2020-2, "FISMAT-AV", AULA 15

OBJETIVOS: FINALIZAR A DISCUSSÃO DE MUDANÇA DE VARIÁVEL E DISCUTIR PROPRIEDADES DE DISTRIBUIÇÕES QUE DEPENDEM DOS SEUS SUPORTES.

(CONT.) 2.6 PROPRIEDADES DE DISTRIBUIÇÕES

(CONT.) → MUDANÇA DE VARIÁVEL EM DISTRIBUIÇÕES

AULA PASSADA:

$$\boxed{\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\,\delta(x-x_0)}$$

USUAL!

- f DIFERENCIÁVEL E INVERSÍVEL
- $f(x_0)=0$, RAIZ ÚNICA
- $f'(x_0)\neq 0$

AINDA AULA PASSADA (EXEMPLO ESTENDIDO): MEDIANTE UM PARÂMETRO, UMA DISTRIBUIÇÃO PODE GERAR UMA FUNÇÃO, AO INVÉS DE UM ESCALAR, AO AGIR SOBRE UMA FUNÇÃO TESTE.

$$\boxed{\delta(y - g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|}\,\delta(x - x_0)}$$

- $\boxed{y - g(x_0) = 0} \Rightarrow x_0 = x_0(y) = g^{-1}(y)$

BASTA FAZER $f(x) \equiv y - g(x)$ NO RESULTADO ANTERIOR. NO EXEMPLO ESTENDIDO, $g(x) = -\frac{1}{\lambda}\log x$.

SE f FOR DIFERENCIÁVEL, A MUDANÇA DE VARIÁVEL AINDA PODE SER BEM DEFINIDA MESMO COM MÚLTIPLOS ZEROS E SEM INVERSIBILIDADE, DESDE QUE $f'(x_0) \neq 0$ PARA TODO $x_0 \in Z_f$,

$Z_f \equiv \{x \,/\, f(x) = 0\}$, O "CONJUNTO DOS ZEROS" DE f. O RESULTADO É UMA SIMPLES SUPERPOSIÇÃO,

$$\boxed{\delta(f(x)) = \sum_{x_0 \in Z_f} \frac{1}{|f'(x_0)|}\,\delta(x - x_0)},$$

OU, EXPLICITAMENTE,

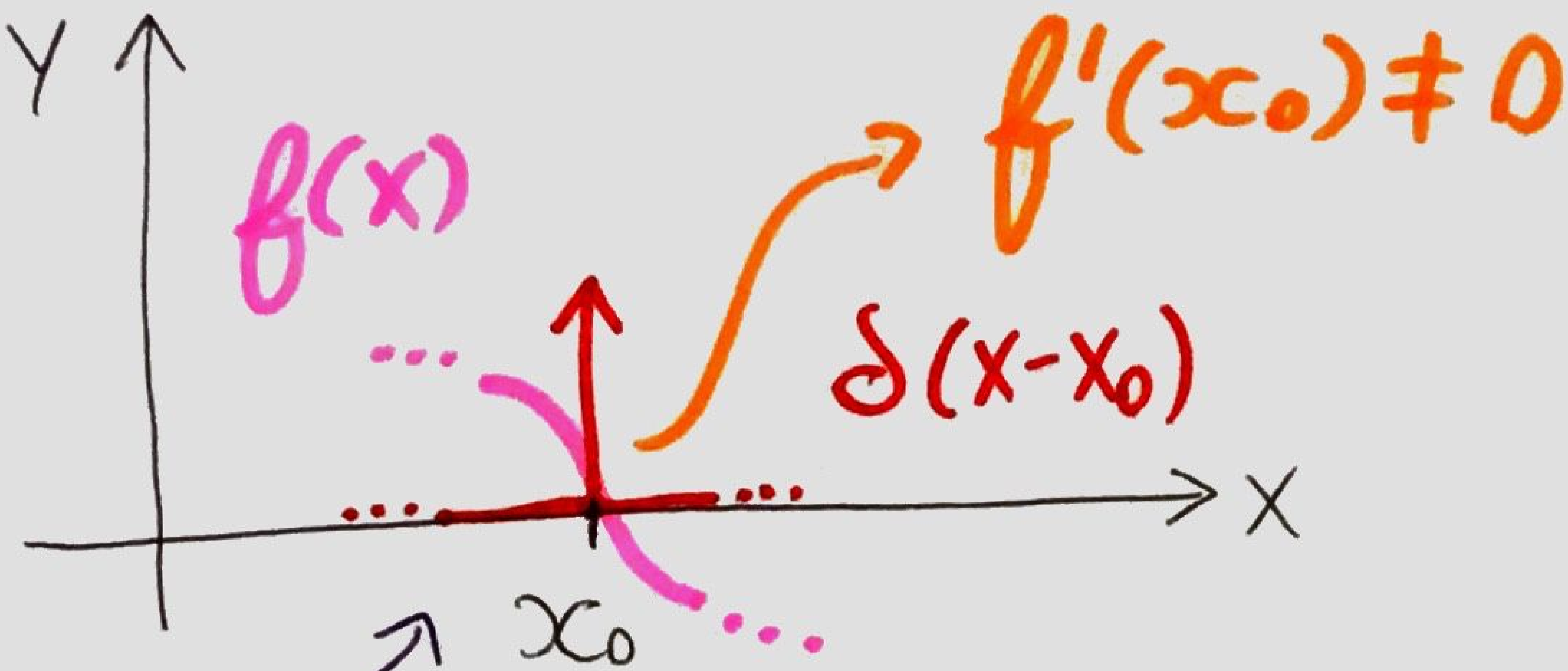
$$\boxed{\int \delta(f(x)) . h(x)\,dx = \sum_{x_0 \in Z_f} \frac{1}{|f'(x_0)|}\,h(x_0)},$$

