MAT0220 - Cálculo Diferencial e Integral IV -IO
2o. Semestre de 2020 - 1a. Lista de exercícios - Sequências

I) Decida se cada uma das sequências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente.

1) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, ...$ 2) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, ...$ 3) $a_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

4) $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n-1}$, $n \geq 2$ 5) $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$ 6) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

7) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ 8) $a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$ 9) $a_n = \frac{\sin n}{n}$

10) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+11}\right)^n$ 11) $a_n = \frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!}$ 12) $a_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$

13) $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$ 14) $a_n = \sqrt[n]{n}$ 15) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

16) $a_n = \frac{2n+\sin n}{5n+1}$ 17) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ 18) $a_n = -n - n^3$

II) 1) Considere a sequência $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ... Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2 e calcule seu limite.

2) Seja a sequência definida por recorrência da seguinte forma: $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, para $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$. Mostre que a sequência é limitada e crescente. Obtenha o seu limite.

III) Verifique a convergência ou divergência das seguintes sequências.

1) $a_n = \dfrac{2.4.6....(2n)}{1.3.5....(2n-1)}$ 2) $a_n = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$ 3) $a_n = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n-1)}$.

IV) Considere a sequência $\{a_n\}$ dada explicitamente por: $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, ...$
Considere as seguintes afirmações.

I) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

II) $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existe

III) $\{a_n\}$ é uma sequência limitada inferiormente por $1/7$.

IV) $\{a_n\}$ tem uma subsequência que converge para 1 e outra subsequência que converge para $1/2$.

Então são verdadeiras: (escolha uma resposta)

a) I) e III) são as únicas verdadeiras

b) II) e iV) são as únicas verdadeiras

c) II) e III) são as únicas verdadeiras

d) Nenhuma é verdadeira

e) Todas são verdadeiras.

Solucao Pegue as subsequencias

$$1, 1, 1, 1, ..., 1, ... = \{1\}, \qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ..., = \{\frac{1}{2^n}\}$$

Observe que a primeira subsequencia converge para 1 e a segunda para 0. Logo por ser diferentes os limites das duas subsequencias, segue-se que a sequencia original diverge.

V) Considere as sequências $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ onde $a_n = \sin n$; $b_n = \sin(n\pi)$ e $c_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Analise as seguintes afirmações.

I) $\{a_n\}$ é convergente e $\{b_n\}$ diverge

II) $\{a_n\}$ diverge e $\{c_n\}$ diverge

III) $\{b_n\}$ converge a 0 e $\{c_n\}$ é limitada.

IV) A sequência $\{a_n + b_n\}$ é convergente.

Então são verdadeiras: (escolha uma resposta)

a) I) e III) são as únicas verdadeiras

b) II) e III) são as únicas verdadeiras

c) II) é a única verdadeira

d) II) e IV) são as únicas verdadeiras

e) Todas são falsas

Solucao Observe que a sequencia $a_n = \sin n$ provem da funcao continua periodica $\sin(x)$, logo sabe-se que tal funcao nao possue limite quando $n \to \infty$, logo essa sequencia diverge.

A sequencia $b_n = \sin(n\pi) = 0, 0, 0, 0, ...0., ...$ portanto converge para 0.

A sequencia $c_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ... = \{(-1)^{n-1}\}$ a qual diverge, pois possue duas subsequencias convergendo para limites diferentes.

Logo sao verdadeiras II) e III). Letra (B)

VI) Seja $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$ sequência. O valor do limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ é igual a:

(escolha uma resposta)

a) 1/2

b) 0

c) -1

d) 1

e) 2

Solucao Usamos ln para o calculo do limite.

$$\ln a_n = \frac{1}{n}\ln(n^2 + n)$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(n^2 + n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Logo $\ln \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, portanto $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Letra (D)

VII) Considere as sequências $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ onde $a_n = \frac{3^n}{2^n + 10^n}$; $b_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$ e $c_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. Os limites quando $n \to \infty$ são tais que: (escolha uma resposta).

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -1$ e $\lim_{n\to\infty} c_n = e^2$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ e $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ não existe e $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$

d) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ não existe e $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$

e) $\lim_{n\to\infty} a_n = 3/2$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ e $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$

Solucao Para a primeira sequencia temos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{2}{3})^n + (\frac{10}{3})^n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n + \lim_{n\to\infty}(\frac{10}{3})^n} = 0$$

Logo converge para 0.

A sequencia b_n é da forma

$$-1 - 1,\ 1 + \frac{1}{2},\ -1 - \frac{1}{3},\ 1 + \frac{1}{4},\ .....$$

Agora pegue a subsequencia $\{-1-\frac{1}{2k-1}\}$ e $\{1+\frac{1}{2k}\}$, elas sao tais que convergem a limites diferentes, a primeira vai para -1 e a segunda para 1. Portanto o limite da sequencia b_n nao existe.

Para a sequencia c_n usamos ln para calcular o limite e usamos hopital para seu calculo. Isto é

$$\lim_{n\to\infty} \ln c_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$$

Logo $\ln \lim_{n\to\infty} c_n = \infty$, isto é $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$.

Portanto Letra (D)

VIII) Sejam $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequências numéricas. Considere as seguintes afirmacões

(I) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $a_n \leq 0$ então $a \leq 0$
II) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $a_n > 0$ então $a > 0$
III) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ então para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$
IV) Se $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = d$ então $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergem.

Então são verdadeiras: (escolha uma resposta)

a) II) e III) são as únicas verdadeiras

b) I) é a única verdadeira

c) IV) é a única verdadeira

d) II) e IV) são as únicas verdadeiras

e) Todas são falsas

Solucao Item II) falso. Pode-se observar isso usando a sequencia: $\{\frac{1}{n}\}$, cujo limite é 0.

