Departamento de Física Aplicada
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

MECÂNICA (4310192) - 2020/2
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
RESOLUÇÃO DA LISTA DE EXERCÍCIOS 2

22 de Setembro de 2020

Professor: Gustavo Paganini Canal
Monitor: Fábio Camilo de Souza

Questões conceituais

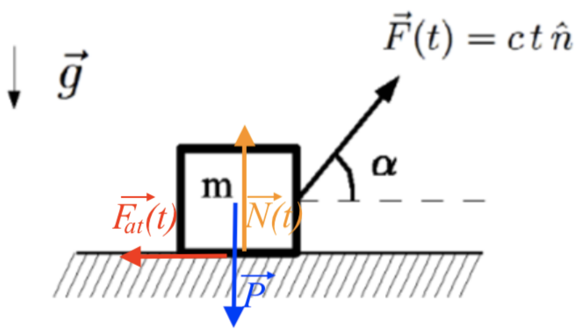
17. Sendo N o módulo da força normal, $\mu_{e,d}$ o coeficiente de atrito estático e dinâmico.
O repouso e ausência de forças externas na caixa (a) indica que $f_a = 0$.
A caixa (b) a ponto de deslizar indica que $f_b = \mu_e N$.
A caixa (c) em movimento, mesmo que acelerado, indica que $f_c = \mu_d N$
A caixa (d) em movimento constante, indica que $f_d = \mu_d N$
A caixa (e) em movimento diminuindo, indica que $f_e = \mu_d N$
Dado que o atrito estático é maior que o dinâmico, chegamos a alternativa (d) correta.

18. Por conta do movimento circular e a necessidade de uma força centrípeta $\vec{F}_c = \vec{P} + \vec{N}$, a correta é a alternativa (d) $\vec{N} < \vec{P}$.

19. (a) Falsa, pois $\vec{F}_{2(1)}$ atuará sobre o bloco de 2 e de 10 kg.
(b) Verdadeira, pois se trata da soma total das massas.
(c) Verdadeira pois é a única massa acelerada por $\vec{F}_{3(2)}$.
(d) Verdadeira pois não há nenhuma força adicional para os blocos da direita.
(e) Considerando as forças $|\vec{F}| = 17|\vec{a}|$, $|\vec{F}_{2(1)}| = 12|\vec{a}|$ e $|\vec{F}_{3(2)}| = 10|\vec{a}|$. Concluímos que a afimação é verdadeira.

Problemas

20. (a)



$$\vec{F} = ct\cos\alpha\,\hat{\imath} + ct\sin\alpha\,\hat{\jmath}$$
$$\vec{P} = -mg\,\hat{\jmath}$$
$$\vec{N}(t) = \begin{cases} (mg - ct\sin\alpha)\,\hat{\jmath} & 0 \leqslant t < t_p \\ 0 & t \geqslant t_p \end{cases}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{at}}(t) = \begin{cases} -ct\cos\alpha\hat{\boldsymbol{\imath}} & 0 \leqslant t < t_m \\ -(mg - ct\sin\alpha)\mu_c\hat{\boldsymbol{\imath}} & t_m \leqslant t < t_p \\ 0 & t \geqslant t_p \end{cases}$$

b) t_m é dado pelo tempo cujo a força horizontal supera a força máxima de atrito estático:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{at}} = -ct\cos\alpha\hat{\boldsymbol{\imath}} = -\mu_e N\hat{\boldsymbol{\imath}} = -\mu_e(mg - ct\sin\alpha)\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

$$ct_m\cos\alpha = \mu_e mg - \mu_e ct_m\sin\alpha$$

Portanto $t_m = \frac{\mu_e mg}{c(\mu_e\sin\alpha+\cos\alpha)}$.

