Lista 2

Nícolas André da Costa Morazotti

22 de setembro de 2020

Questão 1

A chave na figura 1 será fechada no instante $t = 0$. Quais devem ser as condições iniciais $Q(0)$ e $I(0)$ para que o fluxo de carga entre diretamente no regime estacionário, sem haver transiente? *Sugestão: Encontre a carga $q(t)$ no regime estacionário. A carga é $Q(t) = \alpha Q_x + \beta Q_y + q(t)$; você quer encontrar $Q(0)$ e $I(0)$ para que as constantes α e β sejam zero.*

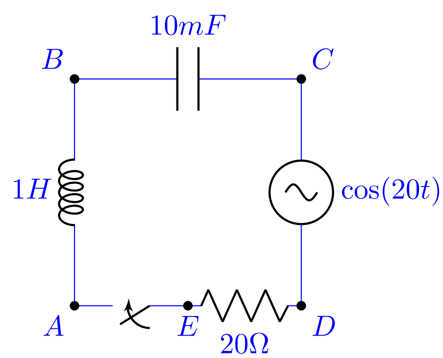


Figura 1: Questões 1-3. A força eletromotriz é expressa em Volts.

Para encontrarmos a solução estacionária, vamos utilizar um resultado algébrico já encontrado na prova. A solução para z_0 é

$$z_0 = \frac{\mathcal{E}_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega/\tau)}{L[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau^2]}. \tag{1}$$

Substituindo as constantes, vemos que

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10\frac{1}{s} \tag{2}$$

$$\tau = \frac{2L}{R} = \frac{1}{10}s. \tag{3}$$

Vemos já que o circuito está em regime criticamente amortecido. Substituindo as constantes na equação 1, temos

$$z_0 = \frac{100 - 400 - i2 \cdot 20 \cdot 10}{(100-400)^2 + 4 \cdot 400 \cdot 100} \tag{4}$$

$$= \frac{-300 - i400}{9 \cdot 10^4 + 1.6 \cdot 10^5} \tag{5}$$

$$= \frac{-3 - i4}{2500} \tag{6}$$

$$z(t) = -\frac{3 + i4}{2500} e^{i20t}. \tag{7}$$

Tomando a parte real de $z(t)$, o coeficiente real é multiplicado por $\cos(20t)$ e o coeficiente imaginário, por $\sin(20t)$. Assim,

$$q(t) = -\frac{3\cos(20t) + 4\sin(20t)}{2500}. \tag{8}$$

Colocando na equação para a carga do circuito e usando $Q_x(0) = 1, Q_y(0) = 0$, temos

$$Q(t) = \alpha Q_x + \beta Q_y - \frac{3\cos(20t) + 4\sin(20t)}{2500} \tag{9}$$

$$Q(0) = \alpha - \frac{3}{2500} \tag{10}$$

$$\implies \alpha = Q(0) + \frac{3}{2500}. \tag{11}$$

Agora que temos α, podemos calcular a derivada de $Q(t)$ no tempo, e usando que $\dot{Q}_x = -Q_x/\tau - \omega_1^2 Q_y$ (nesse caso particular, $\omega_1 = 0$) e $\dot{Q}_y = -Q_y/\tau + Q_x$, temos

$$I(t) = -\alpha\frac{Q_x}{\tau} - \beta\frac{Q_y}{\tau} + \beta Q_x + \frac{3\sin(20t) - 4\cos(20t)}{125}. \tag{12}$$

Calculando $I(0)$, podemos finalmente encontrar β:

