Aula 4 - Métodos computacionais para integração

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Motivação

- Algumas funções não possuem primitivas dadas por operações (soma, produto, composição) de funções elementares.
- Outras vezes sequer conhecemos a expressão da função que precisamos integrar (por exemplo, em casos de problemas aplicados).
- Nessas situações, o Teorema Fundamental do Cálculo não ajuda a obtermos um valor numérico para a integral definida.
- Precisamos usar uma soma de Riemann ou outro método para obter uma aproximação numérica para a integral.
- O maior desafio é controlarmos o erro.
- Isto é, dado $\varepsilon > 0$ queremos achar um valor aproximado A da integral I de modo que $|I - A| < \varepsilon$.
- Vale também para cálculo de integral imprópria.

Exemplo 1

Encontre uma aproximação para o valor da seguinte integral indefinida, com erro menor que 0,01:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Método do ponto médio

- Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável.
- Seja $n \in \mathbb{N}^*$.
- Considere $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
- Tome $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ a partição de $[a, b]$ onde $x_k = a + k\Delta x$.
- Tome $A = \{t_1, \ldots, t_n\}$ a amostra definida por $t_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$.
- Defina $M_n = \displaystyle\sum_{(P,A)} f$.
- Chamamos M_n de *n-ésima aproximação de $\int_a^b f(x)dx$ pelo método do ponto médio*.

Método do trapézio

- Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável.
- Seja $n \in \mathbb{N}^*$.
- Considere $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
- Tome $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ a partição de $[a, b]$ onde $x_k = a + k\Delta x$.
- Para cada $k \leq n$ considere o trapézio delimitado pelos pontos $(x_{k-1}, 0)$, $(x_k, 0)$, $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$.
- Defina $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta x \cdot (f(x_k) + f(x_{k-1}))}{2}$ a soma das áreas de todos esses trapézios. (com sinal negativo quando abaixo do eixo das abscissas).

- Note que podemos escrever

$$T_n = \frac{\Delta x}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

- Chamamos T_n de *n-ésima aproximação de $\int_a^b f(x)dx$ pelo método do trapézio*.
- Veremos que o método do trapézio costuma fornecer uma aproximação melhor da integral do que o método do ponto médio.

Estimativa de erro

Teorema 1

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua tal que* $|f''(x)| \leq M$*, para todo* $x \in]a,b[$*. Sejam* M_n *e* T_n *as n-ésimas aproximações de* $\int_a^b f(x)dx$ *pelos métodos do ponto médio e do trapézio, respectivamente. Temos:*

(a) $$\left| M_n - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2}.$$

(b) $$\left| T_n - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

Fim