MAT0221 - Cálculo Diferencial e Integral IV -IO

2o. Semestre de 2020 - 2a. Lista de exercícios - Séries

I) Decida se cada uma das séries abaixo é convergente ou divergente.

1) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$ 2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\text{arctg } n}{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3}\ \sqrt[5]{n^3+5}}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$

9) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ 10) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$ 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^n}$

II) Expresse as seguintes representações decimais como quociente de 2 inteiros

1) $1,\overline{29}$ 2) $0,3\overline{117}$.

III) Seja (a_n) uma sequência qualquer dos dígitos 0,1,2,...,9. Mostre que é convergente a série

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

IV) Decida se cada uma das séries abaixo é convergente. Se possível, calcule sua soma.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n} + 2^n\right)$ 2) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\ t^{\frac{k}{2}}$ para $0 < t < 1$ 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} x$ para $|x| < \frac{\pi}{2}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sin n}$

V) Decidir se a série converge absolutamente, condicionalmente ou diverge.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3}$ 4) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$

5) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$

VI) Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais as séries convergem.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1+x^n)$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5} x^{2n}$

VII) Encontre o raio de convergência das seguintes séries de potências:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{2n!}{(n!)^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \frac{2n!}{(n!)^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{n!}{n^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} \frac{n!}{n^n}$

VIII) Determine o intervalo de máximo de convergência das seguintes séries

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n} x^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$

IX) Seja a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\text{arctg }n}{n^2}$. Considere as seguintes afirmações.

I) A série é divergente

II) A série é absolutamente convergente

III) A série é condicionalmente convergente

IV) Como $\lim_{n\to\infty}\frac{\text{arctg }n}{n^2}=0$ então a série converge.

Então são verdadeiras: (escolha uma resposta)

a) I) é a unica verdadeira

b) II) e IV) são as únicas verdadeiras

c) III) é a única verdadeira

d) I) e III) são as únicas verdadeiras

e) IV) é a única verdadeira

Solucao: Como $|arctgn|\leq\frac{\pi}{2}$ entao

$$\frac{|arctg(n)|}{n^2}\leq\frac{\pi}{2n^2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2}$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2}$$

converge, pois estamos comparando com a $p=2$-serie a qual converge pois $p>1$, segue-se que a serie

$$\frac{|arctg(n)|}{n^2}\leq\frac{\pi}{2n^2}\qquad converge.$$

Logo $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{arctg(n)}{n^2}$ é absolutamente convergente. E portanto $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{arctg(n)}{n^2}$ é convergente.

Logo a serie é absolutamente convergente.

X) Seja a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$. Analise as seguintes afirmações.

I) A série é divergente

II) A série é convergente pelo critério da razão

III) A série é convergente pelo criterio de comparação no limite.

IV) A série é divergente pelo criterio da integral

Então são verdadeiras: (escolha uma resposta)

a) I) é a única verdadeira

b) II) e III) são as únicas verdadeiras

c) I) e IV) são as únicas verdadeiras

d) II) é a única verdadeira

e) III) é a única verdadeira

Solucao Seja $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, entao

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0,\qquad pois\ \ln x>1$$

Portanto a funcao $f(x)$ decresce. Alem disso, ela é continua e definida positiva.

Como

$$\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\int_{\ln 2}^{\infty}udu=\frac{u^2}{2}|_{\ln 2}^{\infty}=\lim_{b\to\infty}(\frac{b^2}{2}-\frac{(\ln 2)^2}{2})=\infty.$$

segue-se pelo criterio da integral que a serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é divergente.

Portanto a letra (C).

XI) Seja a série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3}$. Analise as seguintes afirmações.

I) A série é convergente

II) A série é divergente

III) A série é condicionalmente convergente

IV) A série é absolutamente convergente

Então são verdadeiras: (escolha uma resposta)

a) I) e IV) são as únicas verdadeiras

b) I) e III) são as únicas verdadeiras

c) II) e III) são as únicas verdadeiras

d) IV) é a única verdadeira

e) III) é a única verdadeira

Solucao Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^3+3}$

Como $\frac{1}{n} \leq \frac{2n^2+1}{n^3+3}$ para $n \geq 2$, temos que a serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^3+3}$$

diverge pelo criterio de comparacao com a serie harmonica a qual é divergente.

