2020-2, "FISMAT-AV", AULAS 13 E 14

OBJETIVOS: CONTINUAR A DISCUSSÃO DE PROPRIEDADES DE DISTRIBUIÇÕES, COMO MUDANÇAS DE VARIÁVEIS

(CONT.) 2.6 PROPRIEDADES DE DISTRIBUIÇÕES

(CONT.) → DERIVADA DE FUNÇÃO DESCONTÍNUA

VAMOS VER UMA FORMA ALTERNATIVA DE MOSTRAR QUE A DERIVADA f' DE UMA DISTRIBUIÇÃO f ASSOCIADA À FUNÇÃO SECCIONALMENTE DIFERENCIÁVEL f É

$$f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^{(0)} \cdot \delta(x-a_i) .$$

DISTRIBUIÇÕES DISTINTAS!

$$\langle f', h \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, h(x)\, dx = \qquad \boxed{\forall \varepsilon > 0} \; ?$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^{a_1-\varepsilon} + \int_{a_1-\varepsilon}^{a_1+\varepsilon} + \int_{a_1+\varepsilon}^{a_2-\varepsilon} + \dots + \right.$$

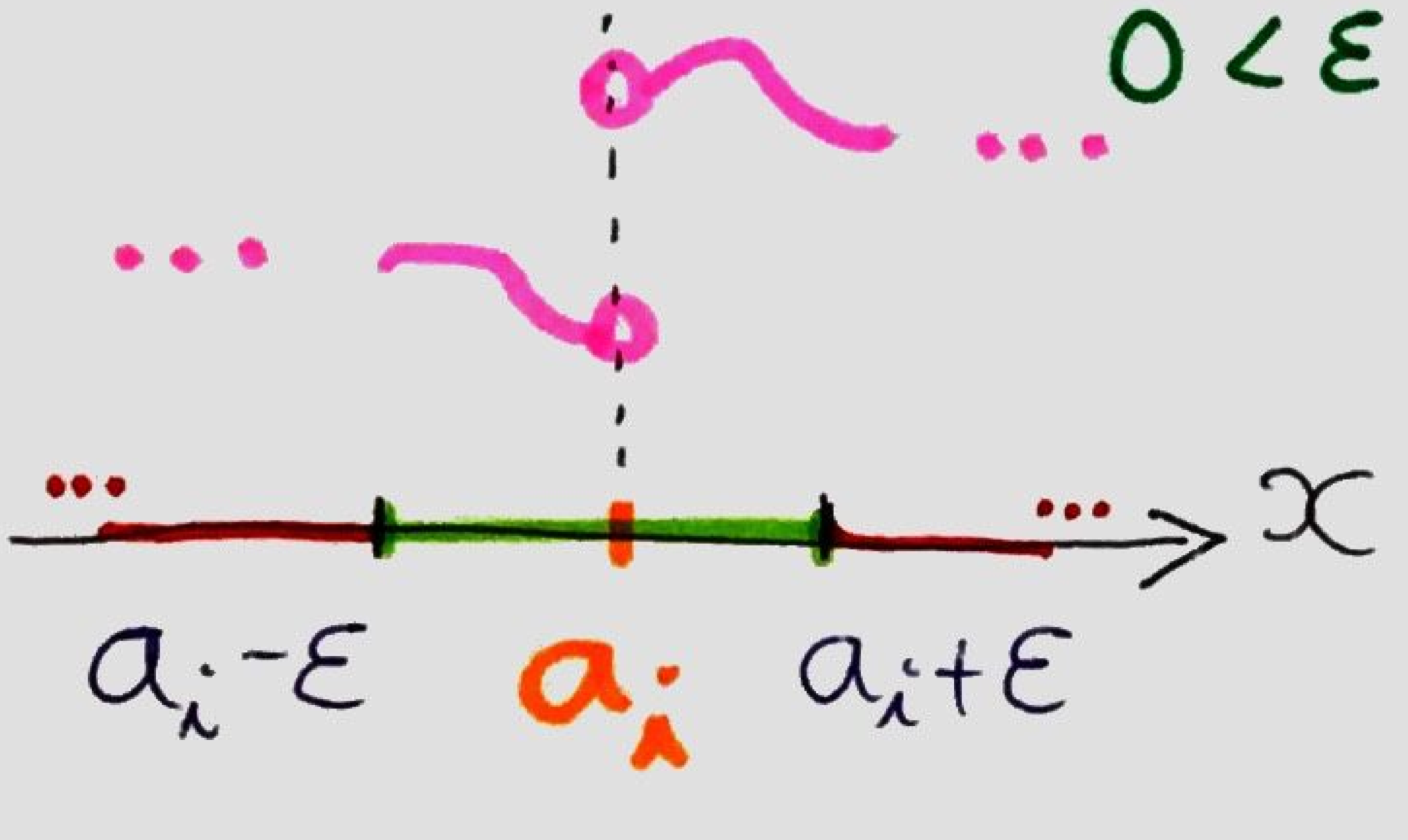
$$+ \int_{a_{i-1}+\varepsilon}^{a_i-\varepsilon} + \int_{a_i-\varepsilon}^{a_i+\varepsilon} + \int_{a_i+\varepsilon}^{a_{i+1}-\varepsilon} + \dots +$$