$$I(0) = -\frac{\alpha}{\tau} + \beta - \frac{4}{125} \tag{13}$$

$$\beta = I(0) + \frac{\alpha}{\tau} + \frac{4}{125}. \tag{14}$$

Finalmente, impomos $\alpha = \beta = 0$. A equação 11 implica que

$$Q(0) = -\frac{3}{2500} C.$$

A equação 14 nos leva a

$$I(0) = -\frac{4}{125} A. \tag{15}$$

Questão 2

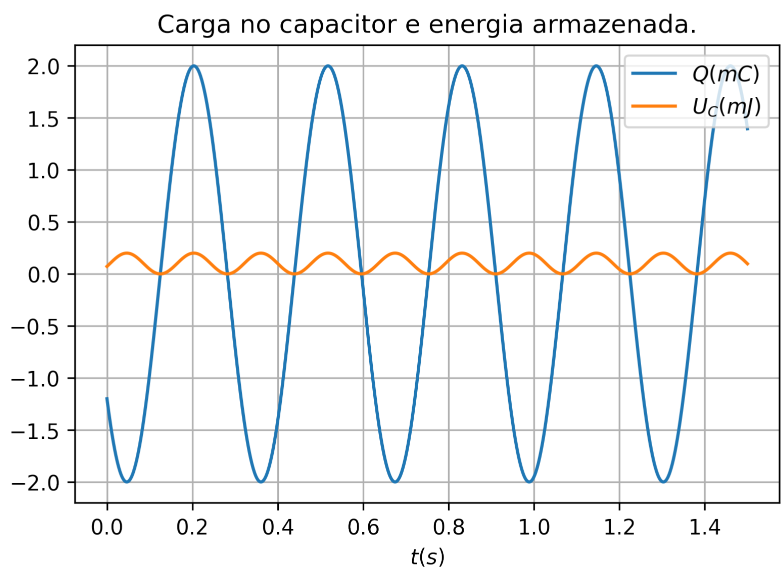
Calcule a carga armazenada no capacitor da figura 1, nas condições da questão 1, em função do tempo e, a partir do resultado, a energia armazenada no capacitor. Calcule também a energia armazenada do indutor, em função do tempo. *Sugestão: Uma vez que $u = dz/dt$, a carga complexa no capacitor é $z = u/(i\omega)$.*

A carga armazenada no capacitor, com as condições da questão 1, é apenas a solução não-homogênea do circuito,

$$Q(t) = -\frac{3\cos(20t) + 4\sin(20t)}{2500} C. \tag{16}$$

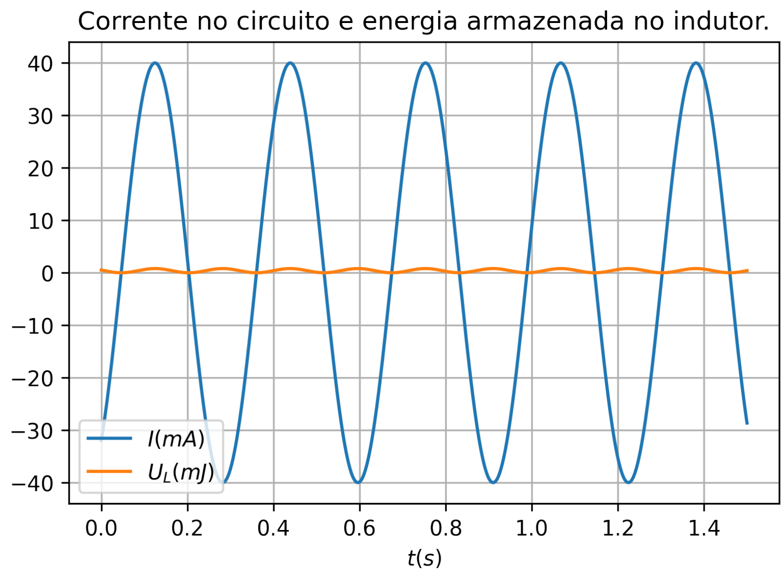
A energia armazenada no capacitor, em função do tempo, é