POIS $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f(x))\,h(x)\,dx$

$$\| $$

$$\sum_{x_0 \in Z_f} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(f(x))\,h(x)\,dx$$

SE $\varepsilon > 0$ FOR PEQUENO O SUFICIENTE PARA QUE f SEJA LOCALMENTE INVERSÍVEL EM QUALQUER $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.



f RESTRITA A $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ É BIJETORA.

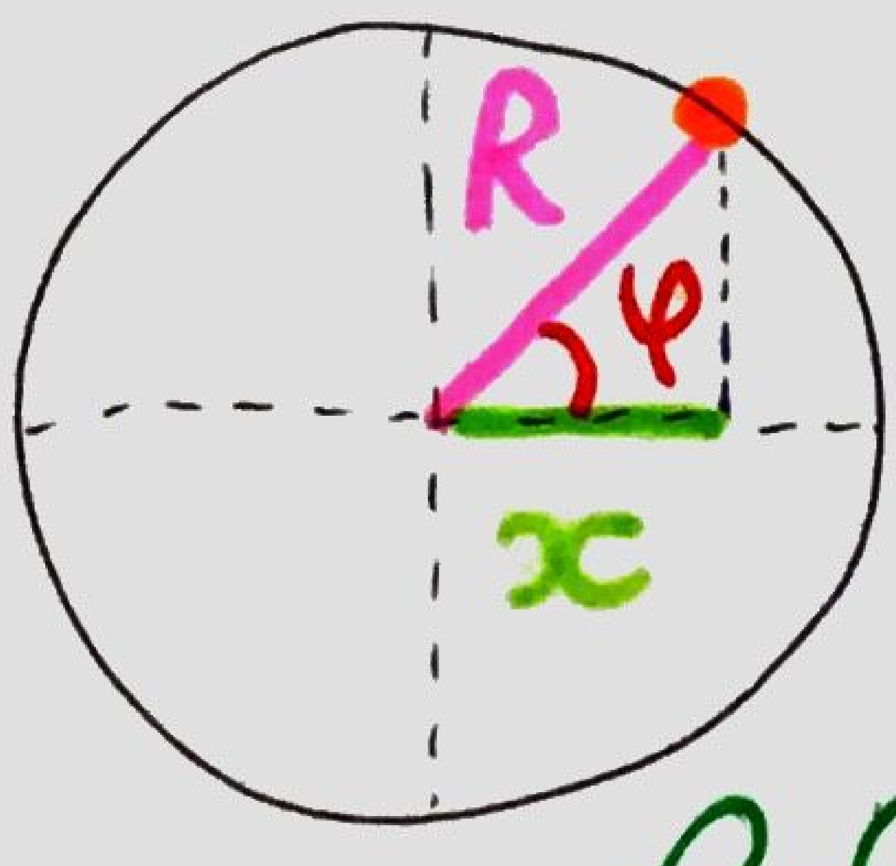
EM $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$,

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0)}_{=0} + f'(x_0).(x-x_0)$$

$$\text{E } \delta(f(x)) \approx \delta[f'(x_0).(x-x_0)] = \frac{1}{|f'(x_0)|}\,\delta(x-x_0)$$

ESCALA!