$$\left. + \int_{a_{N-1}+\varepsilon}^{a_N-\varepsilon} + \int_{a_N-\varepsilon}^{a_N+\varepsilon} + \int_{a_N+\varepsilon}^{+\infty} \right\} f'(x)\, h(x)\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \int_{a_{i-1}+\varepsilon}^{a_i-\varepsilon} + \int_{a_i-\varepsilon}^{a_i+\varepsilon} + \int_{a_i+\varepsilon}^{a_{i+1}-\varepsilon} \right\} f'(x)\, h(x)\, dx,$$

SE $a_0 \equiv -\infty$ E $a_{N+1} \equiv +\infty$.

$0 < \varepsilon < \min_i (a_i - a_{i-1})$



$$\langle f', h \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle f', h \rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{i=1}^{N} \left\{ \int_{a_{i-1}+\varepsilon}^{a_i-\varepsilon} + \int_{a_i+\varepsilon}^{a_{i+1}-\varepsilon} \right\} f'(x) h(x)\, dx +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i-\varepsilon}^{a_i+\varepsilon} f'(x) h(x)\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}-\Omega} f'(x) h(x)\, dx \ +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \left[f(x) h(x) \right]_{a_i-\varepsilon}^{a_i+\varepsilon} - \int_{a_i-\varepsilon}^{a_i+\varepsilon} f(x) h'(x)\, dx \right\} =$$

$$= \langle \{f'\}, h \rangle + \sum_{i=1}^{N} \left\{ \overbrace{\left[f(a_i^+) - f(a_i^-) \right]}^{\sigma_i^{(0)}} \underbrace{h(a_i)}_{\langle \delta(x-a_i),\, h \rangle} - 0 \right\}$$

$$\therefore \langle f', h \rangle = \langle \{f'\} + \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^{(0)} \cdot \delta(x-a_i)\, ,\, h \rangle .$$

→ MUDANÇA DE VARIÁVEL EM UMA DISTRIBUIÇÃO

NOTE QUE, MESMO HEURISTICAMENTE, $\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$ NÃO FAZ SENTIDO: $\delta(2x)$ SERIA "IGUAL", MAS $\int \delta(2x) h(x) dx = \frac{1}{2} h(0)$. ESCALA!

SEJA f UMA FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NO SENTIDO USUAL. SE f FOR BIJETORA (E, PORTANTO, INVERSÍVEL) VEREMOS COMO DEFINIR UMA NOVA DISTRIBUIÇÃO $T \circ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ A PARTIR DE $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. AO FINAL, DAREMOS SENTIDO A $\boxed{\delta(f(x))}$ MESMO QUANDO f NÃO FOR BIJETORA, EMBORA AINDA SUJEITA A CERTAS CONDIÇÕES.

