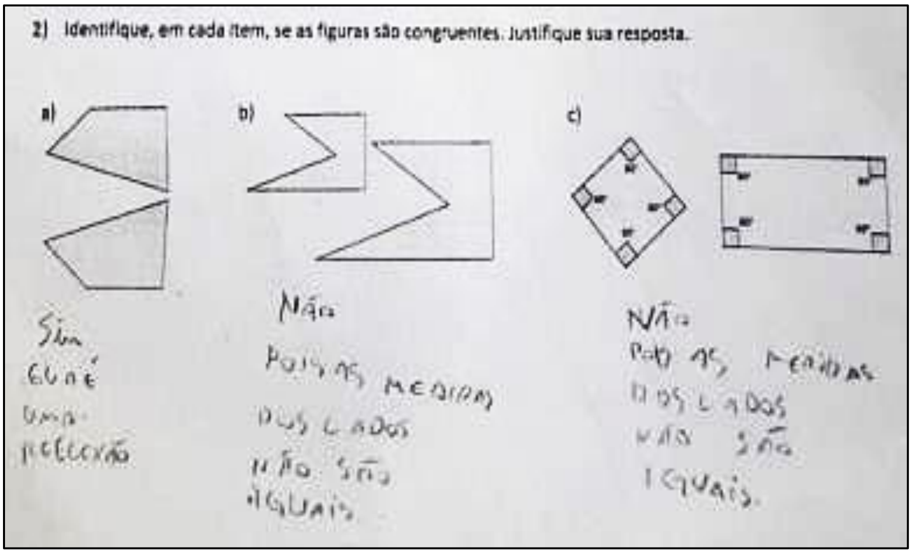


Figura 114 – Soluções de José para a questão 2. Nota-se que o aluno justifica a congruência do item *a* usando a reflexão.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno para o item a: "Sim, ela é uma reflexão". Item b: "Não, pois as medidas dos lados não são iguais". Item c: "Não, pois as medidas dos lados não são iguais".

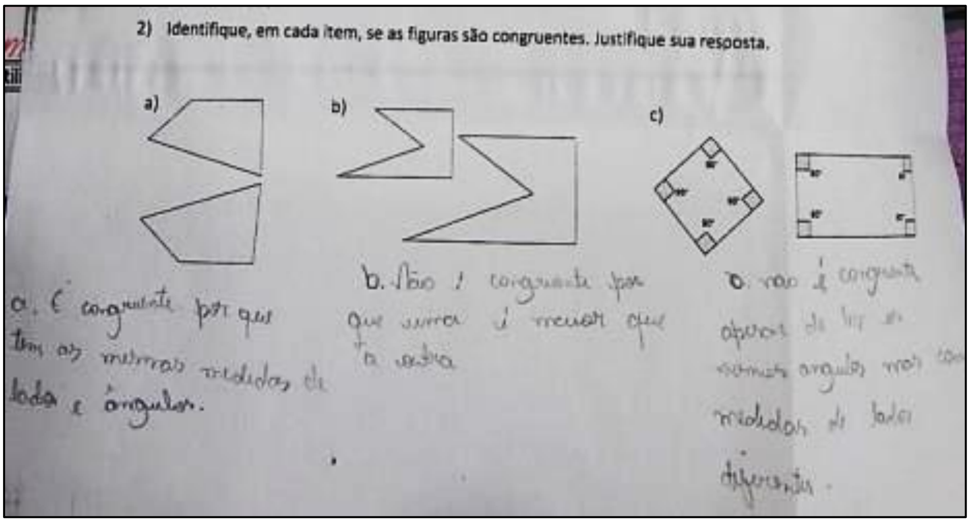


Figura 115 – Soluções de Paula para a questão 2.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna para o item a: "É congruente por que tem as mesmas medidas de lados e ângulos". Item b: "Não é congruente por que uma é maior que a outra". Item c: "não é congruente apesar de ter os mesmos ângulos mas com medidas de lados diferentes".

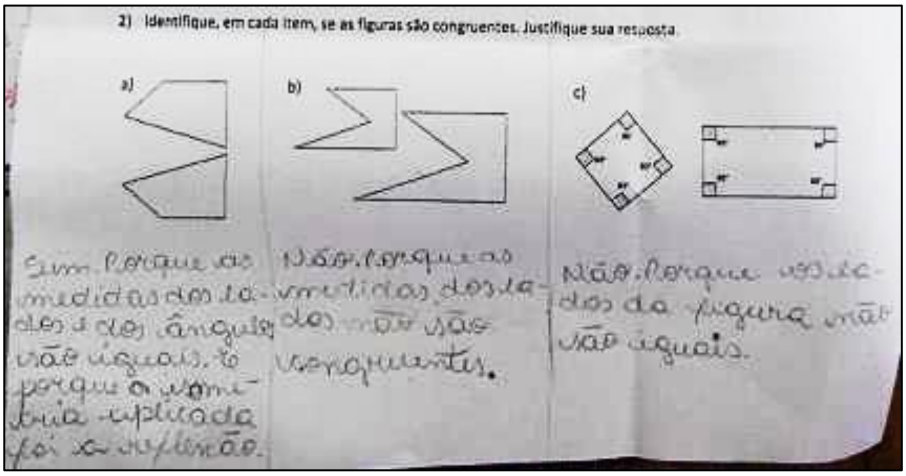


Figura 116 – Soluções apresentadas por Susana para a questão 2, que também usou a reflexão para justificar a congruência dos polígonos no item *a*.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta da aluna para o item a: "Sim. Porque as medidas dos lados e dos ângulos são iguais. E porque a isometria aplicada foi a reflexão". Item b: "Não. Porque as medidas dos lados não são congruentes". Item c: "Não. Porque os lados da figura não são iguais".

Mauro, ao justificar o item *b*, concluiu que as figuras não são congruentes, mas escreveu que uma é a translação da outra, como mostra a figura 117.

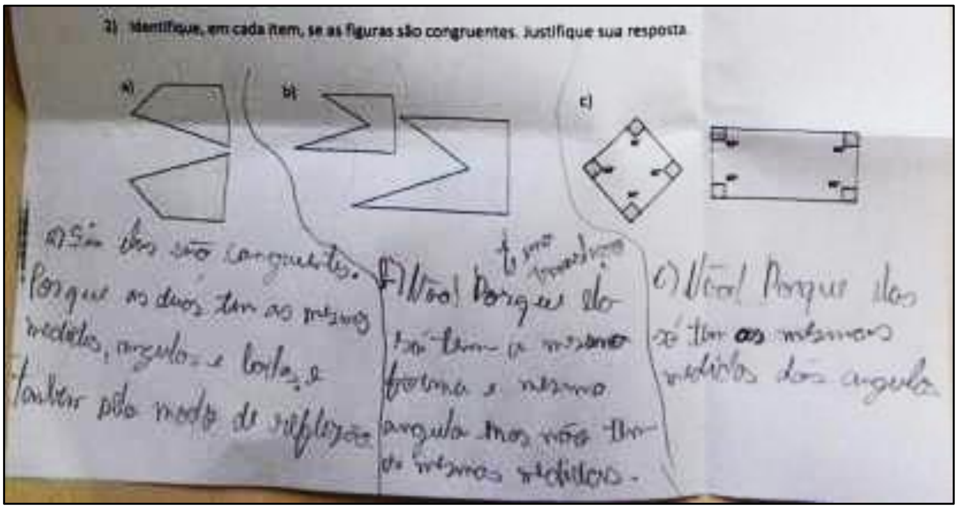


Figura 117 – Soluções apresentadas por Mauro para a questão 2.
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Transcrição da resposta do aluno para o item a: "Sim elas são congruentes. Por que as duas tem as mesmas medidas, ângulos e lados e também pelo modo de reflexão". Item b: "É uma translação. Não! Porque ela só tem a mesma forma e mesmo ângulo mas não tem as mesmas medidas". Item c: "Não! Porque elas só tem as mesmas medidas dos ângulos".

No momento da correção das atividades, juntamente com todos os alunos da turma, Mauro percebeu seu erro e o corrigiu. Ele mesmo disse que uma figura não poderia ser a translação da outra porque as medidas dos lados são diferentes.

Percebi que os alunos mobilizaram o conceito de congruência com base nas transformações isométricas e utilizaram, por exemplo, a reflexão como justificativa para a congruência dos polígonos do item *a* da questão 2 dessa atividade. Além disso, observaram em diversos momentos que as medidas dos lados e dos ângulos de dois polígonos congruentes necessariamente precisam ser iguais para que esses polígonos sejam congruentes.

5 ANÁLISES DA IMPLEMENTAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

Neste capítulo, apresentamos uma análise da implementação da proposta didática junto aos alunos e dos resultados observados. Em cada seção destacamos um determinado aspecto da pesquisa, dialogando com os autores estudados e de acordo com o exposto no quarto capítulo.

5.1 O CONVITE AOS ALUNOS E OS AMBIENTES DE DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Como professor de Matemática desde o ano de 2001, sempre me preocupei com a formação de um aluno que, além de compreender os conteúdos abordados, pudesse relacioná-los com seu cotidiano. Com o passar dos anos no magistério, percebi que nem sempre os alunos aprendem aquilo que é desenvolvido nas aulas, mesmo com a diversificação das atividades propostas e que a aprendizagem não depende exclusivamente de um professor bem capacitado ou de um método eficaz de "transmissão" de conteúdos.

No presente trabalho, me propus a desenvolver uma metodologia diferente daquelas que eu já havia utilizado em minha carreira enquanto professor. Ao substituir aulas com explicações prontas seguidas de exercícios por atividades nas quais as opiniões dos alunos seriam consideradas para a construção de novos conhecimentos, estava entrando em um "território novo a ser explorado". Tudo o que foi pensado era uma novidade tanto para mim quanto para os alunos.

O primeiro passo foi pensar em como convidar os alunos para fazer parte desta "aventura". Ao iniciar a atividade 1, em sala de aula, expliquei que em todos os momentos eles poderiam expor suas opiniões e o que estava em jogo era a aprendizagem de cada um, sem a preocupação imediata em estarem sendo avaliados. Inicialmente, percebi uma estranheza por parte dos alunos, que frequentemente me questionavam sobre testes, provas ou listas de exercícios. Essa "preocupação" foi desaparecendo com o decorrer das atividades e, a cada aula, senti os alunos mais à vontade e confiantes para demonstrar o que estavam pensando.

