APÊNDICE

Neste apêndice apresentamos um resumo da discussão contida na apostila de Lab. de Física I. Trata-se apenas de um "formulário" para uso rápido durante a prática. Sugerimos ao leitor consultar o texto original para maiores esclarecimentos.

I. Propagação de Erros

Forma correta de expressar o resultado de uma medida

- Não existem resultados experimentais sem incerteza: não deixe valores medidos sem sua incerteza
- Se há dispersão nos valores das medidas repetidas x_i, calcule o valor médio $\bar{x}$ e o desvio padrão σ, ou desvio médio Δ. O resultado da medida é:

$$\boxed{\bar{x} \pm \sigma} \quad \text{ou} \quad \boxed{\bar{x} \pm \Delta}.$$

- Caso o desvio seja menor que a precisão do instrumento *D*, esta é a incerteza:

$$\boxed{\bar{x} \pm D}$$

- Se não há dispersão, a incerteza é a própria precisão do instrumento *D*:

$$\boxed{\bar{x} \pm D}$$

- A primeira casa significativa da incerteza define onde serão truncados e arredondados os resultados.

Obs.: *Não é necessário arredondar e truncar durante os cálculos auxiliares, basta fazê-lo no resultado final.*

Média aritmética dos x_i	Desvio médio (D):	Desvio padrão (s):
$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$	$\Delta = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{N}$	$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$

Fórmulas de propagação de incertezas $Z \mp \Delta Z$ ***para algumas funções elementares.***			
$z = f(x, y, \ldots)$		Δz	Erro relativo $\frac{\Delta z}{z}$
soma	$z = x + y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$
subtração	$z = x - y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{x - y}$
produto	$z = x\ y$	$x \Delta y + y \Delta x$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
divisão	$z = \frac{x}{y}$	$\frac{x \Delta y + y \Delta x}{y^2}$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
produto por uma constante *a*	$z = a\ x$	$a \Delta x$	$\frac{\Delta x}{x}$
potência	$z = x^n$	$n\, x^{n-1} \Delta x$	$n \frac{\Delta x}{x}$
logaritmo de base *e* *e* = 2.7182...	$z = \ln(x)$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{x . \ln(x)}$
exponencial	$z = e^x$	$c^x . \Delta x$	Δx

II. Gráficos

A representação dos dados através de gráficos tem a vantagem de permitir visualizar a relação entre ambas grandezas. Existem regras gerais para a elaboração dos gráficos, que são aceitas pela comunidade técnica e científica:

i) O gráfico sempre deve estar numerado e ter uma legenda explicativa, de maneira que o leitor compreenda essencialmente o que se representa sem ter que ler o texto do relatório.

ii) Os eixos do gráfico devem conter legendas indicando claramente a grandeza, as unidades e, se houver, o fator exponencial dos dados representados.

iii) As escalas de cada eixo devem ser escolhidas para visualizar claramente o comportamento extremo dos dados. Dependendo da situação, não é obrigatório que a escala abranja a origem (0;0) das coordenadas dos eixos.

iv) A numeração das escalas deve ser equilibrada, correspondendo a números redondos. *Nunca* se colocam sobre os eixos os valores dos dados experimentais: para isso está a tabela.

v) O tamanho dos símbolos deve ser suficientemente claro para identificar o dado experimental. Quando a incerteza Δ do dado é maior que o tamanho do símbolo sobre o gráfico, é conveniente traçar as barras de incerteza de comprimento $\pm\Delta$.

vi) A grandeza representada no eixo horizontal usualmente é escolhida como aquela que é melhor controlada durante o experimento: o aparelho experimental permite variá-la independentemente e tem menor incerteza relativa que a outra grandeza.

vii) Se o gráfico evidencia uma relação linear entre as grandezas físicas representadas, é possível traçar a reta que melhor represente essa relação. A reta deve ser a melhor aproximação aos dados experimentais em média.

II.a) Equação linear

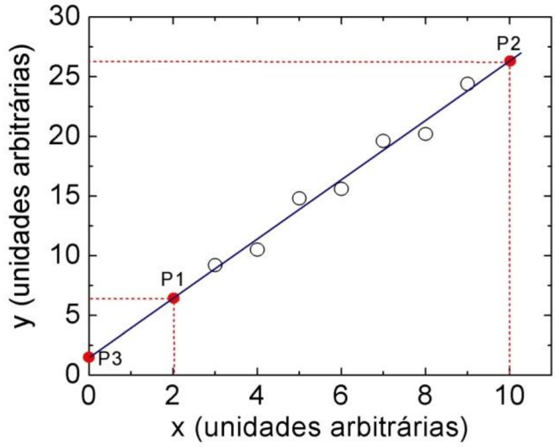
Muitas vezes, a relação encontrada experimentalmente entre duas grandezas físicas é linear, ou pode ser linearizada

$$y = a.x + b \tag{1}$$

Nesta situação, deve-se determinar a melhor reta que representa os dados experimentais, e calcular o valor dos parâmetros **a**, a inclinação ou coeficiente angular, e **b**, ordenada na origem ou coeficiente linear.