COMO SEMPRE, NOS MOTIVAMOS COM O CASO <u>REGULAR</u>. SE g FOR UMA FLI ASSOCIADA A UMA DIST. <u>REGULAR</u> T, $\langle T, h \rangle = \int g(x) h(x) dx$. ORA,

$$\langle g\circ f, h\rangle = \overset{\text{FLI}}{\int} (g\circ f)(x)\, h(x)\, dx =$$

$$= \int g(f(x))\, h(x)\, dx$$

$$= \int g(y)\, h(f^{-1}(y))\, \frac{dy}{|f'(f^{-1}(y))|}$$

POIS $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ E

$dx = \left|\frac{dx}{dy}\right| \cdot dy$. VER RODAPÉ!

ENTÃO $\langle g\circ f, h\rangle = \int \frac{g(y)}{|f'\circ f^{-1}(y)|}\, h\circ f^{-1}(y)\, dy$

E DEFINIMOS, PARA QUALQUER $T \in \mathcal{D}'$,

$$\boxed{\langle T\circ f, h\rangle \equiv \left\langle \frac{T}{|f'\circ f^{-1}|}, h\circ f^{-1} \right\rangle}.$$

$$y = f(f^{-1}(y)) \underset{\text{CADEIA}}{\overset{d/dy}{\Longrightarrow}} 1 = f'(f^{-1}(y)) \cdot \underbrace{\frac{d}{dy} f^{-1}(y)}_{\frac{dx}{dy}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

SE T FOR A DELTA DE DIRAC,

$$\boxed{\left\langle \delta(f(x)), h \right\rangle = \dfrac{h(f^{-1}(0))}{|f'(f^{-1}(0))|}} = \left\langle \frac{\delta}{|f' \circ f^{-1}|}, h \circ f^{-1} \right\rangle$$

E ESCREVEMOS

$$\boxed{\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(y_0)|}\,\delta(y-y_0)},$$

EVITA MENÇÃO A f^{-1}.

ONDE y_0 É O ÚNICO REAL TAL QUE

$\boxed{f(y_0) = 0}$ E $\boxed{f'(y_0) \neq 0}$. CONDIÇÃO "EXTRA", BIJETIVIDADE NÃO BASTA!

◇ EXEMPLO: PARA QUALQUER $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\int \delta(x^3-1) \cdot h(x)\,dx =$$