Para mim, isso ficou evidente a partir da atividade 5, na qual foi realizado um jogo que envolvia uma disputa entre duplas de alunos. Nesse jogo, os alunos puderam escolher de que maneira seria feita a contagem dos pontos para o estabelecimento da dupla campeã. Percebi que houve participação de todos os alunos nessa decisão, que ocorreu de maneira dialógica. Os dois alunos que foram os "juízes" do jogo mediaram as discussões e se preocuparam em ouvir todos. Fiquei muito contente com a maneira como os alunos conduziram o andamento do jogo, pois, mesmo havendo uma disputa, percebi que a intenção de cada um não era apenas a de vencer o jogo, mas também aproveitar o momento para compartilhar suas ideias com os demais colegas. No final da atividade, o que menos foi levado em conta pelos alunos foi a consagração da dupla vencedora; as falas dos envolvidos eram sobre a maneira como se localizar no plano cartesiano ou sobre a melhor estratégia para descrever um segmento de reta por meio das coordenadas cartesianas.

No Laboratório de Informática da escola, outro ambiente muito utilizado durante as aulas, observei que, a princípio, muitos alunos consideravam que não estavam ali para construir conhecimentos. Quando os questionei sobre isso, muitos relataram que o uso do computador na escola, nas mais diversas disciplinas, se resumia a pesquisas na *Internet*, uso de jogos ou digitação de trabalhos. Em um primeiro momento, senti dificuldade em convencê-los de que o uso do computador, em particular do *software* GeoGebra, não deveria ser apenas para "fazer algo diferente", mas para proporcionar outro ambiente de discussões e análises que poderiam ser potencializadas com esse recurso. Assim, o convite para o uso do ambiente computacional não foi aceito de imediato. Porém, a cada ida ao Laboratório de Informática, senti os alunos mais à vontade, aproveitando os recursos disponíveis para observações mais detalhadas das propriedades das isometrias estudadas. Como exemplos disso, cito a definição estabelecida pelos alunos para o movimento de translação – feita nesse ambiente, após muito diálogo e participação da maioria dos envolvidos – e a constatação de que a rotação de amplitude 360° de um polígono leva ao mesmo polígono, na mesma posição (essa conclusão foi obtida pelos alunos de maneiras diferentes, mas baseadas em suas construções no *software* e validadas pelas opiniões dos demais colegas).

Penso, assim, que o desenvolvimento das atividades nesses ambientes ocorreu de maneira dialógica, em que as perspectivas dos participantes sempre foram consideradas e a construção de novas perspectivas, incentivadas.

Vamos analisar, como exemplo, o diálogo em que se discutiu o conceito de congruência, apresentado na seção 4.5 do quarto capítulo, ao final da atividade 11.

Assim que pedi aos alunos que observassem as figuras presentes na atividade e procurassem alguma relação entre suas medidas, percebi imediatamente o *estabelecimento de contato*, na medida em que cada aluno prestava atenção ao outro, respeitando sua opinião. Quando um aluno *percebe* que é possível que polígonos com mesmo perímetro não sejam congruentes e *reconhece* essa ideia, comunicando-a aos demais colegas, pode-se observar que a abertura no diálogo para que ele pudesse *posicionar-se* foi estabelecida. O diálogo segue com os alunos *reformulando, desafiando* e *avaliando* ideias postas pelos colegas, levando todas as discussões a outro patamar, no qual o conceito de congruência é estabelecido de maneira dialógica, sem imposição de ideias pré-estabelecidas ou de qualquer espécie de autoritarismo do professor.

Estas características dialógicas e participativas, mantidas ao longo de toda a sequência, vêm ao encontro do modelo de cooperação investigativa, proposto por Ole Skovsmose, apresentado no segundo capítulo da dissertação.

5.2 OS RECURSOS DISPONIBILIZADOS

Em todo o trabalho, procurei utilizar os mais diversos recursos para o desenvolvimento das atividades. Entre eles, destacam-se os materiais manipulativos, que têm a conveniência de serem facilmente obtidos, e o *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Optei por usá-los por acreditar que podem contribuir satisfatoriamente na visualização de relações geométricas importantes.

5.2.1 Os materiais manipulativos

Os primeiros materiais manipulativos utilizados foram os geoplanos e os papéis quadriculados para a construção de polígonos. Para representar polígonos no geoplano, os alunos fizeram uso de atilhos. A seguir, deveriam representar esses mesmos polígonos no papel quadriculado. O objetivo era verificar se os alunos manteriam as proporções entre as representações nos dois materiais. Percebi que muitos alunos não desenharam o polígono no papel quadriculado mantendo essas proporções. Com isso, percebe-se que, para esses alunos, naquele momento, apenas a apreensão perceptiva das formas foi utilizada, ou seja, as figuras foram reconhecidas de maneira global, mas sem levar em consideração os aspectos mais específicos de cada uma, como, por exemplo, as distâncias entre determinados segmentos. Contudo, após discussões com a turma, observei que esses alunos reconheceram que as representações não eram proporcionais e todos tiveram muito mais atenção ao representar esses desenhos no GeoGebra, em uma atividade posterior.

O uso do papel quadriculado, nesse momento, foi muito importante para a familiarização de cada aluno com esse material, visto que ele foi utilizado em muitas outras atividades.

Entre os materiais manipulativos utilizados na abordagem das isometrias estudadas estão os espelhos para abordar a reflexão. Embora já tenha visto outros professores usarem esse material para a visualização das características da reflexão, em minha trajetória, enquanto professor, nunca o havia utilizado. Por esse motivo, fiquei um pouco receoso de que a manipulação dos espelhos pudesse de alguma maneira atrapalhar o desenho no papel quadriculado do polígono refletido. Para minha surpresa, todos os alunos obtiveram uma reflexão do polígono, tendo o espelho posicionado no “eixo de reflexão”. Algumas características dessa transformação não foram observadas de imediato, como, por exemplo, as distâncias de cada ponto do polígono – e de suas imagens – até o espelho. Porém, todos os alunos observaram que a reflexão “inverte” o polígono. Considero que a inversão a que os alunos se referem se baseia na inversão da orientação do plano provocada pela reflexão em torno de um eixo, tal como apontado nas páginas 56 e 57. Os detalhes mais apurados do movimento foram discutidos em atividades posteriores.

Assim, os espelhos desempenharam um papel muito importante na compreensão do movimento de reflexão. Isso foi verificado em outras atividades, nas quais, para concluir que um polígono é uma reflexão de outro (sem o auxílio do espelho), os alunos frequentemente se referiam ao eixo de reflexão como sendo “o espelho que inverte a figura”.

No estudo da rotação, as bandeirinhas (feitas com palito de dente) e os palitos de picolés perfurados no ponto em que uma determinada rotação deveria ser efetuada, também tiveram um papel importante na compreensão das relações desse movimento. Percebi que, ao manipular esses objetos, os alunos compreenderam a importância do centro de rotação. Nas rotações em que o centro de rotação está no objeto, os alunos em geral utilizaram o dedo para fixar esse ponto, efetuando, em seguida, a rotação solicitada. Já nos movimentos em que o centro de rotação encontra-se fora do objeto, a maioria dos alunos desenhou esse ponto em uma folha de papel, posicionou a bandeirinha de acordo com a atividade e, a seguir, efetuou a rotação.

Na questão 5 da atividade 10, os alunos deveriam efetuar a rotação de um polígono. Para essa questão, nenhum material concreto foi fornecido, mas observei que os alunos sentiram sua necessidade e por isso resolveram confeccionar polígonos com folhas de papel, congruentes àqueles apresentados. Isso demonstra a relevância que o uso desses objetos teve na compreensão do movimento de rotação.

Em atividades seguintes, nas quais os alunos precisaram identificar se um polígono era o resultado de uma rotação de outro polígono, frequentemente os observei fazendo “rotações imaginárias” sem a presença física de algum objeto concreto. Para isso, utilizavam suas mãos, mantendo o dedo indicador fixo no centro de rotação. Essas movimentações mentais, mobilizadas na resolução da tarefa proposta, são indícios de apreensão operatória, e mostra que as manipulações dos objetos concretos contribuíram para que a identificação da rotação pudesse ser feita.

5.2.2 O *software* GeoGebra

As aulas em que a turma se dirigia ao laboratório de Informática eram certamente as mais esperadas pelos alunos. Após compreenderem os objetivos do uso do GeoGebra, frequentemente os estudantes questionavam sobre qual seria o próximo momento em que iriam explorar o GeoGebra nas aulas de Matemática. Isso demonstra que o convite feito aos alunos para experimentar essa ferramenta, mesmo que não imediatamente, foi aceito.

Primeiramente, observei que as construções poligonais, feitas na atividade 1 no papel quadriculado, foram reproduzidas no ambiente do programa com muito mais atenção do que quando as fizeram na transição entre os geoplanos e os papéis quadriculados, ou seja, houve o cuidado, na maior parte dos casos, em manter as proporções entre as representações. Nesse momento os alunos fizeram uso da apreensão sequencial, que é necessária quando o sujeito constrói uma figura com base nas observações dos elementos presentes nela.

Também destaco as construções feitas pelos alunos no GeoGebra que permitiram verificar muitas propriedades das isometrias como, por exemplo, no movimento de translação, em que os alunos observaram que todos os segmentos de reta que têm extremidades em um ponto do polígono e em sua respectiva imagem possuem o mesmo comprimento; ou, ainda, que uma rotação de amplitude 360° de um polígono leva ao mesmo polígono na mesma posição, como mostrado no capítulo anterior.

O uso desse ambiente de geometria dinâmica foi decisivo na compreensão das transformações isométricas. Ao manipularem os polígonos e observarem o que ocorre com suas imagens – seja numa reflexão, numa translação ou numa rotação – os alunos apontaram diversas observações e puderam confirmar hipóteses aventadas previamente ao utilizarem os materiais manipulativos.