O instante t_p é dado pelo tempo cujo a força vertical supera a força peso: $c\,t_p\sin\alpha = mg$
Portanto $t_p = \frac{mg}{c\sin\alpha}$

(c) No período $0 \leqslant t < t_m$ o bloco não se movimenta, pois somatória das forças é nula. No período $t_m \leqslant t < t_p$, temos que a força total vertical é 0, já a força total horizontal é dada por:

$$F_{tot,i} = ma(t) = ct\cos\alpha - (mg - ct\sin\alpha)\mu_c \Rightarrow$$
$$a(t) = t\frac{c(\cos\alpha + \mu_c\sin\alpha)}{m} - g\mu_c$$

Partindo de $v(t_m) = 0$, temos que:

$$v(t) = t^2\frac{c(\cos\alpha + \mu_c\sin\alpha)}{2m} - gt\mu_c + A$$

$$v(t_m) = t_m^2\frac{c(\cos\alpha + \mu_c\sin\alpha)}{2m} - gt_m\mu_c + A = 0 \Rightarrow A = -t_m^2\frac{c(\cos\alpha + \mu_c\sin\alpha)}{2m} + gt_m\mu_c$$
$$v(t_p) = t_p^2\frac{c(\cos\alpha + \mu_c\sin\alpha)}{2m} - gt_p\mu_c - t_m^2\frac{c(\cos\alpha + \mu_c\sin\alpha)}{2m} + gt_m\mu_c$$

Como estamos tratando apenas da direção horizontal:

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t_p}) = \left[(t_p^2 - t_m^2)\frac{c(\cos\alpha + \mu_c\sin\alpha)}{2m} - (t_p - t_m)g\mu_c\right]\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Para a posição, integrando a velocidade:

$$r(t) = t^3\frac{c(\cos\alpha + \mu_c\sin\alpha)}{6m} - g\mu_c\frac{t^2}{2} + At + B$$

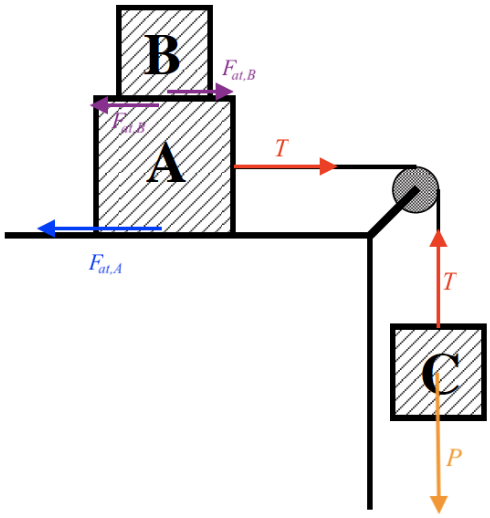
$$r(t_m) = t_m^3 \frac{c(\cos\alpha + \mu_c \sin\alpha)}{6m} - g\mu_c \frac{t_m^2}{2} + At_m + B = 0 \Rightarrow B = -t_m^3 \frac{c(\cos\alpha + \mu_c \sin\alpha)}{6m} + g\mu_c \frac{t_m^2}{2} - At_m$$

$$r(t) = (t^3 - t_m^3)\frac{c(\cos\alpha + \mu_c \sin\alpha)}{6m} - (t^2 - t_m^2)\frac{g\mu_c}{2} + (t - t_m)A$$

$$r(t) = (t^3 - t_m^3)\frac{c(\cos\alpha + \mu_c \sin\alpha)}{6m} - (t^2 - t_m^2)\frac{g\mu_c}{2} + \left[-t_m^2 \frac{c(\cos\alpha + \mu_c \sin\alpha)}{2m} + g t_m \mu_c\right](t - t_m)$$

$$\boldsymbol{\vec{r}(t_p)} = \left\{(t_p^3 - t_m^3)\frac{c(\cos\alpha + \mu_c \sin\alpha)}{6m} - (t_p^2 - t_m^2)\frac{g\mu_c}{2} + \left[-t_m^2 \frac{c(\cos\alpha + \mu_c \sin\alpha)}{2m} + g t_m \mu_c\right](t_p - t_m)\right\}\boldsymbol{\hat{\imath}}$$

21.