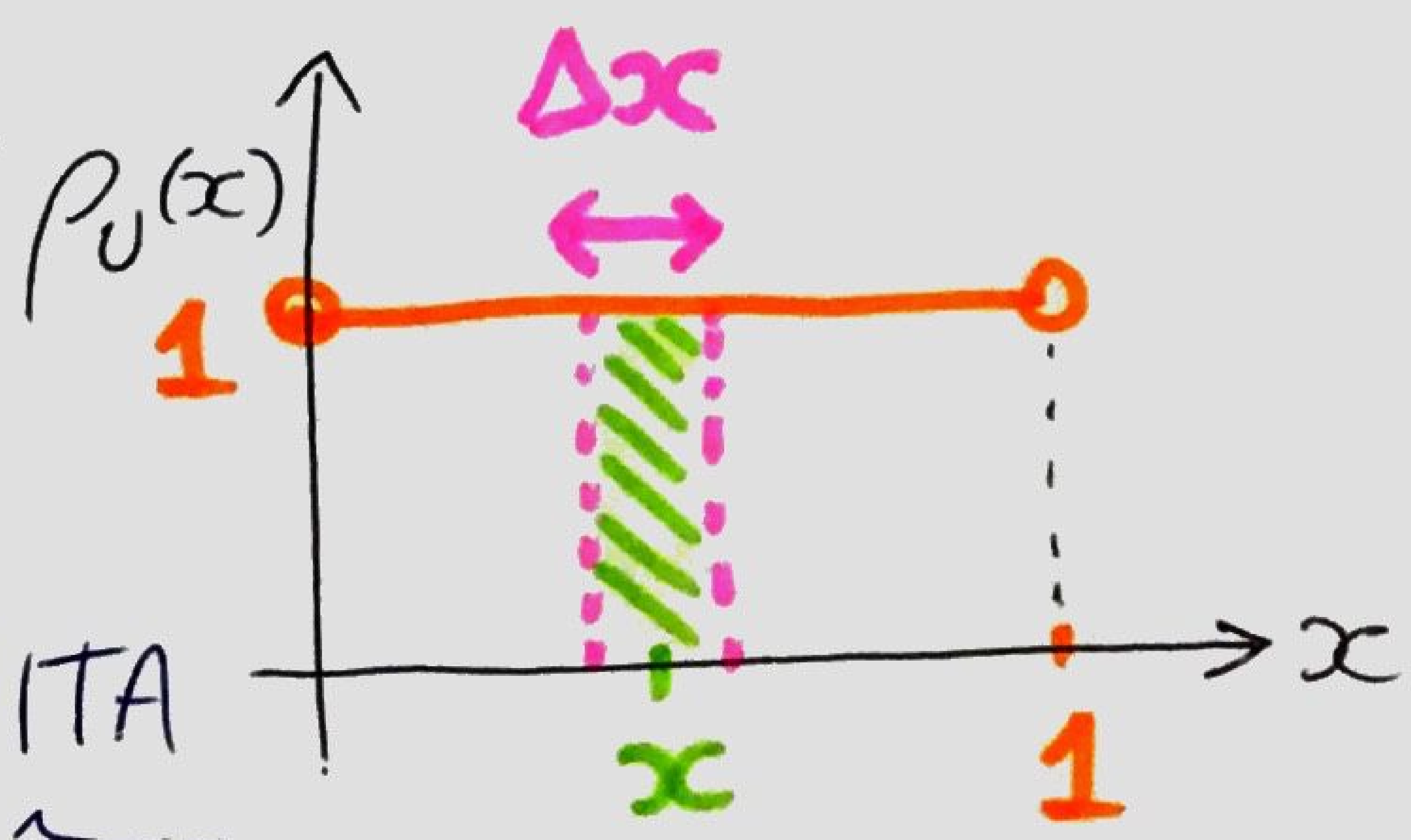
$$= \int \frac{\delta(y-1)}{|[3x^2]_{x=1}|}\,h(y)\,dy = \frac{1}{3}h(1),$$

POIS $f(x) = x^3 - 1$, $f(1) = 0$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(1) \neq 0$ E $f(x) \neq 0$ SE $x \neq 1$. ◇

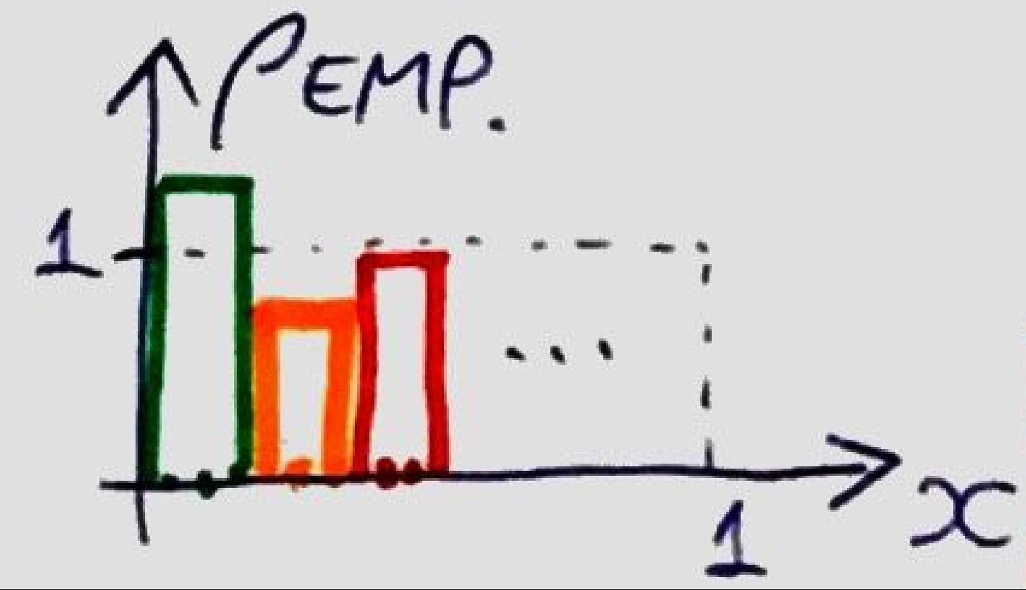
◇ EXEMPLO ESTENDIDO: HÁ VARIAÇÕES IMPORTANTES, NA PRÁTICA.

