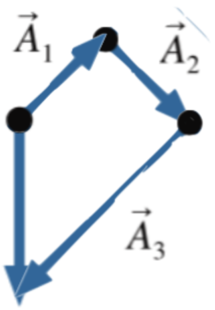
Departamento de Física Aplicada
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

MECÂNICA (4310192) - 2020/2
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
RESOLUÇÃO DA LISTA DE EXERCÍCIOS 1

22 de Setembro de 2020

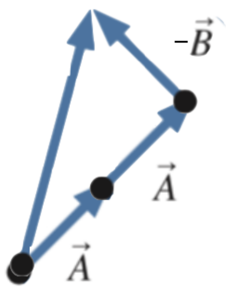
Professor: Gustavo Paganini Canal
Monitor: Fábio Camilo de Souza

1.



(c)

2.

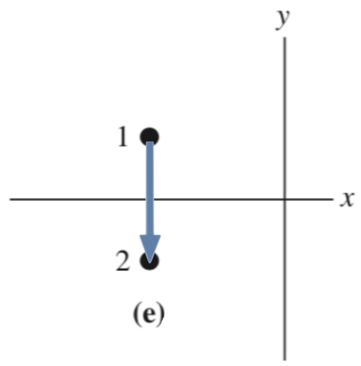


(a)

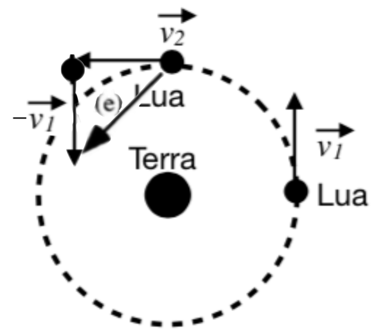
3. No intervalo $0 < t < 5$, a partícula segue com aceleração constante $a = 5\,\mathrm{m/s^2}$ e, portanto, a velocidade cresce linearmente, de acordo com $v(t) = 5t$, assumindo $v(0) = 0$. No intervalo $5 < t < 10$, a partícula segue com aceleração constante $a = -5\,\mathrm{m/s^2}$ e, portanto, a velocidade decresce linearmente com o tempo de acordo com $v(t) = -5t + 25$, sendo $v(5) = 25\,\mathrm{m/s}$. Dessa forma, o gráfico 1 representa a velocidade da partícula e a única opção verdadeira é a afirmação (e).

4. a) Verdadeiro, pois a velocidade é positiva.
b) Verdadeiro, pois é onde a velocidade inverte o sentido, indo de positiva para negativa, ou vice-versa.
c) e d) são falsas, pois $\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \vec{\boldsymbol{a}}_4 = 0$

5) A velocidade média é o vetor que leva de 1 até 2. Portanto, a opção (e) é a opção correta



6)



7) No intervalo $0 < t < 5$, a velocidade é constante, $v(t) = 4\,\text{m/s}$, partindo de $x(0) = -10\,\text{m}$. No intervalo $5 < t < 10$, a velocidade também é constante, $v(t) = -2\,\text{m/s}$, portanto a posição passa a diminir linearmente com o tempo. Dessa forma, a alternativa (b) é a alternativa correta.

8) As forças atuantes no corpo são a gravidade e a normal. A aceleração depende unicamente das forças atuantes no corpo, independente da velocidade inicial. Como a gravidade exerce uma força constante para baixo, a normal exerce uma força constante perpendicular a superfície, de valor também constante. As componentes perpendiculares à superfície se cancelam, e sobra uma componente paralela à superfície, que causará uma aceleração constante na bola de valor negativo. Portanto, a alternativa (d) é a alternativa correta.

9) As componentes x e y são constantes apenas durante o intervalo $2 < t < 3$.

10) Como o tempo de subida e descida dependem unicamente da velocidade inicial na direção vertical, o míssil que subir a menor altura retornará ao nível no mar mais cedo, independente da velocidade horizontal de lançamento. Portanto, a alternativa (b) é a alternativa correta.

