MAT0234 Medida e integração
IME-USP segundo semestre 2020
Medida Completa

Durante a aula 7 (dia 22 de setembro), vimos o que era uma medida completa. Uma medida $\mu\ \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ se diz **completa**, se dado
$E \in \mathcal{A},\ com\ \mu(E) = 0\ ento\ \mu(F)\ \forall\ F \subseteq E.$
Note que isto significa que $F \in \mathcal{A}$.
Os exercícios 13 e 15 da Lista de Medida mostram dois modos de completar uma medida dada. Ou seja, dada uma medida λ definida em $\mathcal{A}$ sempre é possível estendé-la a uma medida completa $\bar{\lambda}$ definida numa σ-álgebra $\bar{\mathcal{A}}$ que contém $\mathcal{A}$.
Na aula 7 resolvemos o Exercício 15 para o caso em que μ fosse finita.
Completar uma medida trará mais conjuntos onde integrar e mais funções mensuráveis.
Os Borelianos $\mathcal{B}$ não são completos, e seu completamento $\bar{\mathcal{B}}$ denominam-se os conjuntos de Lebesgue.
Mais adiante veremos que o completamento dos Borelianos em R muda o Cardinal da σ-álgebra! Ou seja, acrescentamos MUITOS conjuntos à σ-álgebra. Em geral trabalharemos supondo que temos uma medida completa. Em outro caso, isto será explicitado.

1. Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de conjuntos de X associada à medida μ, σ-aditiva. Considere a classe $\mathcal{B}$, dada pelos $E \subset X$ tais que $E \in \mathcal{B}$ se $\exists C, D \in \mathcal{A}$ com $C \subset E \subset D$ e $\mu(C) = \mu(D)$. Neste caso definimos $\bar{\mu}(E) = \mu(C) = \mu(D)$. Mostre que $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra e $\bar{\mu}$ é uma medida σ-aditiva sobre $\mathcal{B}$.
Solução: (para o caso em que μ é finita)

1. Se $E \in \mathcal{B}$ então $E^c \in \mathcal{B}$. Com efeito existem $C, D \in \mathcal{A}$ com $C \subset E \subset D,\ com\ \mu(C) = \mu(D)$. Logo $C^c \supset E^c \supset D^c,\ com\ \mu(C^c) = \mu(D^c)$ se a medida for finita.

2. Se $E_j \in \mathcal{B}$ então $\cup_1^{+\infty} E_j \in \mathcal{B}$. Existem $C_j, D_j \in \mathcal{A}$ com $C_j \subset E_j \subset D_j,\ com\ \mu(C_j) = \mu(D_j)$. Logo $\cup_1^{+\infty} C_j \subset \cup_1^{+\infty} E_j \subset \cup_1^{+\infty} D_j$. Note que $\mu(D_j - C_j) = 0$ e que $\cup_1^{+\infty} D_j - \cup_1^{+\infty} C_j \subseteq \cup_1^{+\infty} (D_j - C_j)$ com $\mu(\cup_1^{+\infty} (D_j - C_j)) \leq \sum_1^{+\infty} \mu(D_j - C_j) = 0$. Assim, $\mu(\cup_1^{+\infty} D_j) + \mu(\cup_1^{+\infty} C_j)$.

3. μ é σ-aditiva. Se $E_j \in \mathcal{B}$ disjuntos 2 a 2, então existem $C_j, D_j \in \mathcal{A}$ com $C_j \subset E_j \subset D_j,\ e\ \mu(C_j) = \mu(D_j)$. Os C_j são disjuntos 2 a 2. Logo $\mu(\cup_1^{+\infty} C_j) = \sum_1^{+\infty} \mu(C_j) = \sum_1^{+\infty} \mu(E_j) = \sum_1^{+\infty} \mu(D_j) \geq \mu(\cup_1^{+\infty} (D_j))$. Como $\cup_1^{+\infty} C_j \subseteq \cup_1^{+\infty} D_j$ segue o resultado.
   O caso geral segue imediatamente, considerando quando algum conjunto pode ter medida infinita.