O Gráfico da Fig.7-1 mostra o exemplo de um conjunto de dados experimentais (círculos abertos) que aparentam seguir uma relação linear. Como os dados medidos estão sujeitos a erros experimentais aleatórios, existe uma dispersão. A melhor reta traçada deve tentar se aproximar equilibradamente a todos eles. O defeito deste método é que a reta resultante depende do critério do observador.

Figura1.1- Duas grandezas físicas **x** e **y** medidas experimentalmente (círculos abertos), com relação possivelmente linear. Linha contínua: melhor reta traçada graficamente representando a relação entre as grandezas. **P1**, **P2** e **P3**: pontos escolhidos sobre a reta (não são pontos experimentais) para cálculo dos parâmetros.



Fonte: Elaborada pelo Compilador

Havendo determinado a melhor reta, os coeficientes que melhor expressam a relação entre as grandezas ***y*** e ***x*** podem ser calculados analiticamente a partir das coordenadas de dois pontos arbitrários *da reta*, **P1** e **P2**, com coordenadas (**X_1 ; Y_1**) e (**X_2 ; Y_2**). Preferentemente, devem-se escolher pontos bem separados, para minimizar erro de cálculo dos coeficientes, e cuja leitura das coordenadas seja simples. Os coeficientes resultam:

coeficiente angular: $$a = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \tag{2}$$

Alternativamente, quando a escala do gráfico permite visualizar a interseção da reta com o eixo vertical em **x=0**, o ponto **P3** no Gráfico da Fig.7.1, o coeficiente b é simplesmente

$$b = P_3 = Y\,(X = 0) \tag{3}$$

II.b) Linearização da função exponencial

Outro exemplo de linearização importante é o caso de uma relação exponencial

$$y = a.e^{cx} \tag{4}$$

Sendo **a** e **c** constantes. Aplicando logaritmo na base e em ambos lados desta equação resulta

$$\ln(y) = a + c\ln(e)x \tag{5}$$

Como **ln (e) = 1**, temos que:

$$\ln(y) = a + c\,x \tag{6}$$

Esta equação mostra que existe uma relação linear entre ***ln(y)*** e ***x***. Portanto um gráfico mono-log, com o eixo vertical em escala logarítmica e o eixo horizontal em escala linear, mostrará uma reta. A inclinação da reta é o coeficiente **c**, que pode ser calculado como

$$c = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{x_2 - x_1} \qquad (7)$$

O coeficiente linear este caso é dado por:

$$a = ln(y_3) \qquad (8)$$

onde $\mathbf{y_3}$ é o ponto onde a reta cruza o eixo **y**.

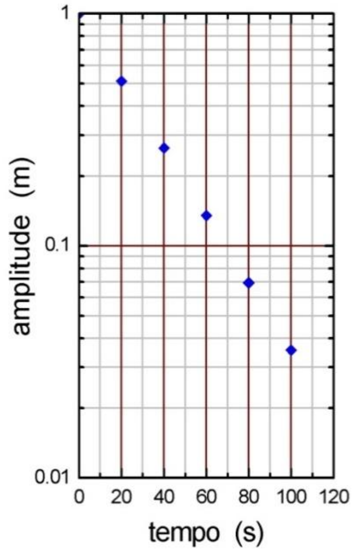
<u>Exemplo:</u> A tabela abaixo mostra valores de amplitude de oscilação de um sistema amortecido em função do tempo. Sabe-se que a resposta do sistema está dada pela função exponencial decrescente no tempo

$$y(t) = a\, e^{-ct}$$

Represente os dados em escala mono-logarítmica e determine os valores dos parâmetros **a** e **c**.

tempo(s)± 1 s	amplitude(m)±0.003 m
0	1,000
20	0,513
40	0,264
60	0,135
80	0,069
100	0,036

Figura1.2 - Amplitude em função do tempo em escala mono-log de duas décadas



Fonte: Elaborada pelo Compilador

Solução. Neste problema, os valores extremos de amplitude (**y**) variam numa faixa maior que um fator **10** e menor que **100**. Portanto a escolha mais conveniente para o eixo logarítmico é de duas décadas. O Gráfico 2 mostra o gráfico resultante. Observe que a escala logarítmica não permite liberdade na escolha das divisões: cada década deve expandir exatamente um fator de **10** na grandeza física. Por isso o eixo começa em **0,01** e a próximas décadas são **0,1** e **1**. O comportamento linear observado para os dados experimentais confirma que a dependência de **y** com **t** é exponencial e decrescente. Traçando uma reta sobre os dados experimentais, pode calcular os valores dos parâmetros. Calcule e compare com o resultado.

Resposta: a = 1m e c = 0,033s^{-1}.