Além disso, observe que a serie é uma serie alternada com $b_n = \frac{2n^2+1}{n^3+3}$, logo

Seja $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3+3}$, portanto

$$f'(x) = \frac{-2n^4+12n-3n^2}{(x^3+3)^2} < 0, \quad para\ x \geq 2.$$

Portanto a funcao $f(x)$ decresce. Alem disso, ela é continua e definida positiva.

Alem disso,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^3+3} = 0.$$

Portanto pelo criterio da serie alternadas, segue-se que a serie alternada converge.

Portanto a serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3} \quad \textit{é} \quad \textit{condicionalmente convergente}$$

Logo letra (B)

XII) Considere as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{3}]^n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{2}{5}]^{n+1}$, e as séries soma e multiplicação dadas por:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} [(\frac{1}{3})^n + (\frac{2}{5})^{n+1})] \quad \text{e} \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} [(\frac{1}{3})^n (\frac{2}{5})^{n+1}]$$

O valor da soma das séries A e B são:

(escolha uma resposta).

a) $A = \frac{1}{20}$ e $B = \frac{2}{15}$

b) $A = \frac{3}{2}$ e $B = \frac{9}{15}$

c) $A = \frac{2}{5}$ e $B = \frac{2}{3}$

d) $A = \frac{15}{22}$ e $B = \frac{4}{19}$

e) $A = \frac{23}{30}$ e $B = \frac{4}{15}$

Solucao Observe que as duas series sao series geometricas com a primeira serie razao $r = \frac{1}{3}$ e a segunda com razao $r = \frac{2}{5}$. Como as razoes sao menores que 1, segue-se que as duas series sao convergentes para os seguintes valores

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{3}]^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}(\frac{1}{3}^{n-1} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2}{5}]^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^2[\frac{2}{5}]^{n-1} = \frac{\frac{4}{25}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{4}{15}.$$

Portanto a soma das series da $A = \frac{1}{2} + \frac{4}{15} = 23/30$ e a multiplicacao $B = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} = 4/30$

Portanto letra (E)

XIII) Seja a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Analise as seguintes afirmações:

I) O intervalo dos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série converge é $(-1, 1)$

II) O intervalo dos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série converge é $[-1, 1]$

III) Em $x = 1$ a série diverge

IV) Em $x = -1$ a série converge

Então são verdadeiras: (escolha uma resposta)

a) I) é a única verdadeira

b) I) e III) são as únicas verdadeiras

c) II) e III) são as únicas verdadeiras

d) IV) é a única verdadeira

e) III) é a única verdadeira

Solucao Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 + x^2\cos(\pi) + x^4\cos(2\pi) + x^6\cos(3\pi) + ... = -x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - .... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)x^{2n}$$

Vamos usar o criterio da razao:

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(-1)^n x^{2n}}| = |x^2|.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |x^2|.$$

Pele criterio da razao temos que se $|x^2| < 1$ ou seja $|x| < 1$ a serie converge absolutamente, portanto convergente.

Agora analise os extremos do intervalo:

$$Em \quad x = 1, \quad temos \quad \sum_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{n\pi}{2}) = 0 - 1 + 1 - 1 + 1 - ..... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

a qual diverge pois

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \quad \textit{nao existe}$$

Logo pelo criterio da divergencia a serie diverge.

$$Em \quad x = -1, \quad temos \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(\frac{n\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

a qual diverge pois

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \quad \textit{nao existe}$$

Logo pelo criterio da divergencia a serie diverge.

Portanto o intervalo maximo de convergencia da serie é $(-1, 1)$

Logo letra (B).

XIV) Seja a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n} x^n$. Analise as seguintes afirmações:

I) O intervalo máximo de convergencia da série é $(-2, 2)$

II) O intervalo máximo de convergencia da série é $[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

III) O raio de convergencia é $R = 2$

IV) O raio de convergencia é $R = \frac{4}{3}$ e em $x = 3$ a série converge.

Então são verdadeiras: (escolha uma resposta)

a) I) é a única verdadeira

b) II) é a única verdadeira

c) II) e IV) são as únicas verdadeiras

d) IV) é a única verdadeira

e) III) é a única verdadeira

Solucao Usamos criterio da razao com $a_n = \frac{3^n}{n4^n} x^n$

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{3^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}} x^{n+1} \cdot \frac{n4^n}{x^n 3^n}| = \frac{3|x|}{4} \frac{n}{n+1}$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{3|x|}{4}$$

Portanto pelo criterio da razao a serie converge absolutamente quando x é tal que $|x| < \frac{4}{3}$. Observe que o raio de convergencia é $R = \frac{4}{3}$.