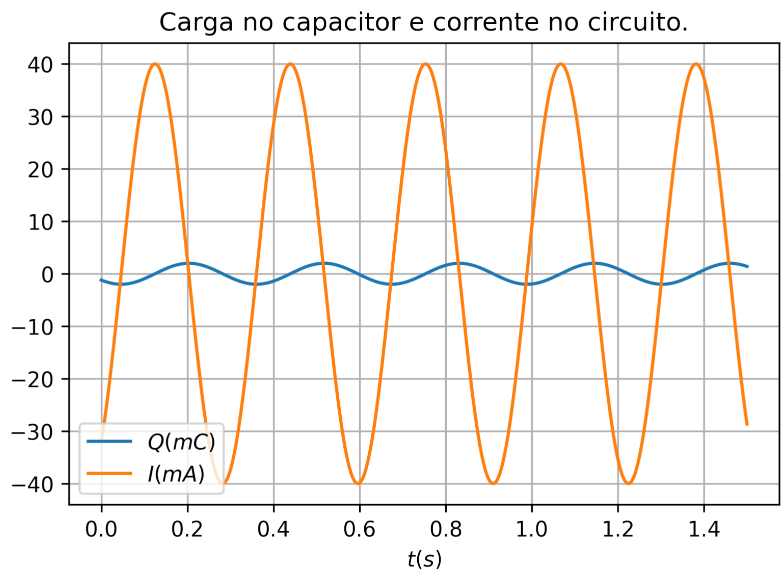
$$\begin{aligned} U_C &= \frac{Q^2}{2C} && (17) \\ &= \frac{9\cos^2(20t) + 24\sin(20t)\cos(20t) + 16\sin^2(20t)}{50^4 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} && (18) \\ &= \frac{9 + 12\sin(40t) + 7\sin^2(20t)}{1.25 \cdot 10^5} && (19) \\ & && (20) \end{aligned}$$



A energia do indutor, por sua vez, é

$$\begin{aligned} U_L &= \frac{LI^2}{2} && (21) \\ I(t) &= \frac{3\sin(20t) - 4\cos(20t)}{125} && (22) \\ U_L &= \frac{1}{2 \cdot 125^2}(9\sin^2(20t) - 24\sin(20t)\cos(20t) + 16\cos^2(20t)) && (23) \\ &= \frac{1}{2 \cdot 125^2}(9 - 12\sin(40t) + 7\cos^2(20t)) J. && (24) \end{aligned}$$





Questão 3

Resolva a questão 1 supondo que a força eletromotriz seja $\mathcal{E} = \sin(10t)$ (em Volts).

Utilizando a já citada solução do circuito,

$$z_0 = \frac{\mathcal{E}_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega/\tau)}{L[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau^2]}. \tag{25}$$

Veja que, com $\omega = 10/s$, o circuito está em ressonância. Assim, a diferença $\omega_0^2 - \omega^2 = 0$. z_0 se torna então

$$z_0 = \frac{-i200}{4 \cdot 10^4} \tag{26}$$

$$= -i\frac{1}{2 \cdot 10^2}. \tag{27}$$

Para encontrar a carga $q(t)$, uma vez que a fonte agora é $\sin(10t)$, precisamos tomar a parte **imaginária** de $z(t)$.

$$z(t) = -i5 \cdot 10^{-3} e^{i10t} \tag{28}$$
$$q(t) = 5\cos(10t) mC. \tag{29}$$

Para encontrar as condições iniciais, basta impor $Q(0) = q(0)$, $I(0) = \dot{q}(0)$.

$$Q(0) = 5mC \tag{30}$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -50\sin(10t) mA \tag{31}$$
$$I(0) = 0. \tag{32}$$

Questão 4

O par de elementos na figura 2 é alimentado por uma força eletromotriz com frequência ω. Encontre a impedância equivalente. *Sugestão: imagine que a fonte de tensão $\mathcal{E}$ está ligada diretamente ao par, um dos polos no terminal de cima e outro no de baixo. Divida a corrente em duas parcelas, uma através do resistor e a outra através do capacitor. A impedância do par é a razão entre a força eletromotriz na forma complexa e a corrente u.*

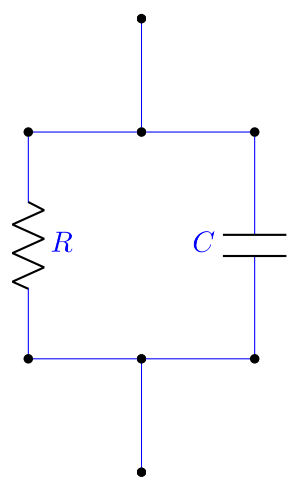


Figura 2: Questões 3 e 4.