11) a) O velor velocidade é calculado integrando o vetor da aceleração:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt$$

$$\vec{v}(t) = \int 4\hat{i}dt$$

$$\vec{v}(t) = 4t\hat{i} + \vec{A}$$

onde $\vec{A}$ é uma constante.
Sendo

$$\vec{v}_0 = 20\hat{i}$$

$$\vec{v}(0) = 0\hat{i} + \vec{A} = \vec{v}_0$$

$$\vec{A} = \vec{v}_0$$

Portanto: $\vec{v}(t) = (4t + 20)\hat{i} - 15\hat{j}$
b)

$$\vec{v}(5) = (4 \times 5 + 20)\hat{i} - 15\hat{j}$$

Portanto: $\vec{v}(5) = 40\hat{i} - 15\hat{j}$ e $|\vec{v}(5)| = \sqrt{40^2 + (-15)^2} = 42,7\ \mathrm{m/s}$.
c)

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt$$

$$\vec{r}(t) = \int \left[(4t + 20)\hat{i} - 15\hat{j}\right] dt$$

$$\vec{r}(t) = \left(4\frac{t^2}{2} + 20t\right)\hat{i} - 15t\hat{j} + \vec{B}$$

onde $\vec{B}$ é uma constante, como a partícula sai da origem, $\vec{r}(0) = 0$, temos $\vec{B} = 0$.
Portanto: $\vec{r}(t) = \left(2t^2 + 20t\right)\hat{i} - 15t\hat{j}$.

A velocidade média entre $t = 0$ e $t = 5$ s:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{m}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}(5) - \vec{\boldsymbol{r}}(0)}{5-0} = \frac{\left(2\times 5^2 + 20\times 5\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} - 15\times 5\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{5} = 30\hat{\boldsymbol{\imath}} - 15\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

12) Primeiramente, vamos encontrar as funções que descrevem os vetores aceleração, velocidade e posição. O vetor aceleração é dado pela aceleração gravitacional:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = -g\hat{\boldsymbol{\jmath}} = -9,8\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

A velocidade inicial é dada pela magnitude, 20 m/s. decompondo em relação ao ângulo de 30° com a horizontal:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{0}} = 20\cos(30°)\hat{\boldsymbol{\imath}} + 20\sin(30°)\hat{\boldsymbol{\jmath}} = 17,3\hat{\boldsymbol{\imath}} + 10\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Então,

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \int \vec{\boldsymbol{a}}(t)dt$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \int -9,8\hat{\boldsymbol{\jmath}}dt$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = -9,8t\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \vec{\boldsymbol{A}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}(0) = \vec{\boldsymbol{A}} = 17,3\hat{\boldsymbol{\imath}} + 10\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{0}}$$

Portanto: $\vec{\boldsymbol{v}}(t) = +17,3\hat{\boldsymbol{\imath}} + (10 - 9,8t)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ m/s.

A posição inicial é dada pela altura do prédio $\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{0}} = 45\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ m, o vetor posição é encontrado, seguindo:

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \int \vec{\boldsymbol{v}}(t)dt$$

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = +17,3t\hat{\boldsymbol{\imath}} + (10t - 4,9t^2)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\vec{\boldsymbol{r}}(0) = \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{0}} = 45\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Portanto: $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = +17,3t\hat{\boldsymbol{\imath}} + (45 + 10t - 4,9t^2)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ m.

a) A pedra atige o solo quando a componente $\hat{\boldsymbol{j}}$ do vetor posição for igual a 0, e permanece em vôo, desde $t = 0$ até atingir o solo: $45 + 10t - 4,9t^2 = 0$. Essa equação apresenta dois valores possíveis para t, $t = -2,2$ e $t = +4,2$. Pela construção do problema, a pedra naturalmente atinge o solo em tempos positivos. Portanto, $t = 4,2$ s.

b) Basta aplicar o tempo que atinge o solo na função que descreve a velocidade:
$\vec{\boldsymbol{v}}(4,2) = +17,3\hat{\boldsymbol{\imath}} - 31.4\hat{\boldsymbol{j}}$ m/s e $|\vec{\boldsymbol{v}}(4,2)| = \sqrt{17,3^2 + (-31,4)^2} = 35,8$ m/s. O ângulo é dado pelo arco, cuja tangente é a razão entre as componentes $\hat{\boldsymbol{j}}$ e $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, ou seja, $\arctan(-31,4/17,3) = -61°$.
c) Basta aplicar o tempo que atinge o solo na função que descreve a posição: $\vec{\boldsymbol{r}}(4.2) = 73,0\hat{\boldsymbol{\imath}} + 0\hat{\boldsymbol{j}} = 73\hat{\boldsymbol{\imath}}$ m.