Duval (2011) destaca o aspecto dinâmico do uso dos *softwares* em sala de aula. Ao movimentarem eixos de reflexões, vetores de translações e centros de rotações no ambiente do GeoGebra, os alunos observaram que há mudanças de posição nas imagens de um determinado polígono submetido a uma transformação isométrica, mas que as medidas de lados e ângulos não se alteram. O dinamismo permitiu que os alunos obtivessem conclusões como essa que, provavelmente, seriam muito mais difíceis de serem estabelecidas se realizassem o mesmo trabalho apenas em papel.

Skovsmose (2010) aponta que ambientes computacionais têm o potencial de apoiar abordagens em cenários para investigação. Essa relação ficou nítida quando, após concluirmos as atividades para a construção do conceito de congruência, foram desenvolvidas atividades para a construção do conceito de semelhança. Em uma aula, os alunos questionaram se era possível haver uma homotetia[9] de razão negativa. Eles próprios construíram um polígono no GeoGebra e obtiveram uma homotetia de razão -2. Ao observarem as imagens dos polígonos projetadas no quadro negro, alguns alunos comentaram que o polígono ficara invertido, porém maior. José considerou a possibilidade de que a figura sofrera uma rotação de 180º, porém ficara maior. O mesmo aluno afirmou que se a homotetia tivesse razão -1, o polígono resultante ficaria na mesma posição que uma rotação de 180° e, portanto, seria congruente ao polígono original. Após fazer as construções no ambiente do programa, as hipóteses do aluno foram confirmadas.

5.3 A CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS DE ISOMETRIA E CONGRUÊNCIA

A importância que o uso dos materiais manipulativos e do *software* GeoGebra teve na construção dos conceitos de isometria pôde ser percebida em diversos momentos.

Na atividade 4, entregue em uma folha de papel, os alunos deveriam identificar polígonos que são reflexões de um polígono chamado de referência. Muitos alunos justificaram que determinado polígono era uma reflexão do polígono de referência após procurar uma posição adequada para o eixo de reflexão e analisar as distâncias dos pontos do polígono de referência e de suas respectivas imagens até esse eixo. Suas respostas foram influenciadas pela construção e manuseio, em atividade anterior, de polígonos e de suas reflexões em torno de retas, tanto com auxílio dos espelhos quanto do ambiente do GeoGebra.

Nas atividades 11 e 12, nas quais era necessária a observação de polígonos e a identificação das isometrias presentes, notamos que os alunos concluíram sobre as transformações isométricas sem recorrer aos materiais manipulativos, mas citando-os em suas falas. Como exemplo, tem-se a atividade 12, em que um par de triângulos era exibido, sendo um a reflexão do outro. Muitos alunos justificaram que estavam diante de uma reflexão, pois se um espelho fosse colocado “entre eles”, um triângulo ficaria o “contrário do outro”.

[9] Homotetia é a ampliação ou redução de uma figura, mantendo sua forma, a partir de um ponto fixo, denominado centro de homotetia. Uma homotetia transforma uma figura em outra, semelhante a ela. A razão de homotetia é o número pelo qual as medidas dos segmentos de um polígono são multiplicadas para a obtenção do novo polígono. Assim, uma homotetia de razão 2, por exemplo, transforma um polígono em outro semelhante com as medidas dos segmentos iguais ao dobro do primeiro. Já uma homotetia de razão -2 transforma um polígono em outro semelhante com as medidas dos segmentos iguais ao dobro do primeiro, porém sofre uma rotação de 180° em relação ao primeiro. O centro dessa rotação é o mesmo ponto do centro da homotetia.

Diálogos semelhantes também foram observados na atividade 11. Essas atitudes indicam que esses alunos fizeram uso da apreensão operatória, efetuando uma modificação óptica ao utilizarem mentalmente um espelho para verificar a ocorrência da reflexão.

Vamos analisar agora o que foi compreendido e/ou percebido pelos alunos ao estudarem cada uma das isometrias.

No estudo do movimento de reflexão, a primeira constatação dos alunos foi a de que essa isometria "inverte" o polígono, visto que o espelho produz esse "efeito". Essa propriedade foi usada por muitos alunos em atividades nas quais deveriam ser analisadas as isometrias aplicadas a um determinado polígono. Alguns alunos observaram que a distância de cada ponto do polígono até o eixo de reflexão é igual à distância de sua respectiva imagem até esse eixo. Esta observação foi feita para pontos "próximos" ao eixo, de modo que, inicialmente, não houve uma generalização para todos os pontos do polígono. Como nas atividades não foram priorizadas as construções dos segmentos de reta com extremidades em cada ponto do polígono e em sua respectiva imagem, a perpendicularidade desse segmento com o eixo de reflexão só foi observada no momento da discussão das isometrias, apresentado na seção 4.4 do quarto capítulo. Contudo, todos os alunos identificaram a ocorrência dessa isometria na atividade 12.

O estudo do movimento de translação foi desenvolvido nas atividades 7, 8 e 9, tendo o plano cartesiano como auxílio. Cada vértice de um determinado polígono era relacionado a um ponto do plano cartesiano e, através de operações de adição e/ou subtração de uma quantidade fixa à abscissa ou à ordenada desse ponto, os alunos deveriam identificar o movimento do polígono. Na primeira dessas atividades, percebi muitas dificuldades dos alunos ao realizarem as operações, principalmente quando os números envolvidos eram negativos. Pensando nisso, as outras duas atividades foram desenvolvidas a fim de que os alunos pudessem discutir essas dificuldades com os colegas, estabelecendo um processo dialógico entre os envolvidos. Ao traçar no papel os segmentos de reta com extremidades em cada vértice do polígono e em sua respectiva imagem, todos os alunos observaram que esses segmentos eram "iguais" (referindo-se às suas medidas). Quando desenvolveram a atividade 9, no ambiente do GeoGebra, os alunos perceberam que cada um desses segmentos tinha a mesma medida que o vetor da translação. A observação de que esses segmentos são paralelos entre si e de que cada um é paralelo ao vetor da translação foi feita ao discutirmos a definição desse movimento, após a atividade 10.

Ao planejar as atividades de rotação, pensei que essa seria a transformação isométrica com maiores dificuldades de identificação por parte dos alunos. Porém, essa minha percepção estava equivocada, pois, em geral, os alunos identificaram polígonos gerados por uma rotação de outro polígono. A principal dificuldade foi a obtenção do centro de rotação, em especial quando este não pertence ao polígono. Penso que esse obstáculo surgiu porque era necessário considerar a distância do centro de rotação até cada ponto do polígono e sua respectiva imagem.

Quanto à definição de congruência, a observação de que as transformações isométricas não alteram as medidas dos lados e dos ângulos internos foi encarada com "naturalidade" para os alunos, visto que na discussão da definição de congruência muitos alunos citaram que era "claro e visível" que os polígonos apenas mudaram de posição e mantiveram suas medidas.

Após a formalização do conceito de congruência, os alunos pouco usaram o vocábulo "congruente" para se referirem a polígonos com mesmas medidas de lados e ângulos. Muitos ainda utilizaram "iguais" como sinônimo de congruentes. Procurei incentivar o uso do termo "congruente", por parte dos alunos, por considerá-lo mais adequado. Penso que, à medida que se torne um hábito sua pronúncia em sala de aula, ele passará a fazer parte dos seus vocabulários.

Em um item da atividade 12, foram apresentados pares de polígonos, sendo um deles de polígonos congruentes. Todos os alunos souberam identificar o par de polígonos congruentes, justificando essa congruência com a menção à transformação isométrica de reflexão. Os pares de polígonos não congruentes também foram identificados e as justificativas dos alunos se referiram aos ângulos internos e/ou às medidas dos lados dos polígonos.

As isometrias também foram usadas como justificativa para a congruência de polígonos na atividade já mencionada neste capítulo, na qual o aluno relacionou o movimento de rotação a uma homotetia de razão -1. Na oportunidade, esse aluno usou a rotação para justificar que o polígono obtido após essa isometria é congruente ao polígono original.

Assim, nota-se que a compreensão do significado de congruência de polígonos e de sua relação com as isometrias foi referida várias vezes pelos alunos. Isso indica que eles associaram o conceito de congruência às transformações isométricas, como se pretendia com o desenvolvimento da investigação.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como objetivo principal analisar de que maneira o estudo das isometrias, baseado em atividades de naturezas investigativa e exploratória, pode contribuir para a compreensão do conceito matemático de congruência.

As atividades propostas buscaram romper com o paradigma do exercício, ao proporem questões que puderam ser discutidas e cujas respostas não eram únicas ou pré-estabelecidas. Percebi que a adoção dessa metodologia, além de fortalecer minha prática enquanto professor, contribuiu para que os alunos se tornassem efetivamente os atores principais do processo de construção de seus conhecimentos. Mesmo nos momentos em que era necessária a exposição de um conceito no quadro-negro, o convite ao diálogo estava estabelecido.

Para responder à questão principal do estudo, a leitura dos referenciais teóricos expostos no segundo capítulo foi de grande importância. Por meio delas e da minha prática como professor, pude compreender mais profundamente como se dá o desenvolvimento de uma metodologia baseada no diálogo, além dos aspectos cognitivos envolvidos no estudo da Geometria. Entender como alguém aprende me parece ainda algo muito complexo. Muitos são os teóricos que refletiram ou refletem sobre tal questão. Compartilho da opinião de que o papel do professor e da escola como um todo não é o de transmitir conceitos acabados e já formulados, mas sim o de promover a autonomia intelectual dos alunos, de maneira que busquem "por conta própria" suas verdades e, assim, pensem sobre sua própria aprendizagem.

Senti também a necessidade de estudar a matemática das isometrias e, assim, o desenvolvimento do terceiro capítulo muito contribuiu nesse sentido.