Item III) falso: Pois pegue as sequencias $\{\frac{1}{n}\}$ e $\{-\frac{1}{n}\}$. Ambas convergem para 0, mas $a_n \neq b_n$

Item IV) falso: Pois pegue por exemplo $a_n = n$ e $b_n = \frac{1}{n}$. Entao a sequencia produto é convergente para 1, mas a_n diverge e b_n converge.

Agora pela definicao de limite temos que a letra é (B)

IX) Considere as sequencias númericas cujo termo n-esimo sao dados por

$$a_n = \frac{n+\sqrt{2n}}{n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{3n}}, \qquad b_n = \frac{\ln(2+e^n)}{3n}, \qquad c_n = (3^n+5^n)^{\frac{1}{n}}$$

Analise as seguintes afirmacoes

I) A sequencia a_n converge para 0, a sequencia b_n diverge ∞ e c_n converge para 1

II) A sequencia a_n é diverge para ∞, a sequencia b_n converge para $\frac{1}{3}$ e c_n converge para 5

III) A sequencia a_n converge para 1, a sequencia b_n converge para 3 e c_n é limitada inferiormente por 0 e superiormente por 6

IV) A sequencia a_n é diverge para ∞, a sequencia b_n diverge ∞ e c_n converge para 5

Entao pode-se afirmar que

a) apenas I) é correta

b) apenas II) é correta

c) apenas III) é correta

d) apenas IV) é correta

e)Todas sao falsas

Solucao

Temos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{2n}}{n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2/n}}{1/n^{2/3}+\sqrt{n}\sqrt{3/n^2}} = \frac{(1+\sqrt{2/n})n^{2/3}}{1+n^{7/3}\sqrt{3/n^2}} = \infty$$

Portanto a sequencia diverge.

Para b_n temos que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2+e^n)}{3n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2+e^x)}{3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2+e^x}e^x}{3} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3}$$

Portanto a sequencia converge para $\frac{1}{3}$

Para sequencia c_n, temos que

$$5 \leq (3^n+5^n)^{\frac{1}{n}} \leq 2^{\frac{1}{n}}5$$

temos pelo confronto que

$$\lim_{n\to\infty} (a^3+5^n)^{\frac{1}{n}} = 5.$$

Segue-se que a sequencia c_n converge para 5.

Letra (B)

X) Considere as sequencias numericas cujo termo n-esimo sao dados por

$$a_n = (2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} \qquad b_n = (10^n+9^n)^{\frac{1}{n}} \qquad c_n = (4^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$$

Analise as seguintes afirmacoes

I) A sequencia a_n converge para 3, a sequencia b_n converge para 10 e c_n converge para 4

II) A sequencia produto $a_n \cdot b_n$ é diverge, a sequencia b_n converge para $\frac{1}{3}$ e c_n converge para 5

III) A sequencia produto $a_n \cdot b_n$ converge para 30, a sequencia $a_n - c_n$ converge para -1 e a sequencia $2a_n + 3b_n$ converge para 36

IV) As sequencias a_n, b_n, c_n satisfacem que $a_n < c_n < b_n$

Entao pode-se afirmar que

a) apenas I) e III) sao corretas

b) apenas I), III) e IV) sao corretas

c) apenas III) é correta

d) apenas IV) é correta

e)Todas sao falsas

Solucao Como de forma geral temos que para numeros a, b tais que $a < b$

$$b \leq (a^n+b^n)^{\frac{1}{n}} \leq 2^{\frac{1}{n}}b$$

temos pelo confronto que

$$\lim_{n\to\infty} (a^n+b^n)^{\frac{1}{n}} = b.$$

Segue-se que a sequencia a_n converge para 3, sequencia b_n converge para 10 e a c_n converge para 4.

Logo $a_n \cdot b_n$ converge para 30, a sequencia $a_n - c_n$ converge para -1 e a sequencia $2a_n + 3b_n$ converge para 36

Alem disso,

$$2^n + 3^n < 4^n + 3^n < 9^n + 10^n$$

portanto $a_n < c_n < b_n$

Logo Letra (B)

XI) Considere as sequencia numerica cujo termo n-esimo é

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5.......(2n-1)}{(2n)^n}$$

Pode-se afirmar que

a) a sequencia converge para 1

b) a sequencia diverge para ∞

c) a sequencia converge para $\frac{1}{2}$

d) a sequencia converge para 0

e) a sequencia converge para 2

Solucao Observe que para todo n temos que

$$(2n-1)(2n+1) < 4n^2$$

Logo

$$\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$$

Agora pegamos o quadrado

$$a_n^2 = (\frac{1}{2n})^2.(\frac{3}{2n})^2.(\frac{5}{2n})^2.......(\frac{2n-1}{2n})^2.(\frac{1}{2n})^2$$

e assim

$$a_n^2 = (\frac{1}{2n})^2.(\frac{3}{2n})^2.(\frac{5}{2n})^2.......(\frac{2n-1}{2n})^2.(\frac{1}{2n})^2 < \frac{1}{2n}.\frac{2n}{3}.\frac{3}{2n}.\frac{2n}{5}.......\frac{2n-1}{2n}.\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

portanto $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$ e logo como a sequencia é uma sequencia de termos positivos segue-se que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Letra (D)

RESPOSTAS

(I)

1) converge para 1	2) diverge	3) converge para 2
4) converge para 0	5) converge para $\frac{1}{4}$	6) converge para 0
7) converge para 1	8) converge para $\frac{3}{2}$	9) converge para 0
10) converge para 0	11) converge para 0	12) converge para 0
13) converge para e	14) converge para 1	15) converge para 1
16) converge para $\frac{2}{5}$	17) converge para 1	18) diverge para -∞

(III) 1) diverge   2) converge   3) converge