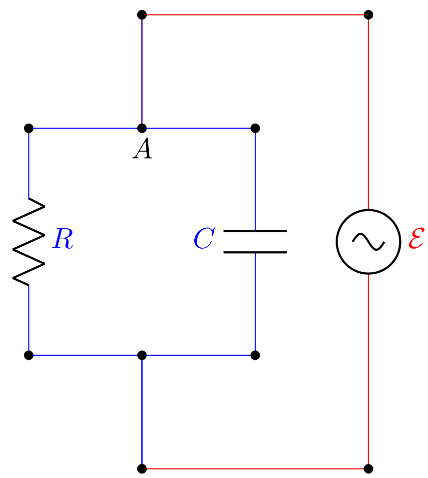
Se desenharmos a força eletromotriz no circuito, temos

Veja, então, que podemos separar a corrente que chega em A, denominada I_1, em I_2 e I_3, que saem cada uma para um lado da malha. Temos então duas equações além da equação das correntes:

$$RI_2 = \mathcal{E} \tag{33}$$
$$\frac{Q}{C} = \mathcal{E}. \tag{34}$$

A segunda equação, derivada no tempo, nos dá a expressão

$$\frac{I_3}{C} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}. \tag{35}$$



Evidentemente, podemos substituir $I_j \to u_j$ e $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$. Isso nos dá as equações

$$\begin{cases} R u_2 = \mathcal{E} \\ \frac{u_3}{C} = i\omega\mathcal{E} \end{cases} \tag{36}$$

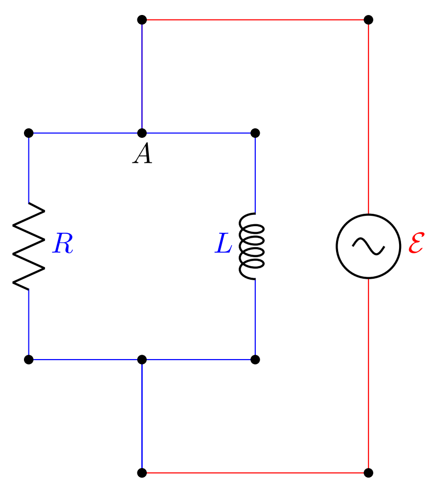
$$\begin{cases} u_2 = \frac{\mathcal{E}}{R} \\ u_3 = i\omega C\mathcal{E} \end{cases} \tag{37}$$

$$\frac{u_1}{\mathcal{E}} = \frac{1}{R} + i\omega C. \tag{38}$$

A razão $u_1/\mathcal{E}$ é a impedância equivalente do sistema, e vemos que também pode ser calculada como a "resistência equivalente" para dois resistores em paralelo, mas ao invés da resistência, usamos a impedância.

Questão 5

Repita o problema 4 para um indutor L no lugar do capacitor.



As equações, incluso o nó $u_1 = u_2 + u_3$, são

$$Ru_2 = \mathcal{E} \tag{39}$$

$$L\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} = \mathcal{E}. \tag{40}$$

Considerando o mesmo $\mathcal{E}$ da questão 4, a segunda equação pode ser integrada resultando em

$$Lu_3 = \frac{\mathcal{E}}{i\omega}. \tag{41}$$

Assim, nosso sistema de equações se torna

$$Ru_2 = \mathcal{E} \tag{42}$$

$$Lu_3 = \frac{\mathcal{E}}{i\omega} \tag{43}$$

$$\frac{u_1}{\mathcal{E}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}, \tag{44}$$

mesma conclusão do exercício 4.

Questão 6

Para que valor tende a impedância equivalente na figura 2 quando $\omega \to 0$? Discuta fisicamente a resposta. Repita para o enunciado da questão 5.

Para $\omega \to 0$, a impedância do capacitor diverge. Isso quer dizer que a solução estacionária para uma bateria de corrente contínua (pois $\omega \to 0$ quer dizer que ela não oscila) é a corrente ser totalmente dissipada. Para o caso do indutor, sua impedância vai a zero, e a solução estacionária é a Lei de Ohm.

Questão 7

Para simplificar, os ramos da esquerda e da direita do circuito na figura 3 são iguais, mas você deve resolver a questão sem explorar essa simetria. Combine o procedimento explicado em aula com as leis de Kirchoff para encontrar a corrente em cada ramo.

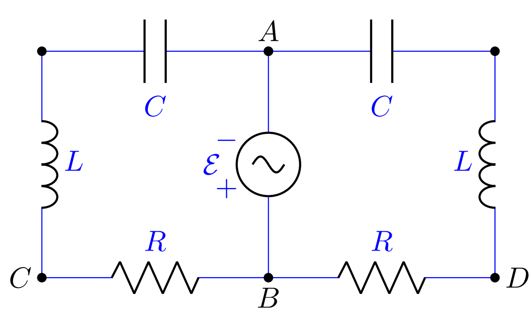


Figura 3: Questões 7-9.