Como professor, o uso das isometrias para a abordagem do conceito de congruência foi a principal novidade para mim. Em diversos momentos me surpreendi com a maneira como as manipulações dos materiais concretos e de objetos virtuais no *software* GeoGebra contribuíram para a compreensão de ideias que, se fossem transmitidas apenas por meio do meu discurso, talvez não ocorresse. Analisando, por exemplo, as soluções propostas pelos alunos para as atividades de congruência, percebi que frequentemente havia a referência ao fato dos polígonos terem as mesmas medidas de lados, pois nem a reflexão, nem a translação ou a rotação alteram essas medidas. Também me entusiasmei com o modo como os alunos justificaram a congruência entre polígonos: em geral as isometrias foram evocadas, tanto nas falas quanto em suas escritas. Nesse sentido, fica claro que o desenvolvimento do estudo das isometrias apresenta-se como uma possibilidade para a construção do conceito de congruência de polígonos e, certamente, para figuras geométricas planas ou tridimensionais.

Penso que uma das características do processo de construção de conhecimento seja a experimentação de um conceito por diferentes meios e em diversas situações. Assim, o aluno vai compreendendo as relações intrínsecas presentes no objeto de estudo e torna-se capaz de definir tal objeto. Durante o desenvolvimento da sequência de atividades, a abordagem das isometrias subentendia o conceito de congruência; em praticamente todos os momentos, os alunos estavam diante de polígonos congruentes. Quando confrontados com polígonos não congruentes na última atividade da sequência, os alunos justificaram a não congruência baseando-se nas diferenças entre as medidas dos lados. Talvez, durante as demais atividades, fosse preciso colocar os alunos diante de outros casos de polígonos não congruentes para evidenciar a importância das isometrias em suas justificativas.

Finalmente, posso afirmar que o desenvolvimento desta pesquisa representou uma nova etapa em minha carreira de professor, tanto pelos conhecimentos adquiridos como pela mudança no meu modo de conceber o processo de construção do conhecimento. Afirmo isso porque percebi que, ao atuar como professor pesquisador, tive a oportunidade de refletir sobre minha prática e conceber novas visões em relação ao aprender. As interpretações que os alunos dão para um objeto, por exemplo, são tantas que surpreendem. Muitas vezes o que os professores querem é que todos os alunos pensem e interpretem aquele objeto da mesma maneira que os livros mostram, ou até mesmo da maneira como eles (os professores) pensam e interpretam. Mas não podemos esquecer que as vivências de cada aluno são diferentes. O que pode ser correto ou interessante para um, não o é para outro. O que pode ser óbvio para o aluno X não é nada trivial para o aluno Y. Espero, assim, poder auxiliar colegas de profissão em suas buscas por metodologias diferenciadas para suas aulas ou até mesmo para refletir sobre suas concepções de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, Paulo. Investigações em Geometria na Sala de Aula. In: VELOSO, E.; FONSECA, H.; PONTE, J.P.; ABRANTES, P. (Orgs.). **Ensino da Geometria no Virar do Milénio**. Lisboa: DEFCUL, 1999. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto1.PDF>. Acesso em 2 mar. 2016.

BOLDA, Cláudia Regina Flores. **Geometria e visualização:** desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração. 1997. 162 f. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação e Ciência) – Programa de Pós-Graduação, Mestrado em Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

BONADIMAN, Adriana. **Álgebra no Ensino Fundamental:** produzindo significado para as operações básicas com expressões algébricas. 2007. 300f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

DUVAL, R. Geometrical pictures: kinds of representation and specific processing. In: **Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education**. SUTHERLAND, R.; MASON, J. (eds.). Berlin: Springer, 1995, p. 142-157.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. **Revemat**, Florianópolis, v. 07, n. 1, p. 118-138, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118/22382>. Acesso em: 10 jan. 2016.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Tânia M. M. Campos (Org.). São Paulo: Proem, 2011.

ENGEL, Guido I. Pesquisa-ação. **Revista Educar**, Curitiba, n. 16, p. 181-191, 2000. Editora da UFPR. Disponível em: <http://www.educaremrevista.ufpr.br/arquivos_16/irineu_engel.pdf>. Acesso em: 5 dez. 2015.

MEGA, Élio. **Ensino/aprendizagem da rotação na 5ª série:** um estudo comparativo em relação ao material utilizado. 2001. 284f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2001.

MELLO, Dorival A. de; WATANABE, Renate G. **Vetores e uma iniciação à geometria analítica**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

REFATTI, Liliane Rose. **Uma sequência didática para o estudo de transformações geométricas**. 2012. 217f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2012.

REZENDE, Eliane Q. F.; QUEIROZ, Maria L. B. de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2 ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2008.

RODRIGUES, Camila Roberta Ferrão. **Potencialidades e possibilidades do ensino das transformações geométricas no Ensino Fundamental**. 2012. 156f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

SKOVSMOSE, Ole.; ALRØ H. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro, n 14, p. 66-91, 2000.

TINOCO, Maria J. **Isometrias**. 2012. 68f. Dissertação (Mestre em Matemática para professores) – Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2012.

WAGNER, E. **Construções geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 1993.

APÊNDICE 1

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. __________________, responsável pelo(a) aluno(a) ____, da turma 191, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **isometrias e congruência: um experimento no Ensino Fundamental**, desenvolvida pelo(a) pesquisador Mosael Juliano Brocker. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Elisabete Zardo Búrigo, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (51) 3308-6212 ou e-mail elisabete.burigo@mat.ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Explorar a compreensão das isometrias (reflexão, translação e rotação);
- Analisar de que maneira a compreensão dessas isometrias pode auxiliar na construção do conceito de congruência;
- Investigar as possibilidades de atividades de natureza investigativa e exploratória na abordagem desses assuntos.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome (ou nome fictício) e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de questionário escrito, bem como da participação em aulas/encontros, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço Rua Jari, 253, bairro Nova Parobé, Parobé, telefone (51) 9684-7590, e-mail: mosael.brocker@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, 18 de agosto de 2015.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE 2

SUGESTÃO DE ATIVIDADES PARA A ABORDAGEM DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE CONGRUÊNCIA

Neste apêndice apresentamos o produto técnico deste estudo. Trata-se de uma sugestão de sequência de atividades para a abordagem do tema “transformações geométricas e a construção do conceito de congruência”. Ressaltamos que as atividades apresentadas a seguir são flexíveis e não precisam ser seguidas rigorosamente, cabendo ao professor observar quais adaptações podem ser feitas em cada uma a fim de atender o seu grupo de alunos.

Destacamos, ainda, que o tema desta sequência pode ser desenvolvido em qualquer um dos anos finais do Ensino Fundamental ou até mesmo no Ensino Médio desde que os alunos tenham conhecimento da medida de ângulos e das operações com números inteiros.

Atividade 1 – um primeiro contato com o geoplano e o papel quadriculado

Os alunos da turma se dividirão em pequenos grupos. Cada aluno receberá um geoplano e três atilhos, com os quais deverá compor uma figura no geoplano. A seguir, será distribuído um papel quadriculado no qual deverá ser desenhada a mesma figura composta no geoplano. Para essa composição no papel quadriculado, os alunos discutirão suas dúvidas juntamente com seus colegas para que juntos tirem suas conclusões.

O professor, ao observar o andamento da atividade, poderá estar atento às questões mostradas abaixo, com o objetivo de analisar como se dão as construções dos alunos e de que maneira cada um trata as proporções entre as representações.

a) Será que os alunos usarão régua?
b) De que maneira serão desenhados eventuais segmentos não marcados no papel quadriculado, como por exemplo, diagonais de quadrados?
c) Serão respeitadas as proporções entre a figura representada no geoplano e a desenhada no papel quadriculado?
d) Os alunos usarão algum sistema de referência para a construção da figura do papel quadriculado?

Durante a atividade, o professor estará circulando pela sala observando a sua realização. Individualmente, alguns questionamentos serão feitos para verificar qual raciocínio foi usado por cada aluno e observar qual vocabulário é utilizado ao se referir aos elementos presentes na atividade.

Atividade 2 – representando a figura no *software* GeoGebra

Nesta atividade, o principal objetivo é a familiarização dos alunos com o *software* de geometria dinâmica GeoGebra. O professor deverá ter um conhecimento prévio das principais funções do programa a fim de orientar os alunos no manuseio e no andamento desta e de outras atividades que requerem seu uso.

Previamente o programa será aberto nos computadores e a janela do *software* exibirá apenas a malha quadriculada sem os eixos coordenados. Os primeiros momentos serão de apresentação do *software* e de algumas de suas funções, como construção de pontos, segmentos de reta, polígonos, circunferências.

De posse dos seus desenhos no papel quadriculado, os alunos farão sua reprodução no *software* GeoGebra, utilizando como referência apenas a malha quadriculada do programa. Pretende-se investigar se o registro do desenho no *software* respeitará as proporções do desenho feito no papel quadriculado e se algum sistema de referência será utilizado na representação. Após a construção, o arquivo será salvo.

O professor poderá observar os alunos e responder às questões abaixo como forma de avaliação da atividade.

a) Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos ao representar a figura no *software*?
b) Serão respeitadas as proporções entre a figura desenhada no papel quadriculado e a representada no GeoGebra?

Atividade 3 – transformações geométricas: a reflexão

Usando o desenho feito no papel quadriculado e com o auxílio de um pequeno espelho que será fornecido a cada aluno, os alunos deverão reproduzir uma reflexão do desenho. Para isso, será solicitado que cada aluno posicione o espelho ao lado de seu desenho, escolhendo a posição que mais lhe adequar, e trace um segmento de reta no papel na posição em que o espelho se encontra. A seguir, observando o desenho refletido, farão sua reprodução no papel.

Após as construções, os alunos serão questionados sobre o que observam nos desenhos, já sem o espelho como auxílio.

a) Compare as duas figuras. O que elas têm em comum? O que elas têm de diferentes?
b) O que acontece se mudarmos o espelho de posição? Como fica o desenho da figura?
c) Que nome vocês dariam a esse segmento de reta que serve de “espelho”?

As opiniões dos alunos serão ouvidas e discutidas no grupo. Para verificar o item b), os alunos poderão manusear o espelho e confirmar suas respostas. Já no item c), o nome "eixo de reflexão" ainda não será mostrado aos alunos. Será combinado que a turma toda usará um mesmo nome para esse segmento de reta. Mais tarde, em outra atividade, o nome usual será formalizado.

Atividade 4 – a reflexão vista no *software* GeoGebra

Após as discussões anteriores, novamente os alunos retornarão ao Laboratório de Informática e abrirão o ambiente do *software* GeoGebra.