Nos pontos extremos do intervalo

$$Em \ x = -\frac{4}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n} (-\frac{4}{3})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

e portanto a serie converge, pois ela e alternada com $b_n = \frac{1}{n}$ a qual é decrescente, positiva e com

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Logo a serie alternada converge pelo criterio de Leibniz.

$$Em \ x = \frac{4}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n} (\frac{4}{3})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

a qual é divergente.

Portanto o intervalo maximo de convergencia da serie dada é $[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.

Observe que em $x = 3$ a serie diverge.

Logo letra (B)

XV) Sejam as séries

A) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3(x-5)^n$

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-3)^n}{n4^n}$

Afirmamos que:

I) a serie A) é convergente para todo $x \in (4,6)$ e diverge para os $x \in (-\infty, 4] \cup [6, \infty)$

II) O intervalo maximo de convergencia para a serie B) é $[-\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$ e está centrada em $x = 3/4$

III) a serie A) converge absolutamente em $x = 5$ e tem raio de convergencia $R = 1$

IV) a serie B) é convergente absolutamente em $x = 1$, converge condicionalmente em $x = -\frac{1}{4}$ e diverge em $x = 2$

Então são verdadeiras: (escolha uma resposta)

a) I) é a única verdadeira

b) II), III) e IV) sao as únicas verdadeiras

c) II) e IV) são as únicas verdadeiras

d) IV) é a única verdadeira

e) Todas sao verdadeiras

Solucao

Use criterio da razao para a serie A:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)^3(x-5)^{n+1}}{n^3(x-5)^n}| = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^3|x-5| = |x-5|$$

pelo criterio da razao a serie converge absolutamente em $(4,6)$ e diverge em $x \in (-\infty, 4) \cup (6, \infty)$. O raio de convergencia $R = 1$.

Em $x = 4$ a serie fica:

$$\sum_{n\to\infty} n^3(-1)^n, \qquad diverge$$

pelo criterio da divergencia.

Em $x = 6$ a serie fica:

$$\sum_{n\to\infty} n^3, \qquad diverge$$

pelo criterio da divergencia.

Para a serie B) observamos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-3)^n}{n4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x-3/4)^n}{n4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3/4)^n}{n}$$

Usamos agora o criterio da raiz:

$$\lim_{n\to\infty} (|b_n|)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-3/4|}{n^{\frac{1}{n}}} = |x-3/4|$$

pelo criterio da raiz a serie converge absolutamente nos x tais que $|x-3/4| < 1$ e diverge em $x \in (-\infty, -1/4) \cup (7/4, \infty)$. O raio de convergencia $R = 1$.

Nos extremos do intervalo:

Em $x = -1/4$ temos a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ a converge pelo criterio da serie alternada.

Mas tambem observe que a serie de modulos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad diverge$$

Logo a serie em $x = -1/4$ é condicionalmente convergente

Em $x = 7/4$ temos a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a qual é divergente.

Portanto a serie B) tem intervalo maximo de convergencia igual a $[-\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$.

Logo letra E)

RESPOSTAS

(I) 1) diverge 2) converge 3) converge 4) converge 5) diverge 6) diverge 7) converge 8) converge 9) converge 10) converge 11) diverge 12) converge

(IV) 1) diverge 2) converge para $\frac{1}{1+\sqrt{t}}$ 3) converge para $\frac{1}{1-\sin^2 x}$ 4) diverge 5) diverge 6) diverge

(V) 1) condicionalmente convergente 2) absolutamente convergente 3) condicionalmente convergente 4) condicionalmente convergente 5) condicionalmente convergente 6) absolutamente convergente

(VI) 1) $x \in (-1, 1)$ 2) $x \in (-1, 1)$ 3) $x = 0$ 4) $x \in [-1, 1]$

(VII) a) $R = 1/4$; b) $R = 1$; c) $R = e$; d) $R = \sqrt[3]{e}$

(VIII) a) $x \in (-4, 4)$ b) $x = 0$ c) $x \in [-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ d) $x \in [-1, 1)$