UMA <u>VARIÁVEL ALEATÓRIA</u>(V.A.) UNIFORME EM (0,1) É UMA CONSTRUÇÃO MATEMÁTICA QUE PODE LEVAR A ALGORITMOS QUE GERAM NÚMEROS (PSEUDO-)ALEATÓRIOS. A <u>DENSIDADE DE PROBABILIDADE</u> ASSOCIADA É $\rho_U(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in (0,1) \\ 0, & \text{SE } x \notin (0,1) \end{cases}$.

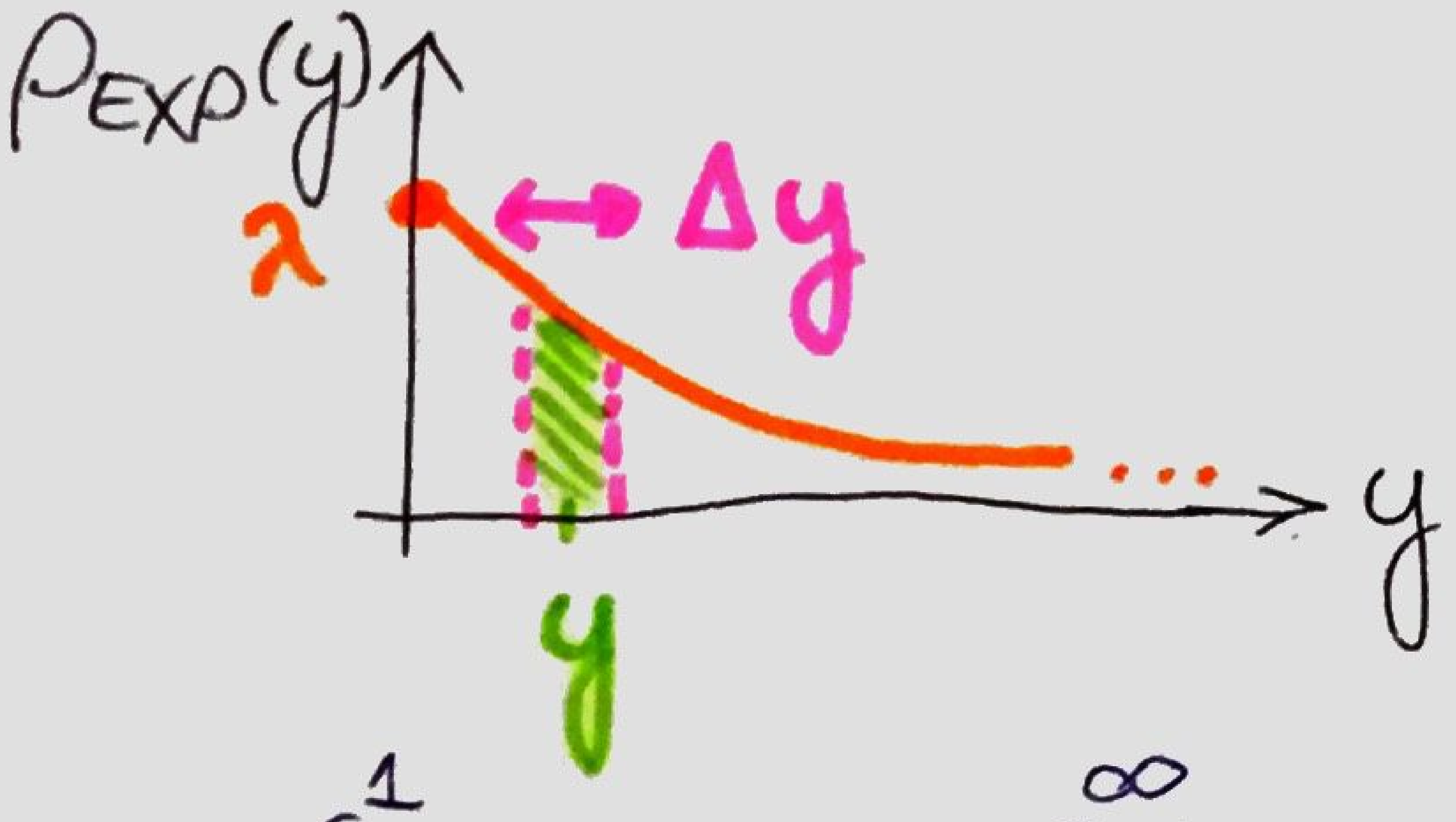
$\rho_U(x) \cdot \Delta x$ É A PROBALIDADE DE TAL V.A. "REALIZAR" UMA OCORRÊNCIA ENTRE $x - \frac{\Delta x}{2}$ E $x + \frac{\Delta x}{2}$.