A seguir será mostrada aos alunos a ferramenta que permite a reflexão de um objeto em torno de uma reta e solicitado que façam a reflexão dos seus desenhos em relação a uma reta qualquer. Os questionamentos a seguir podem ser direcionados ao grupo de alunos para avaliar o que perceberam sobre o movimento de reflexão até o momento.

a) Quais conclusões podem tirar?
b) O que se pode observar nos desenhos refletidos em relação aos desenhos originais?

Assim que a reflexão for feita no *software*, os alunos receberão o material mostrado abaixo, que é uma espécie de "roteiro" a ser seguido pelos alunos, mas que apresenta questões que poderão ser discutidas entre os alunos na busca de suas respostas.

Analisando o movimento de reflexão I

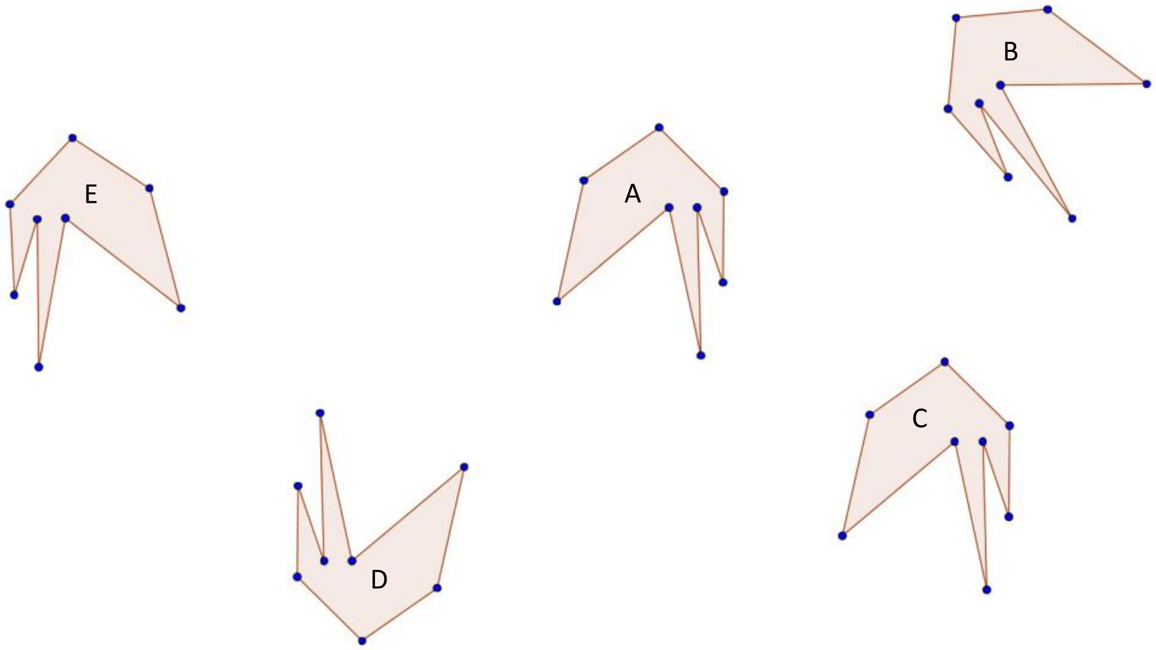
1) Compara a reflexão feita pelo *software* com aquela feita no papel quadriculado. O que tu observas? A reflexão feita no papel quadriculado é a mesma obtida no *software*? Quais as diferenças e semelhanças?
2) Utilizando a função "exibir rótulo", identifica todos os vértices da figura desenhada e da figura refletida.
   *Para cada ponto do polígono desenhado há um ponto correspondente no polígono refletido. Esse ponto refletido chama-se **imagem** do outro. Por exemplo, o ponto A' é a imagem refletida do ponto A.*
3) Agora movimenta um ponto qualquer do polígono construído e observa o que acontece com sua imagem. O que tu podes observar?
   *A reta em torno da qual ocorre o movimento de reflexão recebe o nome de **eixo de reflexão**.*
4) Agora movimenta o eixo de reflexão e observa o que acontece com os pontos do polígono e suas imagens. O que tu podes observar?

Ao concluírem a resolução das atividades anteriores, os alunos serão desafiados a observar alguns polígonos e identificar o movimento de reflexão.

A próxima atividade tem como principal objetivo verificar se os alunos já conseguem identificar um polígono refletido, em relação a um eixo. Além disso, pretende-se observar se o eixo de reflexão é desenhado corretamente.

Analisando o movimento de reflexão II

1) Observa os polígonos abaixo. O polígono A foi feito no GeoGebra. Vamos chamá-lo de polígono de referência. Para cada um dos outros polígonos (B, C, D e E) procura determinar se o mesmo é uma reflexão do polígono A. Se tua resposta for afirmativa, desenha o eixo de reflexão. Caso contrário, explica porque o polígono não é uma reflexão.



Ao final dessa atividade, pretende-se que os alunos compreendam como ocorre o movimento de reflexão, observando a posição do eixo de reflexão e a relação deste com os pontos do polígono e com suas imagens refletidas.

Atividade 5 – O Jogo das Coordenadas – primeiro contato com o plano cartesiano

Ainda sem formalizar os conceitos de coordenadas cartesianas e as nomenclaturas usuais (abscissa, ordenada, quadrantes,...) será feito um jogo com os alunos que irá familiarizá-los com os eixos coordenados e o uso de referências para localização de pontos e descrição de objetos no plano.

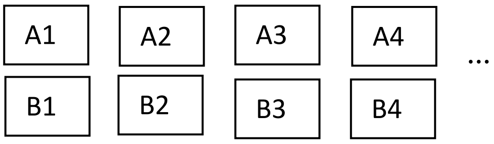
Descrição do jogo

Os alunos se dividirão em duplas. Cada dupla é uma equipe, que joga “contra” as outras duplas.

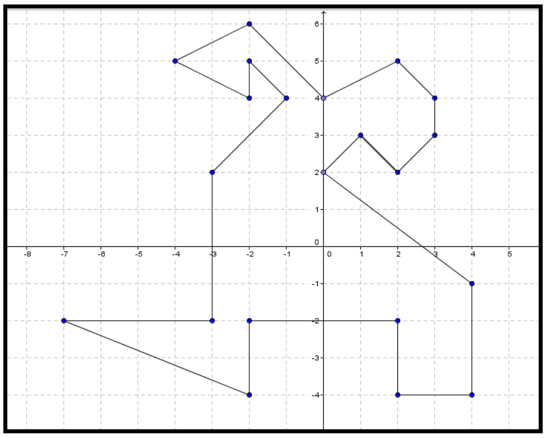
Um representante (A) de uma dada dupla ganhará um desenho em um plano cartesiano com os eixos já numerados. Esse desenho ocupará os quatro quadrantes do plano. O outro representante (B) dessa mesma dupla terá apenas o plano cartesiano com os eixos numerados sem o desenho. O aluno A terá que descrever verbalmente a figura para que o aluno B a represente fielmente no seu plano. Não será permitido que o aluno B faça perguntas ou sugestões ao aluno A.

Caso a turma conte com um número ímpar de alunos, um aluno será escolhido para auxiliar as duplas durante o jogo. Esse aluno será o “juiz”, cabendo a ele a função de validar as soluções apresentadas por cada aluno. Se a turma contar com número par de alunos, dois alunos poderão ser os juízes. O (s) juiz (es) deverá (ão) discutir juntamente com a turma os critérios para a correção.

Os alunos serão dispostos em duas filas, de modo que cada dupla participante fique de frente um para o outro. Dessa maneira, o juiz do jogo poderá verificar o andamento da atividade.



Em cada rodada, os alunos ganharão figuras com a mesma quantidade de vértices.



Exemplo de figura

A conferência será feita por algum membro da dupla vizinha, que receberá o desenho original e a reprodução feita. Este deverá registrar observações em uma espécie de relatório que será fornecido pelo juiz (conforme mostrado abaixo), apontando acertos e erros da dupla vizinha. A seguir, esse relatório e os desenhos serão entregues ao juiz que irá validar a correção feita. Caberá ao juiz decidir, juntamente com todas as duplas, uma forma de pontuação para o jogo.

Nomes dos jogadores:
Meu nome:
Quais observações tu podes fazer para auxiliar o juiz na correção do desenho feito?

A seguir, é a vez do aluno B receber uma figura e descrevê-la também verbalmente ao aluno A. O procedimento será o mesmo já descrito anteriormente.

Durante a realização da atividade, o professor estará observando seu andamento, procurando não intervir. O ideal é deixar que os próprios alunos, juntamente com os juízes, decidam a maneira de pontuar. As dúvidas que surgirem devem ser discutidas entre eles para que entrem em comum acordo em relação às respostas. As questões a seguir podem servir de base para que o professor analise a atividade e verifique como se dá o uso do plano cartesiano.

a) Será que a estratégia usada pelo aluno A para descrever a figura será a mesma do aluno B?
b) Os alunos farão uso das marcações numéricas dos eixos ao descrever as figuras?
c) Como descreverão pontos que estão situados em cada quadrante? E os pontos situados sobre os eixos?

Ao final do jogo, todos os alunos receberão uma folha com a seguinte questão: “se esse mesmo jogo fosse feito com outra turma, o que você mudaria”? As respostas dadas pelos alunos serão entregues ao professor, que poderá usá-las para uma avaliação das dificuldades apresentadas pelos alunos, adaptando esta atividade em outras turmas.

Atividade 6 – O plano cartesiano e o movimento de reflexão

Em um próximo momento, os alunos deverão abrir o arquivo salvo anteriormente para que possam recordar da atividade de reflexão de suas figuras. Após uma rápida retomada do que havia sido feito até então, será pedido que cada aluno abra um novo arquivo no *software*. Quando isso for feito, a janela que será fornecida pelo programa conterá os eixos coordenados e a janela de álgebra, sem malha quadriculada. Será solicitado que os alunos fechem esta janela.

Ainda sem comentário do professor a respeito dos números e das retas que apareceram no GeoGebra, será solicitado que a malha quadriculada seja exibida para auxiliar na próxima tarefa.