Aqui, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$. Vamos supor que a corrente u_1 segue para baixo entre A e B, a corrente u_2 segue para a esquerda entre B e C e a corrente u_3 segue para a direita entre B e D. Considerando isso, a lei dos nós nos diz que

$$u_1 = u_2 + u_3. \tag{45}$$

Ambas as malhas podem ter suas equações escritas como

$$L\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} + Ru_j + \frac{z_j}{C} = \mathcal{E}. \tag{46}$$

Tomando a primeira derivada temporal da equação, e considerando $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$, a expressão se torna

$$L\frac{\mathrm{d}^2u_j}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} + \frac{u_j}{C} = i\omega\mathcal{E}. \tag{47}$$

As correntes I_j são obtidas tomando a parte real de $\mathcal{E}$. A solução para u_j é a mesma usada no primeiro exercício, multiplicada por um fator $i\omega$.

$$u_j = \frac{i\omega\mathcal{E}_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega/\tau)}{L[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau^2]}e^{i\omega t}. \tag{48}$$

Como ambos os lados do circuito têm os componentes de mesmo valor, ambas as correntes u_j são iguais. Então, para ambas as malhas,

$$u = \frac{i\omega\mathcal{E}_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega/\tau)}{L[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau^2]}e^{i\omega t} \tag{49}$$

$$I = \frac{\omega\mathcal{E}_0}{L[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau^2]}[(-\omega_0^2 + \omega^2)\sin(\omega t) + (2\omega/\tau)\cos(\omega t)]. \tag{50}$$

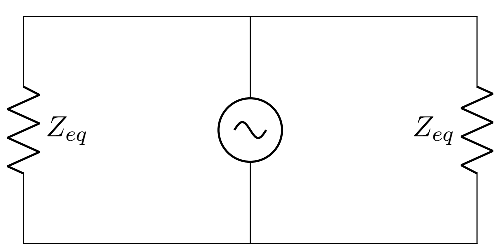
Questão 8

Combine os elementos resistivos e reativos da figura 3 para reduzir o circuito a uma única impedância ligada à fonte de tensão. Calcule a corrente através da fonte e compare com o resultado da questão 7.

Considerando os elementos reativos e resistivos, a impedância de cada um dos lados do circuito é a soma das impedâncias de cada elemento daquele lado, já que são elementos em série. Assim,

$$Z_{eq} = R + Z_C + Z_L \tag{51}$$

$$= R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L. \tag{52}$$



São basicamente dois resistores em paralelo, e então a impedância final se torna

$$\frac{1}{Z} = \frac{2}{Z_{eq}}. \tag{53}$$

Assim, a corrente u pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\mathcal{E}}{Z} && (54)\\
&= 2\frac{\mathcal{E}}{Z_{eq}} && (55)\\
&= 2\frac{\mathcal{E}}{R + i(\omega L - 1/\omega C)} && (56)\\
&= 2\frac{\mathcal{E}(R - i(\omega L - 1/\omega C))}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} && (57)\\
&= 2\frac{\mathcal{E}(R - i(\omega L - 1/\omega C))}{R^2 + [L(\omega^2 - 1/LC)/\omega]^2} && (58)\\
&= 2\frac{\mathcal{E}(R - i(\omega L - 1/\omega C))}{R^2 + L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2/\omega^2} && (59)\\
&= 2\frac{\mathcal{E}\omega^2(R - i(\omega L - 1/\omega C))}{L^2[\omega^2 R^2/L^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2]} && (60)\\
&= 2\frac{\mathcal{E}\omega(R\omega/L - i(\omega^2 - 1/LC))}{L[4\omega^2/\tau^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2]} && (61)\\
&= 2\frac{i\omega\mathcal{E}_0(-i2\omega/\tau - \omega^2 + \omega_0^2)}{L[4\omega^2/\tau^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2]}e^{i\omega t}, && (62)
\end{aligned}
$$

duas vezes maior que o resultado anterior (obviamente que aqui estamos considerando a corrente que passa pela fonte, que é a soma das correntes -iguais- das duas malhas).