◇EXEMPLO: UMA PARTÍCULA PONTUAL TEM COORDENADA ANGULAR UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA. QUAL É A DENSIDADE DE PROBABILIDADE DA SUA ABSCISSA? ELA "VIVE" EM UMA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIO R.



$x = R\cos\varphi$

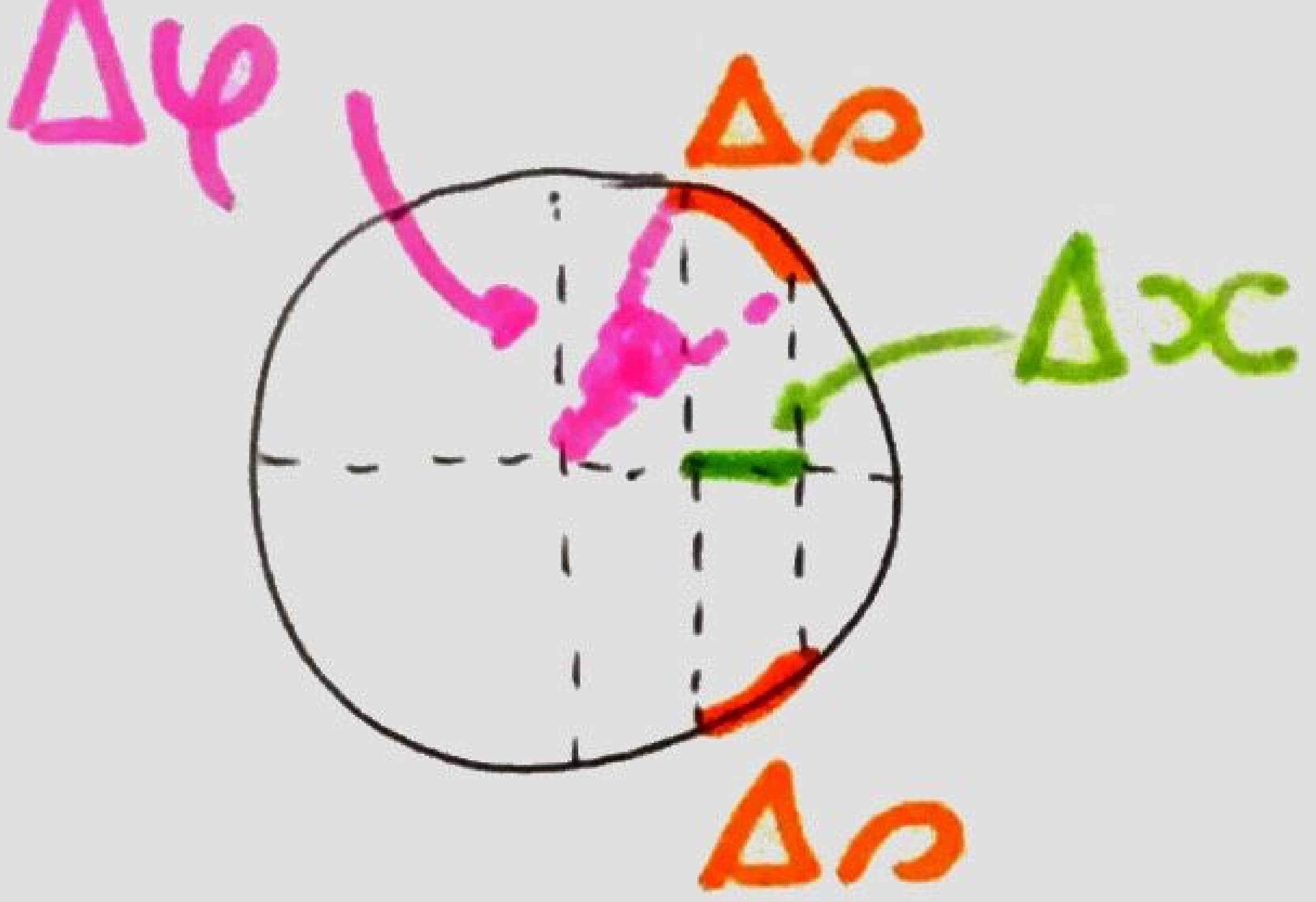
$\rho_F(\varphi) = 1/2\pi$

$\int_0^{2\pi} \rho_F(\varphi)\, d\varphi = 1$

$\rho_X(x) = ?$

$$\rho_X(x) = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \delta(\underbrace{x - R\cos\varphi}_{\equiv f(\varphi)}) \cdot \rho_F(\varphi)$$