Os alunos receberão um roteiro para orientá-los no seguimento da atividade.

Atividades – reflexão

1) Usando a ferramenta Polígono, desenhe um polígono qualquer e exiba os rótulos dos vértices.
2) Faça a reflexão desse polígono em torno da reta vertical numerada que aparece na tela. Exiba os rótulos dos vértices da figura refletida.
3) Com o auxílio da ferramenta “Mover”, modifique e movimente o polígono construído e observe as mudanças que ocorrem no polígono refletido. O que tu observas?
4) Observe os vértices do polígono construído e os vértices do polígono refletido. O que tu observas?
5) Agora, no menu “Exibir”, escolha a opção “Janela de Álgebra”. Essa opção exibe todos os objetos presentes na tela do programa, como pontos, segmentos, polígonos, etc. A seguir, responda as questões abaixo:

a) Observe, na Janela de Álgebra, o vértice A do polígono desenhado. Que relação há entre os números que aparecem e os eixos numerados?
b) Observe outros vértices do polígono desenhado e sua representação na Janela de Álgebra. O que os números que aparecem dentro dos parênteses representam? De que maneira eles estão organizados?
c) Sua dupla utilizou algo parecido para dar nome aos pontos no jogo da atividade anterior?
d) Agora observe na Janela de Álgebra o ponto A e sua imagem refletida, A’. Comparando-os, o que se pode observar? Esse fato é observado nos demais pontos refletidos?

Por meio das atividades anteriores, pretende-se responder as seguintes questões:

a) Quais observações poderão ser feitas pelos alunos em relação ao polígono e os eixos coordenados?
b) Haverá identificação de relações entre vértices dos polígonos com as coordenadas nos eixos?
c) Alguma relação será estabelecida dos vértices do polígono original com os vértices do polígono refletido, no sentido dos eixos coordenados?

À medida que as contribuições dos alunos vão sendo dadas, o professor poderá estabelecer, juntamente com os alunos, um padrão para a identificação de pontos no plano. Dessa maneira, para identificar um ponto, usaremos dois números: o primeiro refere-se à projeção ortogonal desse ponto sobre o eixo horizontal e o segundo à projeção ortogonal desse ponto sobre o eixo vertical. As nomenclaturas usuais (abscissa, ordenada, quadrante) também serão discutidas e registradas pelos alunos nesse momento.

Atividade 7 – translação no plano cartesiano

O movimento de translação de uma figura será feito usando o plano cartesiano como auxílio. Nessa atividade, pretende-se verificar as propriedades do movimento de translação e o uso correto das coordenadas cartesianas expressas em sua forma usual, ou seja, como pares ordenados (a,b).

Os alunos receberão uma sequência de pontos, com suas coordenadas cartesianas expressas na forma usual de par ordenado (a,b). Será fornecido a cada aluno um papel quadriculado para que esses pontos sejam marcados. Os pontos já estarão nomeados, como A, B, C,...

O papel quadriculado entregue não conterá nenhuma marcação de eixos ou numeração. Ao observar o início desta atividade, o professor poderá estar atendo às questões mostradas abaixo.

a) Os alunos farão uso dos eixos cartesianos, representando-os antes de começar a marcar os pontos?
b) Como se dará a construção dos eixos e a marcação dos números sobre os mesmos? Os eixos serão feitos ortogonalmente? A ordem numérica (principalmente para os números negativos) será feita corretamente?

A entrega dos pontos já determinados a serem marcados tem como objetivo verificar se os alunos farão sua representação corretamente e se a construção do plano cartesiano se fará necessária para o início da atividade. Durante a fase inicial desta atividade, o professor poderá auxiliar os alunos que mostrarem maiores dificuldades.

Assim que tiverem marcado os pontos, os alunos ligarão um ponto a outro através de segmentos de reta, seguindo a sequência alfabética, ou seja, deverão ligar o ponto A ao ponto B, o ponto B ao ponto C e assim sucessivamente até que o último ponto seja ligado ao ponto A, fechando, assim, um polígono.

Após a conclusão do desenho do polígono, cada aluno sorteará um papel que contém uma instrução. As instruções serão as seguintes:

Soma duas unidades à abscissa e mantenha a ordenada fixa.

Subtraia duas unidades da abscissa e mantenha a ordenada fixa.

Soma duas unidades à ordenada e mantenha a abscissa fixa.

Subtraia duas unidades da ordenada e mantenha a abscissa fixa.

Soma três unidades à abscissa e mantenha a ordenada fixa.

Subtraia três unidades da abscissa e mantenha a ordenada fixa.

Soma três unidades à ordenada e mantenha a abscissa fixa.

Subtraia três unidades da ordenada e mantenha a abscissa fixa.

Assim que tiverem essa instrução, deverão aplicá-la para cada vértice do polígono desenhado. Os novos vértices deverão ser nomeados e, a seguir, a tabela abaixo deverá ser completada:

Vértices	A(,)	B(,)	C(,)	D(,)	E(,)	F(,)
Vértices após a instrução						

Os novos vértices deverão ser marcados no mesmo plano cartesiano em que o polígono original se encontra, gerando, assim, um novo polígono.

As instruções que os alunos receberão com os devidos questionamentos estão mostrados a seguir. Para o item 1, serão elaboradas situações diferentes para os alunos, de maneira que na turma haja pelo menos cinco polígonos distintos.

Polígonos e suas coordenadas

1) Marca os pontos a seguir em um sistema de coordenadas cartesianas

A(2,3) B(4,1) C(5,-2) D(1,-2) E(-1,0) F(2,1)

2) Faça segmentos de reta unindo o ponto A ao ponto B, o ponto B ao ponto C, o ponto C ao ponto D e assim sucessivamente até unir o ponto F ao ponto A, fechando assim um polígono.

3) Agora sorteia um papel e observa a instrução escrita nele. Escreva abaixo a instrução que sorteaste e preencha a tabela. Nomeia os novos vértices de A’, B’, C’...

Instrução:

Vértices	A(,)	B(,)	C(,)	D(,)	E(,)	F(,)
Vértices após a instrução						

4) Agora, no mesmo sistema de eixos cartesianos, marca os novos vértices e una cada vértice ao outro assim como tu fizeste na atividade 2, até formar um outro polígono.

5) O que tu podes afirmar em relação ao polígono original e o novo polígono?

6) Podemos afirmar que o novo polígono é uma reflexão do polígono original? Por quê?

7) Faz um segmento de reta ligando os vértices A e A’ e um segmento de reta ligando os vértices B e B’. O que tu observas? O que acontece se ligarmos os vértices C e C’ ou então os vértices D e D’?

8) Em tua opinião, o que acontece se somarmos uma determinada quantidade x à abscissa e outra determinada quantidade y à ordenada de cada vértice do polígono original?

9) Em tua opinião, o que acontece se subtrairmos uma determinada quantidade x da abscissa e outra determinada quantidade y da ordenada de cada vértice do polígono original?

Atividade 8 – Atividade entre grupos – translação

Nesta atividade, os alunos serão divididos em pequenos grupos. Cada grupo receberá, em uma folha, um par de polígonos, em que um é uma translação do outro. Caberá a cada grupo identificar qual a transformação aplicada ao polígono para obter o outro e descrever esta transformação. Essa conclusão será registrada pelo grupo em uma folha separada.

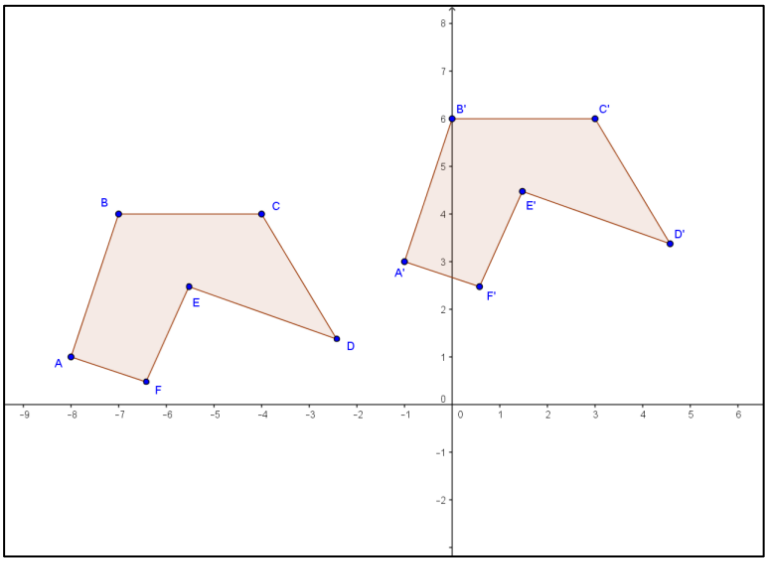
A seguir, este grupo desafiará outro grupo da sala a descrever a transformação. Para isso, o grupo inicial entregará sua folha para o grupo desafiado que deverá descrever, na própria folha, quais as características da transformação aplicada ao polígono original. Finalmente, o grupo desafiado devolverá a folha ao grupo inicial que fará a correção.

O objetivo desta atividade é observar de que maneira os alunos descreverão o movimento de translação, em termos de coordenadas cartesianas. Um exemplo da atividade está mostrado a seguir.

O Desafio das Translações

Seu grupo: ________________________________

Observe o polígono ABCDEF. Discuta com seu grupo qual transformação deve ser aplicada nesse polígono para gerar o polígono A’B’C’D’E’F’, ou seja, como podemos obter o polígono A’B’C’D’E’F’ a partir do polígono ABCDEF. Registre suas conclusões em uma folha separada.



Agora desafie outro grupo da sala a descobrir a solução encontrada pelo seu grupo. Para isso, entregue essa folha a esse grupo, que deverá escrever suas conclusões abaixo. A seguir, verifique a solução apontada pelo grupo e faça anotações sobre suas observações.

Grupo desafiado: ____

Atividade 9 – translação – Informática

Nesta atividade, os alunos se reunirão nos mesmos trios da atividade anterior. Cada trio receberá a folha com os polígonos ABCDEF e A’B’C’D’E’F’ que já havia recebido na aula anterior.