Seguindo o diagrama das forças, o peso e a normal dos blocos A e B foram omitidos pois se cancelam, a massa m_C máxima para que o sistema se movimente em conjunto é tal que a força de atrito sobre o bloco B, $F_{at,B}$ seja a maior possível, portanto:

$$m_B a = F_{at,B} = \mu_e m_b g \Rightarrow a = g\mu_e$$

As forças peso e tração atuantes no bloco C, provocam a aceleração de acordo com:

$$m_C a = m_c g - T \Rightarrow T = (g-a)m_C \Rightarrow T = (1-\mu_e)g m_C$$

As forças T, $F_{at,A}$ e $F_{at,B}$, podemos escrever:

$$m_A a = T - F_{at,A} - F_{at,B}$$

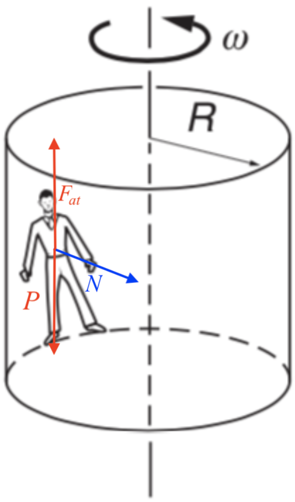
sendo $F_{at,A} = (m_A + m_B)g\mu_c$, portanto substituindo os valores conhecidos de T e a, obtemos:

$$m_A g\mu_e = (1-\mu_e)g m_C - m_B g\mu_e - (m_A + m_B)g\mu_c$$

após um pouco de álgebra, a maior valor possível para m_C é dado por:

$$m_C = \frac{(m_A + m_B)(\mu_e + \mu_c)}{g(1-\mu_e)}$$

22. a)



A normal N atua como força centrípeta e é a resultante das forças sobre a pessoa, a força de atrito F_{at} é de igual em módulo com o peso P, fazendo com que se cancelem e a pessoa não caia.

b) A força de atrito, e o peso, se relacionam com a normal de acordo com:$P = F_{at} = \mu_e N \Rightarrow N = \frac{mg}{\mu_e}$.

A normal, sendo a força centrípeta, em módulo: $N = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = m\omega_d^2 R$. Onde v é a velocidade tangencial, dada por $v = \omega_d R$.

Portanto: $\omega_d = \sqrt{\frac{g}{R\mu_e}}$
c) O período é dado por $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$. Ao aplicar os valores $R = 2,1$ m, $g = 9,8$ m/s^2 e $\mu_e = 0,4$, obtemos $T_d = 1,84$.
d) É necessário somente aplicar a massa de 49 kg em $F_{cp} = N = \frac{mg}{\mu_e}$, obtendo $F_{cp} = 1200$ N.

23. As forças atuantes no bloco B são a gravidade e a tração exercida pelo fio, de modo que $M_B a = M_B g - T$. A força centrípeta, que até então era devido unicamente a tração, mantendo o bloco A com velocidade angular constante. Com a liberação do bloco B a força centrípeta se mantém num primeiro instante, porém a tração é aumentada de maneira a deixar o sistema com movimento consistente, com uma aceleração radial de A com a mesma aceleração vertical que B está sofrendo, de forma que $T = F_{cp} + M_A a$. Portanto

$$M_B a = M_B g - F_{cp} - M_A a = M_B g - M_A \omega_0^2 r_0 - M_A a$$

$$a = \frac{M_B g - M_A \omega_0^2 r_0}{M_A + M_B},$$

sendo a aceleração de B na direção do eixo z, $\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{M_B g - M_A \omega_0^2 r_0}{M_A + M_B} \hat{\boldsymbol{k}}$