13) Construir as equações do sistema em coordenadas cartesianas é a maneira mais fácil de trabalhar este exercício. É dado que $\dot{r} = 4$ m/s, $\dot{\theta} = 2$ rad/s. Partindo da origem do sistema, $r(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, podemos então encontrar as funções da posição radial e angular:

$$r(t) = 4t$$

$$\theta(t) = 2t$$

Em coordenadas cartesianas:

$$x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$$

$$y(t) = r(t)\sin(\theta(t))$$

Substituindo as funções acima:

$$x(t) = 4t\cos(2t)$$

$$y(t) = 4t\sin(2t)$$

Derivando para encontrar as componentes da velocidade (atenção à regra da cadeia, e à regra do produto):

$$\dot{x}(t) = +4\cos(2t) - 8t\sin(2t)$$

$$\dot{y}(t) = +4\sin(2t) + 8t\cos(2t)$$

Derivando novamente para encontrar as componentes da aceleração:

$$\ddot{x}(t) = -16\sin(2t) - 16t\cos(2t)$$

$$\ddot{y}(t) = +16\cos(2t) - 16t\sin(2t)$$

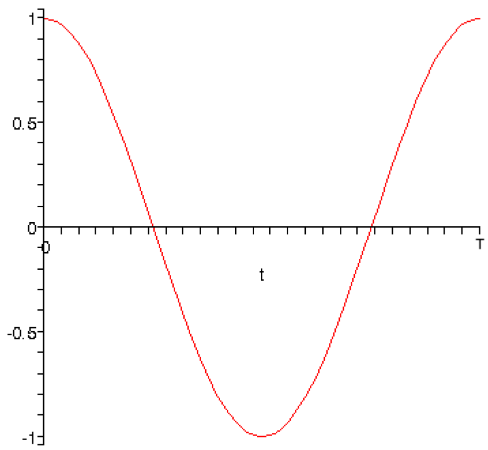
A partícula está a 3 metros da orígem $r(t) = 4t = 3 \Rightarrow t = 3/4$.
Substitua esse tempo nas expressões adequadas acima para encontrar as resposta.
a) $\dot{x}(3/4) = -5.7$ e $\dot{y}(3/4) = +4.1$; e $v(3/4) = \sqrt{(-5.7)^2 + (+4.1)^2} = 7.2$ m/s.
b) $\ddot{x}(3/4) = -16.8$ e $\ddot{y}(3/4) = -16.8$; e $a = \sqrt{(-16.8)^2 + (-16.8)^2} = 20$ m/s ^{2}

14) a) Temos a função para aceleração:

$$a(t) = \begin{cases} (a_m/2)[1 - \cos(2\pi t/T)] & 0 \leqslant t \leqslant T \\ -(a_m/2)[1 - \cos(2\pi t/T)] & T \leqslant t \leqslant 2T \end{cases}$$

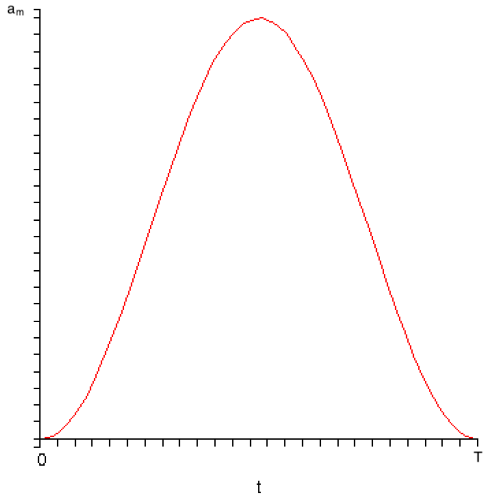
Analisando as duas partes da expressão da aceleração, é fácil ver que durante o intervalo $0 \leqslant t \leqslant 2T$, dado a periodicidade da função cosseno, o gráfico do período $0 \leqslant t \leqslant T$ é igual ao do período $T \leqslant t \leqslant 2T$, apenas com sinal invertido. A função $\cos(2\pi t/T)$, em $t = 0$ temos $\cos(0) = +1$, a função diminue, cruza o 0 em $t = T/4$, tem o mínimo em $t = T/2$, $\cos(\pi) = -1$, cruza o 0 novamente em $t = 3T/4$ voltando o valor máximo em $t = T$, com $\cos(2\pi) = +1$, se comportando como:

$\cos(2\pi t/T)$

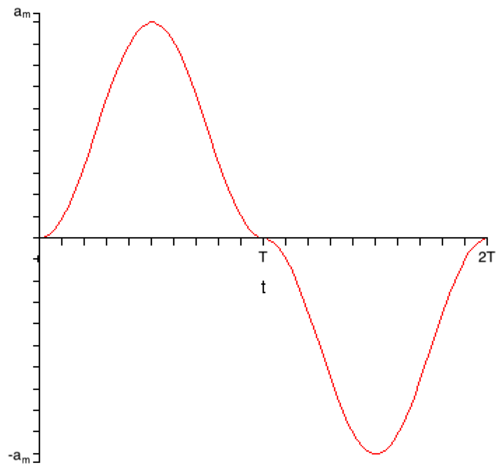


É fácil portanto ver o gráfico para $0 \leqslant t \leqslant T$ é, (se inverte os valores do gráfico anterior e se soma 1):

$(a_m/2)\,[1 - \cos(2\pi t/T)]$



Prolongando para o período $T \leqslant t \leqslant 2T$, obtemos então:



Também é possível plotar determinando os valores:

$$a(t) = \begin{cases} (a_m/2)[1-\cos(2\pi t/T)] & 0 \leqslant t \leqslant T \\ -(a_m/2)[1-\cos(2\pi t/T)] & T \leqslant t \leqslant 2T \end{cases}$$

$a(0) = (a_m/2)[1-\cos(0)] = 0$

$a(T/2) = (a_m/2)[1-\cos(\pi)] = a_m$

$a(T) = (a_m/2)[1-\cos(2\pi)] = 0$

$a(3T/2) = (a_m/2)[1-\cos(3\pi)] = -a_m$

$a(T/2) = (a_m/2)[1-\cos(4\pi)] = 0$

Os máximos e mínimos são encontrados igualando a primeira derivada a 0, $\frac{da(t)}{dt} = 0$:

$$\frac{da(t)}{dt} = \begin{cases} (a_m\pi/T)[\sin(2\pi t/T)] & 0 \leqslant t \leqslant T \\ -(a_m\pi/T)[\sin(2\pi t/T)] & T \leqslant t \leqslant 2T \end{cases}$$

Onde $\frac{da(t)}{dt} = 0 \Rightarrow t = nT/2$, com $n = 0, 1, \mathbf{2}, 3, 4$. É preciso tratar o ponto onde $n = 2$ com atenção por ser um ponto de conexão de cada região de domínio da função. Os pontos de máximo possuem segunda derivada menor que 0, $\frac{d^2a(t)}{dt^2} < 0 \Rightarrow MAX$, e os pontos de mínimo possuem segunda derivada é maior que 0 $\frac{d^2a(t)}{dt^2} > 0 \Rightarrow MIN$.

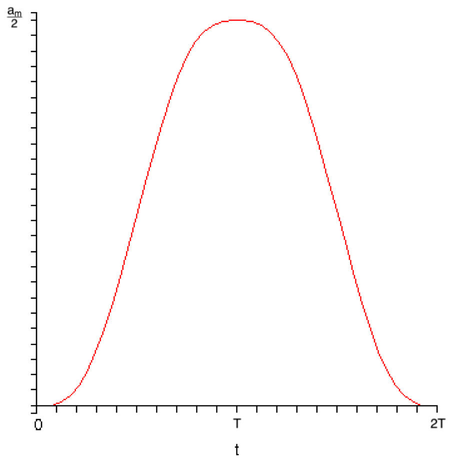
$$\frac{d^2a(t)}{dt^2} = \begin{cases} (a_m2\pi^2/T^2)[\cos(2\pi t/T)] & 0 \leqslant t \leqslant T \\ -(a_m2\pi^2/T^2)[\cos(2\pi t/T)] & T \leqslant t \leqslant 2T \end{cases}$$

É preciso aplicar este resultado nos pontos com $t = nT/2$, para identificar os máximos e mínimos, como no gráfico traçado (com atenção ao ponto de conexão onde $n = 2$.
Também são encontrados os pontos de inflexão, onde $\frac{d^2a(t)}{dt^2} = 0 \Rightarrow t = (2n+1)T/4$, com $n = 0, 1, 2, 3$. A velocidade, é encontrado integrando a aceleração, conectando no ponto de $t = T$ corretamente:

$$v(t) = \int a(t)dt$$

$$v(t) = \begin{cases} (a_m/2)[t - (T/2\pi)\sin(2\pi t/T)] & 0 \leqslant t \leqslant T \\ -(a_m/2)[t - 2 - (T/2\pi)\sin(2\pi t/T)] & T \leqslant t \leqslant 2T \end{cases}$$