Com o GeoGebra aberto, o professor mostrará aos alunos como obter a translação de um polígono qualquer. Para isso, o conceito de vetor deverá ser mencionado, pois o *software* utiliza a translação por um vetor. O professor poderá aproveitar o momento para explicar que o vetor é um segmento de reta que possui uma orientação e um sentido. Após mostrar um exemplo de translação de um polígono, será pedido que os alunos modifiquem o vetor, alterando seu “tamanho”, sua orientação e seu sentido e observem o que acontece nos polígonos. O professor poderá estar interessado em responder às seguintes questões:

a) Quais observações os alunos farão?

b) Será que os alunos já observarão que os segmentos de reta AA’, BB’,... têm, cada um, o mesmo comprimento do vetor?

A seguir, será solicitado que os alunos abram um novo arquivo. Cada trio receberá as seguintes atividades, cujo objetivo principal é observar as características do movimento de translação a partir de um vetor.

Analisando o movimento de translação

1) Representa no GeoGebra o polígono ABCDEF de modo que ele ocupe no plano da tela a mesma posição que na folha da atividade anterior (verifica as coordenadas cartesianas de cada vértice). Exibe os rótulos dos vértices.

2) Agora, usando a opção “Translação por um vetor” do GeoGebra, obtém a translação desse polígono, de forma que o polígono transladado ocupe na tela a mesma posição do polígono A’B’C’D’E’F’ na folha da atividade anterior. Exibe os rótulos dos vértices.

3) Usando a ferramenta “Segmento”, traça os segmentos AA’, BB’, CC’, DD’, EE’ e FF’. O que se pode dizer sobre esses segmentos? Que argumentos vocês podem usar para convencer os outros grupos?

4) Agora, modifica o vetor que foi utilizado para a translação, alterando seu tamanho, seu sentido, sua orientação. O que teu grupo observa?

5) Com base nas conclusões anteriores, como o teu grupo define o movimento de translação de um polígono por um vetor?

Assim que os grupos concluírem a resolução das atividades, as soluções serão discutidas. No item 3, será observado se os alunos concluem que todos os segmentos possuem mesma medida e de que maneira provarão esse fato. Além disso, será oportunizado que os alunos explorem o *software* para determinar o comprimento de todos esses segmentos.

Nessa mesma atividade, as definições dos alunos sobre o movimento de translação serão discutidas uma a uma e registradas no quadro. Então, para registro em seus cadernos, todos os alunos deverão formular uma definição única para esse movimento. Pretende-se observar de que maneira o grupo de alunos decidirá qual a melhor definição de translação. Cabe destacar que muito provavelmente a linguagem utilizada nesta definição poderá não ser precisa. Assim, o professor poderá intervir neste momento para a obtenção de uma linguagem mais correta ou optar por fazer isto em um momento futuro, após o estudo das três isometrias (reflexão, translação e rotação).

Atividade 10 – rotação

Em duplas, os alunos receberão algumas atividades em uma folha, juntamente com materiais manipulativos que poderão auxiliá-los na resolução. Esses materiais serão os mesmos que aparecem nas atividades (bandeirinha, palito, etc). O objetivo é verificar se os alunos compreendem (mesmo que intuitivamente) o movimento de rotação e os sentidos horário e anti-horário. Além disso, pretende-se verificar se já há a compreensão das amplitudes dos ângulos reto e raso.

O item 5 será encarado como um desafio. Os alunos não receberão material concreto, porém estão livres caso queiram confeccionar. Além disso, a novidade da questão é o ângulo de 45°. Pretende-se observar de que maneira esse ângulo será obtido (uso de transferidor? metade de 90°?...)

<u>Questão 1</u>

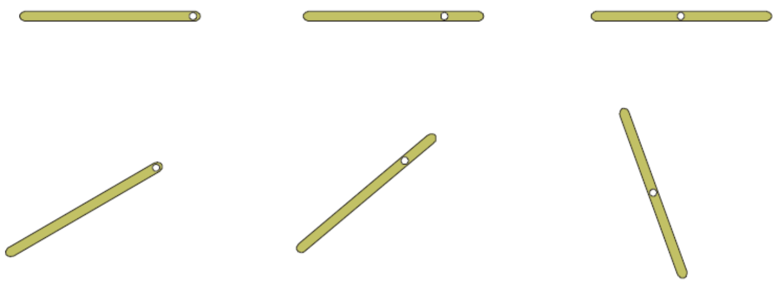
Uma caneta estava na posição mostrada a seguir.

Pedro girou a caneta em volta da ponta esferográfica e a caneta ficou assim:

De quantos graus foi o giro da caneta?
O giro da caneta foi no sentido horário ou no sentido anti-horário? Justifique.

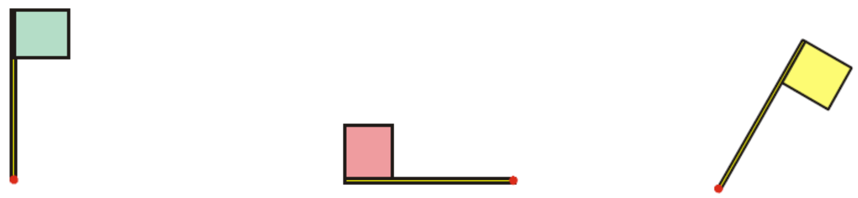
Questão 2

Desenhe o palito depois que ele girar 90° em volta do furo, no sentido horário, nas situações a seguir:



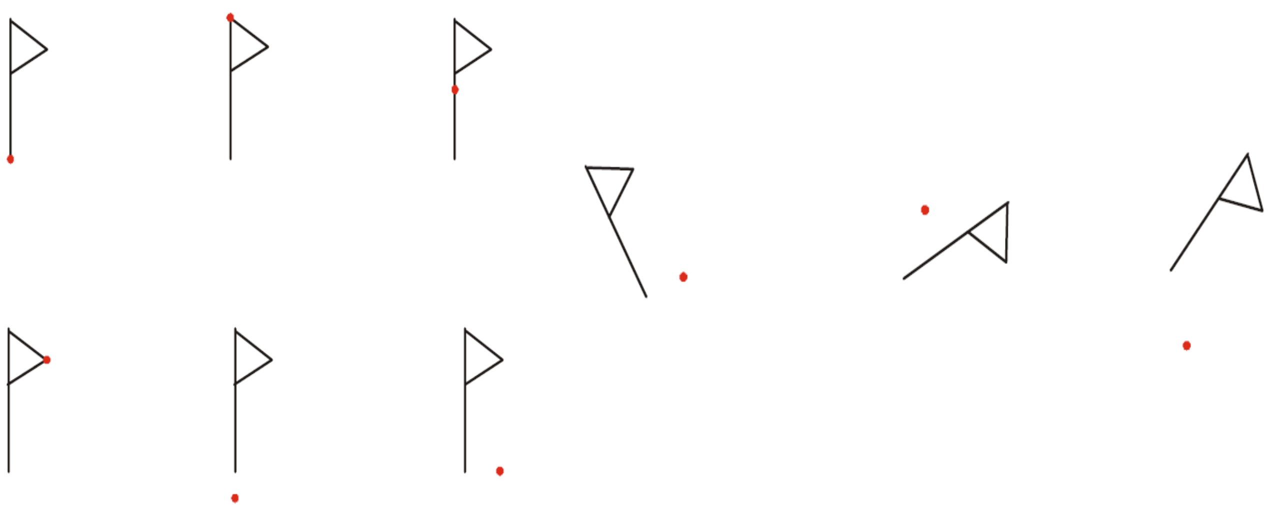
Questão 3

Desenhe a bandeira depois que ela sofre uma rotação de 90º ao redor de seu "pé" (ponto vermelho). O sentido da rotação é o anti-horário.



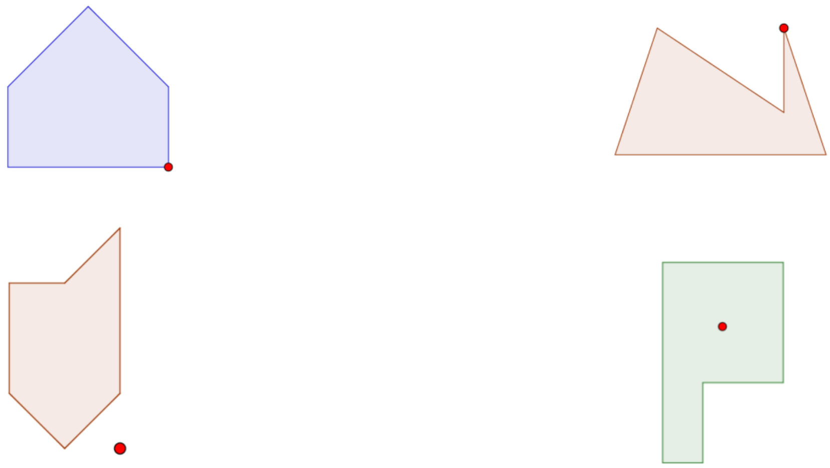
Questão 4

Gire cada bandeirinha 180° no sentido horário, em torno do ponto vermelho e represente a bandeirinha após essa rotação.



Questão 5 – DESAFIO

Gire cada figura 45° no sentido anti-horário em torno do ponto vermelho. Represente cada figura após essa rotação.



Após as discussões dos alunos e de suas resoluções no papel, os alunos compararão seus resultados com construções no GeoGebra. Para isso, deverão representar as situações que mais lhe geraram dúvidas no programa e utilizar a ferramenta Rotação. Então, cada aluno receberá uma folha com as seguintes questões.

a) Houve diferenças entre tua representação no papel e as rotações apresentadas no programa? Em quais itens? Para cada item diferente, compara a rotação feita no papel com a rotação feita no GeoGebra e explica as diferenças.
b) Quais rotações tu encontraste maior dificuldade de representar? Por quê?
c) O ponto em torno do qual o objeto gira influencia no movimento de rotação? De que maneira?
d) É possível que a rotação de uma figura nos leve à mesma figura, na mesma posição? Explica e exemplifica.
e) Em quais situações do cotidiano as rotações estão presentes? Para cada situação, procura explicar em torno de qual ponto ocorre a rotação.