$$0 = f(\varphi_0) \Longrightarrow \begin{cases} \varphi_0^+ = + \arccos(x/R) \\ \varphi_0^- = - \arccos(x/R) = -\varphi_0^+ \end{cases}$$



$$f'(\varphi) = R \sin\varphi$$

$$f'(\varphi_0^+) = + \sqrt{1 - (x/R)^2} \cdot R$$
$$= + \sqrt{R^2 - x^2}$$
$$= - f'(\varphi_0^-)$$

$$\rho_X(x) = \frac{1}{|+\sqrt{R^2-x^2}|} \rho_F(\varphi_0^+) + \frac{1}{|-\sqrt{R^2-x^2}|} \rho_F(\varphi_0^-)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\therefore \rho_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}, \quad |x| < R.$$

INTERPRETAÇÃO ALTERNATIVA: MCU DETERMINÍSTICO!

$$\rho_X(x)\,\Delta x = \frac{\cancel{2}|\Delta s|}{\cancel{2}\pi R} = \frac{\cancel{R} \cdot |\Delta\varphi|}{\pi \cancel{R}} = \frac{1}{\pi} \cdot \overbrace{\frac{1}{R \sin\varphi}}^{(R^2-x^2)^{-1/2}} \Delta x$$

◇

→ DISTRIBUIÇÕES SÓ AGEM SOBRE FUNÇÕES TESTE?

QUALQUER FÍSICO ESCREVERIA $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cos x \, dx = \cos 0 = 1$. MAS O COSSENO NÃO É UMA FUNÇÃO TESTE!!! O RESULTADO É VÁLIDO, MAS EXIGE EXPLICAÇÕES...

INFORMALMENTE, O SUPORTE DE UMA DISTRIBUIÇÃO $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ É O SUBCONJUNTO DO $\mathbb{R}^n$ ONDE T "SENTE" AS FUNÇÕES TESTE.

O SUPORTE DA DELTA DE DIRAC DESLOCADA $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ É $\{a\}$:

O PENTE DE DIRAC ("DIRAC COMB")

$Ш = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$ (OU $Ш(x) = \sum_n \delta(x-n)$) TEM $\mathbb{Z}$ COMO SUPORTE.

↳ "SHA"