Questão 9

Suponha que a frequência na figura 3 seja $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Qual é a potência média dissipada no circuito?

A potência pode ser calculada por

$$
P = R_{eq}I^2, \tag{63}
$$

onde $I = \Re u$ é a corrente encontrada no exercício anterior e Z é a impedância equivalente total. Na ressonância, $\omega = \omega_0$ e $Z = R/2$. Então, u é

$$
\begin{aligned}
u &= 2\frac{i\omega\mathcal{E}_0(-i2\omega/\tau)}{4\omega^2 L/\tau^2}e^{i\omega t} && (64)\\
&= \frac{\mathcal{E}_0}{L/\tau}e^{i\omega t} = \frac{\mathcal{E}_0\tau}{L}e^{i\omega t} = \frac{2\mathcal{E}_0}{R}e^{i\omega t} && (65)\\
R_{eq}I^2 &= R\frac{4\mathcal{E}_0^2}{2R^2}\cos^2(\omega t) && (66)\\
&= \frac{2\mathcal{E}_0^2}{R}\cos^2(\omega t) && (67)\\
& && (68)
\end{aligned}
$$

Podemos calcular a média fazendo

$$\langle P\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} dt' P(t') \tag{69}$$

$$= \frac{2\mathcal{E}_0^2}{R}\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t)dt \tag{70}$$

$$= \frac{2\mathcal{E}_0^2}{R}\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt. \tag{71}$$

O segundo termo da integral claramente é nulo, por que é um cosseno sendo integrado em (duas vezes) seu período. Então, resta apenas o $1/2$ na integração.

$$\langle P\rangle = \frac{2\mathcal{E}_0^2}{R}\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt \tag{72}$$

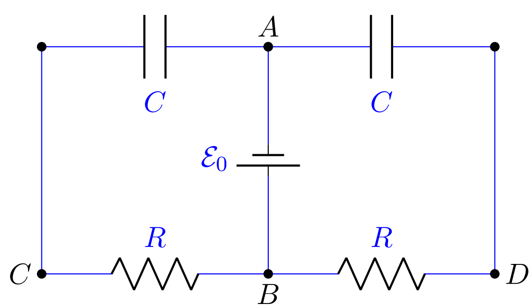
$$= \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\frac{\omega}{2\pi}\frac{2\pi}{\omega} \tag{73}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}. \tag{74}$$

Questão 10

No limite $\omega \to 0$, a fonte de tensão da figura 3 é equivalente a uma bateria com voltagem $\mathcal{E}_0$. Examine a impedância de cada elemento e substitua aqueles que tiverem impedância zero por um fio condutor para obter um circuito equivalente mais simples. Encontre a carga e a corrente nesse circuito, no regime estacionário, e compare com o limite $\omega \to 0$ da resposta à questão 7.

Substituiremos a fonte de tensão por uma bateria de voltagem $\mathcal{E}_0$, de forma que a impedância do indutor seja nula. Resta analisar o circuito da figura abaixo:



No regime estacionário, ainda podemos utilizar o método das impedâncias, e no fim utilizar o limite $\omega \to 0$. Basicamente, são duas malhas iguais com impedâncias Z em série:

$$Z = R - \frac{i}{\omega C}. \tag{75}$$

Para cada uma das malhas, a expressão para a corrente (complexa) é dada por

$$Zu = \mathcal{E}_0 \tag{76}$$

$$u = \frac{\mathcal{E}_0}{R - i/\omega C} \tag{77}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0\omega}{\omega R - i/C}. \tag{78}$$

Quando tomamos o limite citado, o denominador vai para uma constante, mas o numerador vai para 0; assim, com $\omega \to 0$, $u \to 0 \implies I \to 0$, mesmo resultado obtido a partir do limite da resposta à questão 7. A carga (complexa) é obtida dividindo u por $i\omega$.

$$z = \frac{1}{i\omega} \frac{\mathcal{E}_0 \omega}{\omega R - i/C} \tag{79}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0}{i\omega R + 1/C} \tag{80}$$

$$\lim_{\omega \to 0} z = C\mathcal{E}_0 = Q, \tag{81}$$

como esperado também.