Ao concluir as discussões das questões acerca da rotação, os alunos receberão em uma folha, definições mais precisas dos movimentos estudados. Cada uma dessas definições será discutida com todos e exemplificadas, se necessário.

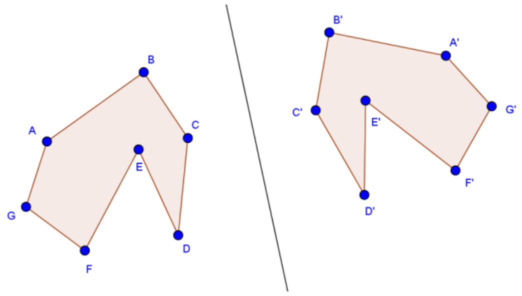
Definições dos três movimentos

A) Reflexão em torno de uma reta

A **reflexão** em torno de uma reta é a isometria que leva cada ponto P de uma figura ao ponto P' (chamado de imagem do ponto P) de modo que:

- a distância do ponto P à reta (chamada de eixo de reflexão) é a mesma que a distância do ponto P' a essa mesma reta;

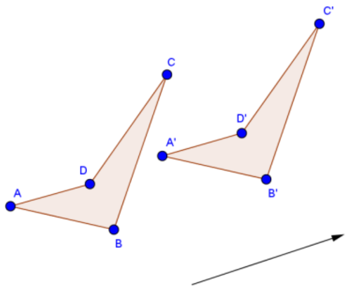
- o segmento que une P e P' é perpendicular à reta.



B) Translação por um vetor

Vetor é um segmento de reta com sentido, direção e um determinado comprimento; no plano cartesiano, cada vetor plano corresponde a um determinado deslocamento vertical e a um determinado deslocamento horizontal.

Translação por um vetor é a isometria que leva cada ponto P de uma figura ao ponto P', de modo que cada ponto P é deslocado segundo um mesmo vetor, levando ao ponto P'. Desse modo, o segmento PP' tem o mesmo comprimento que o vetor da translação e é paralelo a esse vetor.



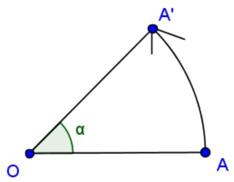
C) Rotação em torno de um ponto

Para que ocorra uma rotação de uma figura são necessários dois elementos:

1º) Um ponto em torno do qual ocorrerá a rotação. Esse ponto chama-se **centro da rotação**;

2º) Um ângulo de rotação (chamado de **amplitude da rotação**). Esse ângulo pode ser determinado no sentido horário ou no sentido anti-horário. Costuma-se adotar amplitudes positivas para ângulos no sentido anti-horário e amplitudes negativas para ângulos no sentido horário. Por exemplo: se uma rotação tem amplitude de -90°, significa que a rotação será de 90° no sentido horário.

Assim, a rotação de centro O e amplitude α é uma transformação que leva o ponto A ao ponto A', como mostra a figura abaixo.



Após a discussão dessas definições, cada aluno receberá a atividade descrita a seguir. Um de seus objetivos é mostrar aos alunos que a aplicação de qualquer um dos três movimentos estudados a um polígono não altera suas medidas (lados e ângulos), permitindo assim a discussão sobre o conceito de isometria e congruência.

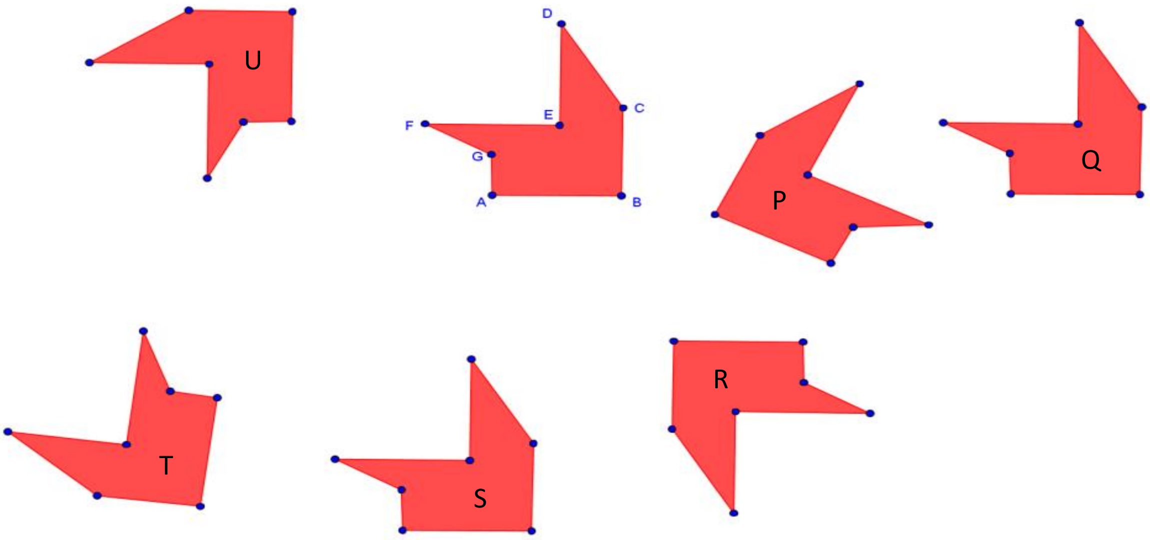
Atividade 11 – verificando a compreensão das isometrias

Transformações Geométricas

Nome: ____________________

Na figura abaixo, o polígono ABCDEFG foi feito no GeoGebra. Os demais polígonos (chamados de P, Q, R, S, T e U) foram obtidos a partir de uma transformação no polígono ABCDEFG. Essa transformação ou é uma reflexão, ou uma translação ou uma rotação. Tendo como base o polígono ABCDEFG, identifique para cada outro polígono qual transformação geométrica foi aplicada.

1) Se for uma reflexão, identifique o eixo de reflexão.
2) Se for uma translação, desenhe o vetor.
3) Se for uma rotação, identifique o centro de rotação.



Assim que os alunos concluírem essa atividade, deverão entregá-la ao professor. A seguir, a imagem anterior será projetada, com auxílio de um *datashow*, e as conclusões dos alunos serão discutidas.

Será discutida juntamente com todos os alunos qual transformação geométrica foi aplicada ao polígono ABCDEFG para obter cada um dos demais polígonos.

Ainda com a imagem projetada no quadro, o seguinte questionamento oral será feito aos alunos: observando todos os polígonos, o que se pode afirmar em relação as suas medidas?

Através das discussões, pretende-se que os alunos observem que as medidas dos lados e dos ângulos internos de todos os polígonos permanecem iguais após as transformações geométricas aplicadas ao polígono ABCDEFG.

A seguir, cada aluno receberá o texto a seguir, no qual a definição de congruência é estabelecida e algumas atividades serão propostas.

Isometrias e congruência

As transformações geométricas que acabamos de estudar (reflexão, translação e rotação) são chamadas de **isometrias** (do grego: iso = mesmo, metria = medida). Elas recebem esse nome porque mantêm as medidas de uma figura (lados e ângulos) ao sofrer a transformação.

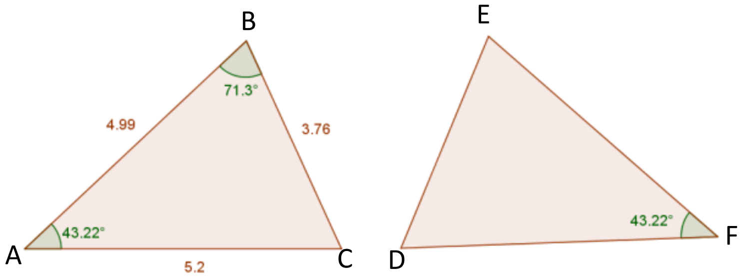
Dessa forma, duas figuras são congruentes se uma pode ser transformada na outra por isometria (reflexão, translação, rotação ou combinações entre elas).

Nos casos dos polígonos, podemos verificar a congruência por meio de comparação entre segmentos e ângulos, isto é, dois polígonos com o mesmo número de lados são congruentes se e somente se existe uma correspondência entre eles de modo que todos os lados e ângulos correspondentes são congruentes.

Atividade 12 – congruência

Para concluir o estudo da congruência (e de sua relação com as isometrias), cada aluno receberá as atividades mostradas a seguir. O objetivo é verificar como os alunos justificarão a congruência (ou não congruência) dos polígonos e se, para isto, farão uso das isometrias.

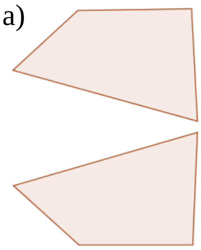
1) Os triângulos abaixo são congruentes. As medidas dos lados do triângulo ABC estão indicadas em centímetros.



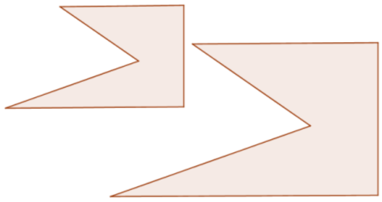
a) Qual foi a isometria aplicada ao triângulo ABC para obter o triângulo DEF? Justifique.
b) Determine a medida do ângulo $B\hat{C}A$.
c) Determine as medidas dos lados do triângulo DEF.
d) Determine as medidas dos ângulos $E\hat{D}F$ e $D\hat{E}F$.

2) Identifique, em cada item, se as figuras são congruentes. Justifique sua resposta.

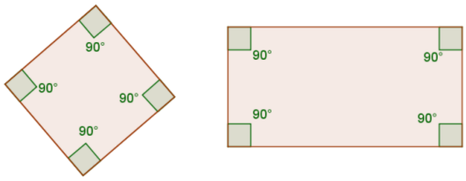
a)



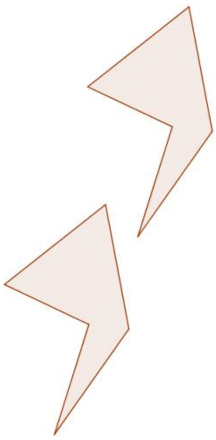
b)



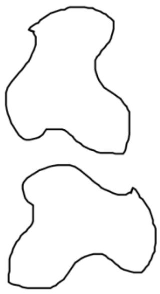
c)



d)



e)



f)