Analogamente ao gráfico de $a(t)$, o gráfico de $v(t)$ é encontrado:



b) A velocidade escalar máximo é encontrada na condição onde $dv(t)/dt = a(t) = 0$, com valor máximo para $v(t)$, no intervalo, $0 \leqslant t \leqslant 2T$, vendo $v_{max} = v(T) = a_m/2$.

c) A posição em função do tempo é dada por:

$$y(t) = \int v(t)dt$$

$$y(t) = \begin{cases} (a_m/2)\left[\frac{t^2}{2} + \frac{T^2}{4\pi^2}\cos(2\pi t/T) - \frac{T^2}{4\pi^2}\right] & 0 \leqslant t \leqslant T \\ -(a_m/2)\left[\frac{t^2}{2} - 2t + \frac{T^2}{4\pi^2}\cos(2\pi t/T) + 1 - \frac{T^2}{4\pi^2}\right] & T \leqslant t \leqslant 2T \end{cases}$$

15) A velocidade inicial é dada por $\vec{\boldsymbol{v}}(0) = v_0 \cos\theta \hat{\boldsymbol{\imath}} + v_0 \sin\theta \hat{\boldsymbol{\jmath}}$

A aceleração é constante valendo $\vec{\boldsymbol{a}}(t) = -g\hat{\boldsymbol{\jmath}}$.

Integrando a aceleração, encontramos a velocidade em função do tempo, é:

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = v_0 \cos\theta \hat{\boldsymbol{\imath}} + [v_0 \sin\theta - gt]\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Integrando a velocidade, encontramos a posição em função do tempo, é:

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = v_0 \cos\theta t \hat{\boldsymbol{\imath}} + [v_0 \sin\theta t - gt^2/2]\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

tomando a orígem como ponto de lançamento.

A rampa acompanha o conjunto de posições onde $\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{rampa}} = D\cos\phi\hat{\boldsymbol{\imath}} - D\sin\phi\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, onde D é o módulo da distância de qualquer ponto da rampa até a orígem.

O ângulo de lançamento, θ, cujo o alcance seja máximo, é o valor de θ correspondente para que tenhamos o valor máximo de D, com $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{rampa}}$.
O ponto de impacto e o tempo correspondente para o impacto é dado por $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{rampa}}$

$$v_0 \cos\theta\, t \hat{\boldsymbol{\imath}} + [v_0 t \sin\theta - g t^2/2] \hat{\boldsymbol{\jmath}} = D \cos\phi \hat{\boldsymbol{\imath}} - D \sin\phi \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Da componente $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, podemos escrever o tempo para o impacto como:

$$v_0 \cos\theta\, t = D \cos\phi \Rightarrow t = \frac{D\cos\phi}{v_0 \cos\theta}$$

Da parte $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, introduzindo o tempo para impacto obtido:

$$v_0 \sin\theta\, t - g t^2/2 = -D \sin\phi$$

$$v_0 \frac{D\cos\phi}{v_0\cos\theta} \sin\theta - g \frac{D^2 \cos^2\phi}{2 v_0^2 \cos^2\theta} = -D\sin\phi$$

$$\frac{\cos\phi \sin\theta}{\cos\theta} - g \frac{D\cos^2\phi}{2 v_0^2 \cos^2\theta} = -\sin\phi$$

$$D = \frac{2 v_0^2 \cos^2\theta}{g \cos^2\phi} \left[\sin\phi + \frac{\cos\phi \sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$D = \frac{2 v_0^2}{g \cos^2\phi} \left[\sin\phi \cos^2\theta + \cos\phi \sin\theta \cos\theta\right]$$

O máximo de D com relação a θ ocorre quando $\frac{dD}{d\theta} = 0$.

$$\frac{dD}{d\theta} = \frac{2 v_0^2}{g \cos^2\theta} \left[-2\sin\phi \sin\theta \cos\theta + \cos\phi(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right] = 0$$

$$-2\sin\phi \sin\theta \cos\theta + \cos\phi(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$\tan 2\theta = \frac{1}{\tan\phi}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{\tan\phi}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$$