

MAC121 - Algoritmos e Estruturas de Dados I

Universidade de São Paulo

Segundo Semestre de 2020

Recursão

Torres de Hanoi

Para alguns problemas, a solução recursiva é muito natural.



Problema: Dados n discos dispostos em ordem na primeira torre, imprimir os movimentos para levá-los à terceira torre, movendo um disco de cada vez e sem colocar um disco maior sobre um menor. A segunda torre pode ser usada como auxiliar.

Torres de Hanoi - história

Veja a página da Wikipedia sobre isso. O quebra-cabeça foi inventado por Édouard Lucas em 1883, e vários mitos surgiram.

Segundo um deles, em um templo há um salão amplo com as 3 torres e 64 discos dourados. Monges estão movendo, desde o início dos tempos, os discos para resolver o quebra-cabeça. De acordo com a profecia, quando eles terminarem, o mundo acaba.



Torres de Hanoi - solução...

Para $n = 3$:

Move disco 1 de A para C

Move disco 2 de A para B

Move disco 1 de C para B

Move disco 3 de A para C

Move disco 1 de B para A

Move disco 2 de B para C

Move disco 1 de A para C

Foi possível resolver com 7 movimentos!

Torres de Hanoi - solução...

Para $n = 3$:

Move disco 1 de A para C
Move disco 2 de A para B
Move disco 1 de C para B

Mova 2 discos de A para B

Move disco 3 de A para C

Move disco 1 de B para A
Move disco 2 de B para C
Move disco 1 de A para C

Mova 2 discos de B para C

Solução recursiva!!!!

Hanoi recursivo

Para resolver o problema para n discos:

Mova recursivamente $n - 1$ discos de A para B

Mova o disco n de A para C

Mova recursivamente $n - 1$ discos de B para C

Quantos movimentos?

- ▶ Para $n = 1$, 1 movimento;
- ▶ Para $n = 2$, 3 movimentos;
- ▶ Para $n = 3$, 7 movimentos;
- ▶ \vdots
- ▶ $2^n - 1$ movimentos.

Voltando à lenda...

Os monges terão de fazer $2^{64} - 1$ movimentos:

18.446.744.073.709.551.615

Se fizerem um movimento por segundo, terminarão em

5.124.095.576.030.431 horas ou
584.942.417.355 anos

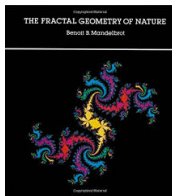
Segundo se sabe hoje, a idade do universo seria de
14.000.000.000 de anos, ou seja, ainda temos tempo...



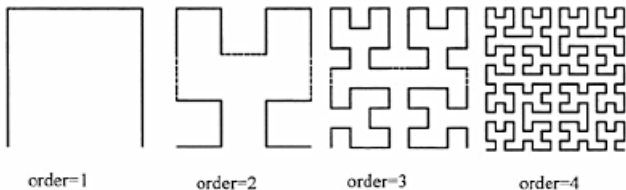
Mais problemas recursivos - fractais



Fractal é uma figura geométrica em que suas partes separadas repetem a aparência do todo completo (Wikipedia). O termo foi inventado por Benoit Mandelbrot em 1975.



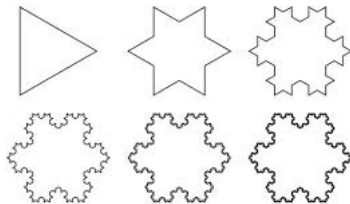
Curvas de Hilbert



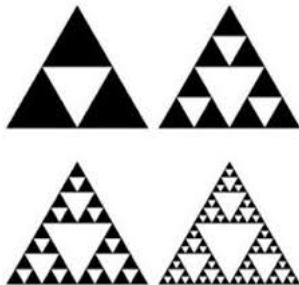
Observe que para desenhar uma curva de Hilbert de ordem 2 (H_2):

- ▶ Desenha H_1 rodada para a direita;
- ▶ Move a caneta para cima;
- ▶ Desenha H_1 ;
- ▶ Move a caneta para a direita;
- ▶ Desenha H_1 ;
- ▶ Move a caneta para baixo;
- ▶ Desenha H_1 rodada para a esquerda.

Mais fractais



- ▶ Curvas de Koch



- ▶ Triângulo de Sierpiński