24. a) A aceleração se trata da aceleração centrípeta, dado que a tração se relaciona com o peso, como $P = T\cos\alpha$, e com a forca centrípeta $F_{cp} = T\sin\alpha$, a força centrípeta é dada então por $F_{cp} = P\tan\alpha$, na direção radial e negativa tamos: $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{cp}} = -P\tan\alpha\hat{\boldsymbol{r}}$, portanto a aceleração centrípeta facilmente se encontra como $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{cp}} = -g\tan\alpha\hat{\boldsymbol{r}}$. A velocidade é encontrada a partir de $F_{cp} = \frac{Mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F_{cp} r}{M}} \Rightarrow v = \sqrt{gr\tan\alpha}$, na direção angular, temos $\vec{\boldsymbol{v}} = \sqrt{gr\tan\alpha}\hat{\boldsymbol{\theta}}$

b) No caso de $\omega \to 0$, a força centrípeta se anula, a tração se iguala ao peso e não há movimento. Para o caso $\omega \to \infty$, do equilíbrio da tração com a força centrípeta, podemos dizer que $F_{cp} = T\sin\alpha = \frac{mv^2}{r}$. Do equilíbrio da força peso, $P = T\cos\alpha = mg$, e do fato de que $\sin\alpha = \frac{r}{l}$, podemos então escrever que

$$\cos\alpha = \frac{mg}{T} = mg\frac{r\sin\alpha}{mv^2} = g\frac{r^2}{l\omega^2 r^2} \Rightarrow$$
$$\cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2}$$

Caso $\omega \to \infty \Rightarrow \cos\alpha \to 0 \Rightarrow \alpha \to \pi$. O movimento se torna perpendicular ao eixo z.

25. A força de arrasto do ar é dada por $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{d}} = -m\alpha\vec{\boldsymbol{v}}$.
A força peso é dada por $\vec{\boldsymbol{P}} = -mg\hat{\boldsymbol{k}}$.
Como a velocidade inicial é $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{0}} = +v_0\hat{\boldsymbol{k}}$. O movimento só se dá na direção de $\hat{\boldsymbol{k}}$, sendo $\vec{\boldsymbol{v}} = v\hat{\boldsymbol{k}}$, podemos escrever a equação do movimento como:

$$ma\hat{\boldsymbol{k}} = (-m\alpha v - mg)\hat{\boldsymbol{k}}$$

Que nos enga a seguinte equação diferencial, de primeira ordem, para a velocidade.:

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha v - g$$

Equações diferenciais são em geral difíceis de se resolver sem conhecer um método apropriado para cada tipo de equação. Na equação deste problema, começamos isolando os termos que contém a função v.

$$\frac{dv}{dt} + \alpha v = -g$$

Multiplicamos ambos os lados por $e^{\alpha t}$.

$$\frac{dv}{dt}e^{\alpha t} + \alpha v e^{\alpha t} = -ge^{\alpha t}$$

Vamos supor uma nova função, $w(t) = ve^{\alpha t}$, temos $\frac{dw}{dt} = \frac{dv}{dt}e^{\alpha t} + \alpha v e^{\alpha t}$, identico a o lado esquerdo da última equação.
Portanto, podemos reescrever:

$$\frac{dw}{dt} = -ge^{\alpha t}$$

Integrando em t:

$$w = -\frac{g}{\alpha}e^{\alpha t} + A$$

Sendo A sendo a constante de integração. Reescrevendo em termos de v, obtemos:

$$v(t) = -\frac{g}{\alpha} + Ae^{-\alpha t}$$

Se em $t = 0$, temos $v = +v_0$, a constante de integração é encontrada.

$$A = v_0 + \frac{g}{\alpha}$$

Integrando a velocidade em relação a t obtemos a altura:

$$h(t) = -\frac{g}{\alpha}t - \frac{A}{\alpha}e^{-\alpha t} + B$$

Sendo B mais uma constante de integração, se em $t = 0$, temos $h(0) = 0$, obtemos:

$$B = \frac{A}{\alpha}$$

Supondo que a bola retorne a posição $h = 0$, em $t = t_f$, com velocidade $v = -v_f$ (módulo $= v_f$, porém para baixo), obtemos da equação da posição $h(t_f)$ e da velocida $v(t_f)$:

$$-\frac{g}{\alpha}t_f - \frac{A}{\alpha}e^{-\alpha t_f} + B = 0$$

$$-v_f = -\frac{g}{\alpha} + Ae^{-\alpha t_f}$$

Dessa segunda equação, isolamos $Ae^{-\alpha t_f} = -v_f + \frac{g}{\alpha}$ e introduzimos na primeira equação:

$$-\frac{g}{\alpha}t_f - \frac{1}{\alpha}\left[-v_f + \frac{g}{\alpha}\right] + \frac{1}{\alpha}\left[v_0 + \frac{g}{\alpha}\right] = 0$$