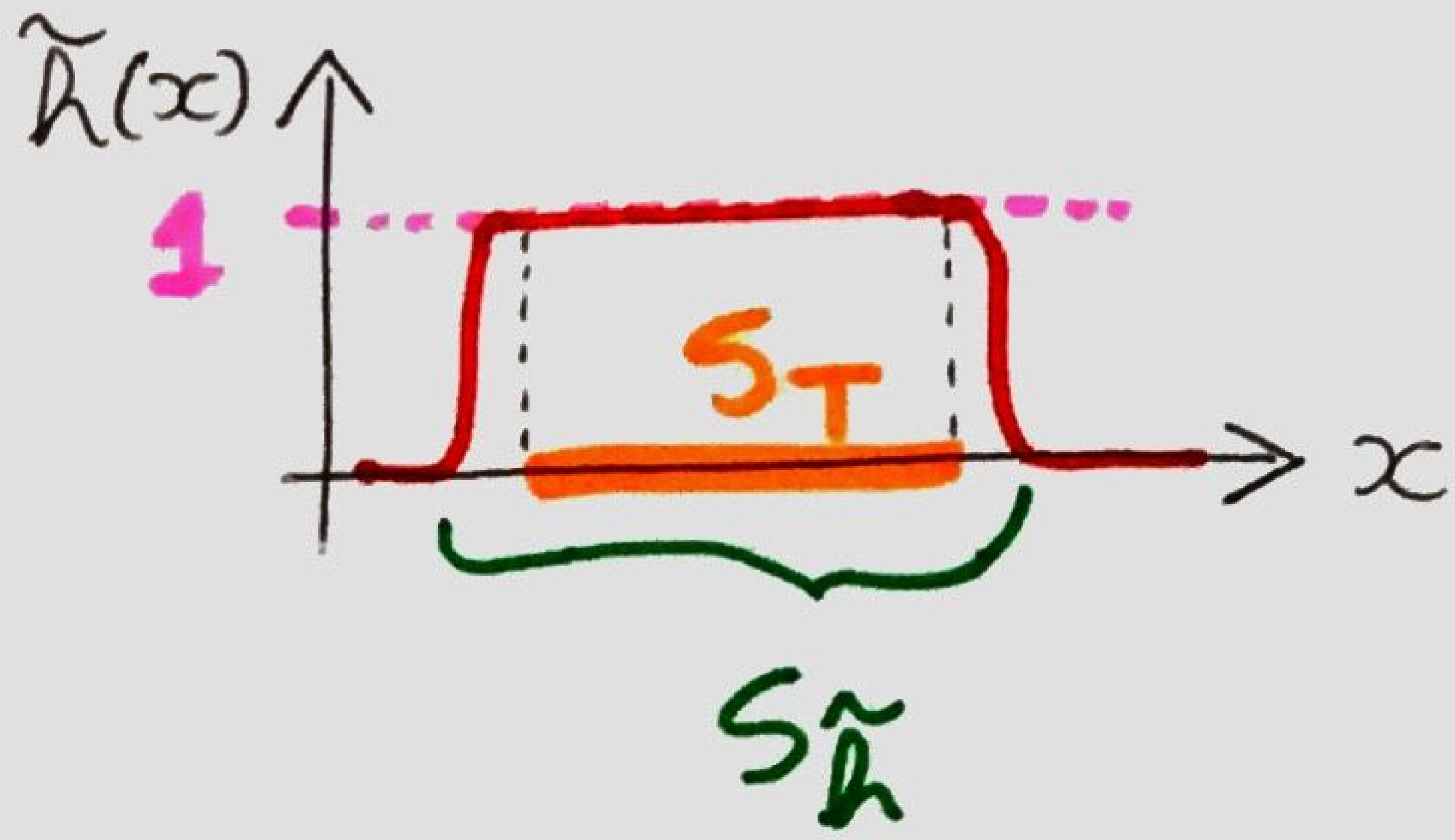
DUAS DISTRIBUIÇÕES $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ SÃO IGUAIS NO ABERTO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ SE $\langle T, h \rangle = \langle S, h \rangle$ PARA QUALQUER $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ COM SUPORTE CONTIDO EM Ω.

δ_3 E Ш SÃO IGUAIS EM $(2.2, 3.1)$.
δ_3 E Ш SÃO IGUAIS ENTRE SI E À DISTRIBUIÇÃO NULA EM $(2.2, 2.9)$.

TECNICAMENTE, O SUPORTE DE UMA DISTRIBUIÇÃO $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ É O COMPLEMENTO (EM RELAÇÃO AO $\mathbb{R}^n$) DA UNIÃO DE TODOS OS ABERTOS EM QUE T É IGUAL À DISTRIBUIÇÃO NULA.

DISTRIBUIÇÕES DE SUPORTE COMPACTO PODEM AGIR SOBRE FUNÇÕES QUE SÃO $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, MAS NÃO $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. POR QUÊ?
QUALQUER $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ DE SUPORTE COMPACTO É IGUAL A $\tilde{h}T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

ONDE $\tilde{h}$ É UMA FUNÇÃO TESTE CUJO SUPORTE CONTÉM O DE T E QUE VALE 1 EM QUALQUER PONTO DO SUPORTE DE T.



ASSIM, $\forall h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\langle T, h \rangle = \langle \tilde{h} T, h \rangle$.

MAS $\langle \tilde{h} T, h \rangle = \langle T, \tilde{h} h \rangle$.

SE, AO INVÉS DE $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, TIVÉSSEMOS $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, PODERÍAMOS DEFINIR

$$\langle \tilde{h} T, \alpha \rangle \equiv \langle T, \tilde{h} \alpha \rangle,$$

PORQUE $\tilde{h}\alpha$ É UMA FUNÇÃO TESTE!!!

LOGO, $\langle T, \alpha \rangle$ "FAZ SENTIDO" SE T TEM SUPORTE COMPACTO: $\exists\, \tilde{h} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ TAL QUE $\boxed{\langle T, \alpha \rangle \equiv \langle T, \tilde{h} \alpha \rangle}$.