"EMPIRICAMENTE", UMA SEQUÊNCIA FINITA DE TAIS REALIZAÇÕES INDUZ UM "HISTOGRAMA APROXIMADO". ⟶



IMAGINE, AGORA, A SEQUÊNCIA NUMÉRICA TRANSFORMADA $\{y_i\}_{i=1,\ldots,N}$ ONDE CADA $\boxed{y_i = -\frac{1}{\lambda}\log x_i}$ $\lambda > 0$ É OBTIDO A PARTIR DO ELEMENTO x_i DA SEQUÊNCIA $\{x_i\}$ DE NÚMEROS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDOS EM $(0,1)$. PARA N "GRANDE" E Δy "PEQUENO", $\rho_{EXP}(y)\Delta y$ É A PROBABILIDADE DE ALGUM y_i ENTRE $y - \frac{\Delta y}{2}$ E $y + \frac{\Delta y}{2}$ "REALIZAR-SE".



QUEM É $\rho_{EXP}(y)$???

$$1 = \int_0^1 dx\, \rho_U(x) = \int_0^\infty dy\, \rho_{EXP}(y), \quad \text{MAS}$$

$$\rho_{EXP}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \delta\left(y + \frac{1}{\lambda}\log x\right)\rho_U(x) =$$

"NA MÃO"

$$= \int_0^1 dx\, \delta\Big(\underbrace{y + \tfrac{1}{\lambda}\log x}_{= f(x)}\Big).$$

$$f(x) = y + \frac{1}{\lambda}\log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\lambda x}$$

$$\Updownarrow$$

$$f^{-1}(x) = e^{\lambda(x-y)}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = e^{-\lambda y}$$

$$f'(e^{-\lambda y}) \neq 0$$

ASSIM,

$$\delta\left(y + \frac{1}{\lambda}\log x\right) = \frac{1}{\left|\dfrac{1}{\lambda e^{-\lambda y}}\right|}\,\delta(z - e^{-\lambda y}) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda y}\,\delta(z - e^{-\lambda y}) \quad \text{E}$$

$$\rho_{EXP}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\delta\left(y + \frac{1}{\lambda}\log x\right)\rho_U(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dz\left[\lambda e^{-\lambda y}\,\delta(z - e^{-\lambda y})\right]\rho_U(z) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda y}, \text{ SE } y > 0.$$

◇