De onde podemos extrair:

$$t_f = \frac{v_0 + v_f}{g}$$

Introduzindo na equação para v_f:

$$-v_f = -\frac{g}{\alpha} + Ae^{-\alpha \frac{v_0+v_f}{g}}$$

$$-\left[v_f - \frac{g}{\alpha}\right] = \left[v_0 + \frac{g}{\alpha}\right]e^{-\alpha \frac{v_0+v_f}{g}}$$

$$e^{-\alpha \frac{v_0+v_f}{g}} = \frac{g - \alpha v_f}{g + \alpha v_0}$$

$$v_0 + v_f = \frac{g}{\alpha}\log\left[\frac{g + \alpha v_0}{g - \alpha v_f}\right]$$

26.a) A força de arrasto do ar é dada por $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{d}} = -\beta\vec{\boldsymbol{v}} \equiv -m\alpha\vec{\boldsymbol{v}}$.
A equação do movimento é então dada por $m\vec{\boldsymbol{a}} = -mg\hat{\boldsymbol{j}} - m\alpha\vec{\boldsymbol{v}}$
Sendo $\vec{\boldsymbol{a}} = \ddot{x}\hat{\boldsymbol{i}} + \ddot{y}\hat{\boldsymbol{j}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = \dot{x}\hat{\boldsymbol{i}} + \dot{y}\hat{\boldsymbol{j}}$, incluindo na equação do movimento, obtemos:

$$\ddot{x}\hat{\boldsymbol{i}} + \ddot{y}\hat{\boldsymbol{j}} = -\alpha\dot{x}\hat{\boldsymbol{i}} - (g + \alpha\dot{y})\hat{\boldsymbol{j}}$$

ou mais simplesmente, de forma isolada:

$$\ddot{x} = -\alpha\dot{x}$$

$$\ddot{y} = -g - \alpha\dot{y}$$

Se trata exatamente das mesmas equações do exercício anterior, resolvendo de forma análoga, para $x(t)$, temos o exercício anterior com $g = 0$, $\dot{x}(0) = v_0\cos\theta$, obtemos:

$$x(t) = \frac{v_0\cos\theta}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

Para $y(t)$, $\dot{y}(0) = v_0\sin\theta$, obtemos:

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}\left(v_0\sin\theta + \frac{g}{\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t}\right) - \frac{g}{\alpha}t$$

b) O ponto onde o valor de y é máximo é dado por $\frac{dy}{dt} = 0$ que ocorre em:

$$e^{-\alpha t_{y,max}} = \frac{g}{v_0\alpha\sin\theta + g}$$

O valor de x nesse ponto é:

$$x(t_{y,max}) = \frac{v_0\cos\theta}{\alpha}\left(1 - \frac{g}{v_0\alpha\sin\theta + g}\right)$$

Que, incluindo a condição de que a força de arrasto é igual, em módulo, a força da gravidade no início do lançamento, $m\alpha v_0 = mg \Rightarrow \alpha = g/v_0$. Reescrevemos como:

$$x(t_{y,max}) = \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g\sin\theta + g}$$

O valor máximo de $x(t_{y,max})$, com relação ao ângulo de lançamento θ é encontrado quando

$\frac{dx(t_{y,max})}{d\theta} = 0$

$$\frac{dx(t_{y,max})}{d\theta} = -\frac{v0^2(\sin\theta - \cos^2\theta)}{g\sin\theta + g} = 0$$

Portanto,

$$\sin\theta - \cos^2\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\sin\theta - 1 + \sin^2\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$