SME 141
Assunto: Álgebra Linear
Aula AL-5 – Dependência Linear
(30 min)

Prof. Miguel Frasson

Setembro de 2020

Subespaço gerado

Teorema

Seja V espaço vetorial e $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$.
O conjunto U das combinações lineares de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ é um subespaço vetorial, chamado subespaço gerado de $u_1, u_2, \ldots, u_n$.
Notação: $U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$

Demonstração.

- $0 = 0u_1 + \cdots + 0u_n \in U$.
- Se $x, y \in U$: $x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$, $y = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$.

$$\therefore x + y = (\alpha_1 + \beta_1)u_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)u_n \in U$$
$$\therefore \gamma x = (\gamma\alpha_1)u_1 + \cdots + (\gamma\alpha_n)u_n \in U$$

Logo U é subespaço vetorial de V.

$\square$

Espaços finitamente gerados

- $U = [u_1, u_2, \ldots, u_n] \to$ os u_i são geradores de U.
- Se um espaço vetorial possui um número finito de geradores, é chamado de finitamente gerado

Exemplos

- $\mathbb{R}^3 = [e_1, e_2, e_3]$ é finitamente gerado.
- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é finitamente gerado (por mn matrizes).
- $P_n(\mathbb{R})$ os polinômios de grau até n são gerados pelos polinômios $1, x, x^2, \ldots, x^n$.
- O conjunto $P(\mathbb{R})$ dos polinômios (de grau qualquer) não é finitamente gerado
- O conjunto das funções contínuas $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ contém $P(\mathbb{R})$ e portanto não pode ser finitamente gerado.

Exemplo: $(2,0,-1) \in [(1,1,2),(4,2,3)]$?

- $(2,0,-1) \in [(1,1,2),(4,2,3)]$ se existem x, y:

  $$(2,0,-1) = x(1,1,2) + y(4,2,3) = (x+4y, x+2y, 2x+3y)$$

- Montamos o sistema

$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

- Com matrizes aumentadas:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Portanto $x = -2$, $y = 1$, e a resposta é sim.

Exemplo: encontrar conjunto de geradores

- Encontrar um conjunto de geradores para

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z = 0,\ y - z + w = 0\}.$$

- $(x, y, z, w) \in U \iff x + y - z = 0,\ y - z + w = 0$
- Vamos tentar isolar variáveis: z, w

$$z = x + y$$
$$w = z - y = x$$
$$\therefore (x, y, z, w) \in U \iff z = x + y,\ w = x$$

- $(x, y, z, w) = (x, y, x + y, x) = x(1, 0, 1, 1) + y(0, 1, 1, 0)$
- $\therefore U = [(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0)]$

Exemplo2: encontrar conjunto de geradores

$$U = \{(x, y, z, t) : x - y + z = 0,\ y + z - t = 0\}$$
$$W = \{(x, y, z, t) : y - t = 0\}$$

Encontrar geradores para U e $U \cap W$

- Seja $(x, y, z, t) \in U$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto $x + 2z - t = 0 \implies x = -2z + t$,
$y + z - t = 0 \implies y = -z + t$.

$$(x, y, z, t) = (-2z+t, -z+t, z, t) = z(-2, -1, 1, 0)+t(1, 1, 0, 1)$$

$$\therefore U = [(-2, -1, 1, 0), (1, 1, 0, 1)]$$

Exemplo2: encontrar conjunto de geradores

$$U = \{(x, y, z, t) : x - y + z = 0,\ y + z - t = 0\}$$
$$W = \{(x, y, z, t) : y - t = 0\}$$

Encontrar geradores para U e $U \cap W$

- Seja $(x, y, z, t) \in U \cap W$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto $z = 0,\ y - t = 0 \implies y = t,\ x - t = 0 \implies x = t.$

$$(x, y, z, t) = (t, t, 0, t) = t(1, 1, 0, 1)$$

$\therefore U \cap W = [(1, 1, 0, 1)]$

Vetor redundante pode ser removido dos geradores

Teorema

Suponha $V = [v_1, \dots, v_n]$.
Se um destes geradores, digamos v_p, *é combinação linear dos demais, então* v_p *pode ser removido do conjunto de geradores:*

$$V = [v_1, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_n].$$

Demonstração.

- (1ª inclusão) $[v_1, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_n] \subset [v_1, \dots, v_n] = V$.
- (2ª inclusão) $V \subset [v_1, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_n]$ (próx. slide)
- $\therefore V = [v_1, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_n]$.

$\square$

(2ª inclusão na prova anterior)

- $v_p = a_1 v_1 + \cdots + a_{p-1} v_{p-1} + a_{p+1} v_{p+1} + \cdots + a_n v_n$
- Tome $u \in V \implies u = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$
- Então

$$
\begin{aligned}
u &= b_1 v_1 + \cdots + b_{p-1} v_{p-1} + b_p v_p + b_{p+1} v_{p+1} + \cdots + b_n v_n \\
&= b_1 v_1 + \cdots + b_{p-1} v_{p-1} \\
&\quad + b_p(a_1 v_1 + \cdots + a_{p-1} v_{p-1} + a_{p+1} v_{p+1} + \cdots + a_n v_n) \\
&\quad + b_{p+1} v_{p+1} + \cdots + b_n v_n \\
&= (b_1 + b_p a_1) v_1 + \cdots + (b_{p-1} + b_p a_{p-1}) v_{p-1} \\
&\quad + (b_{p+1} + b_p a_{p+1}) v_{p+1} + \cdots + (b_n + b_p a_n) a_n v_n
\end{aligned}
$$

- Portanto $u \in [v_1, \ldots, v_{p-1}, v_{p+1}, \ldots, v_n]$
- Portanto $V \subset [v_1, \ldots, v_{p-1}, v_{p+1}, \ldots, v_n]$

Dependência linear

- Sejam V um espaço vetorial e $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$.
- Dizemos que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes, ou que S é um conjunto linearmente dependente (abrev: LD) quando existem escalares não todos nulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

- Caso contrário, isto é, se uma igualdade do tipo $\sum \alpha_i v_i = 0$ só for possível quando $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, dizemos que S é linearmente independente (abrev: LI).

Exemplos

$(3, 1, 1, 4), (1, 1, 0, 3), (2, 0, 1, 1)$ são LD

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(sistema possível indeterminado)

$(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ são LI.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{é sistema possível determinado}$$

Exemplos

Os monômios 1, t, $\ldots$, t^n são LI em $P(\mathbb{R})$.

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n = 0 = 0 + 0t + \cdots + 0t^n \implies \alpha_i = 0, \forall i.$$

Exemplos

LD se dos vetores é combinação linear dos outros

Se um dos vetores $v_1, \ldots, v_n$ for combinação linear dos outros, então $v_1, \ldots, v_n$ são LD.

- $vk = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_n v_n$
- $\therefore 0 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_n v_n$

Num conj. LD, ao menos um é comb. linear dos anteriores

Teorema

Se $v_1, \ldots, v_n \in V$*,* $n \geqslant 2$*, são vetores LD e se* $v_1 \neq 0$*, então existe* $k \geq 2$ *tal que* v_k *é combinação linear de* $v_1, \ldots, v_{k-1}$*.*

Demonstração.

- Como $v_1, \ldots, v_n \in V$ são LD, existem α_i não todos nulos

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

- Seja k o maior índice tal que $\alpha_k \neq 0$.
- $k \geq 2$ (senão $0 = \alpha_1 v_1 \implies v_1 = 0$).
- $\therefore v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_k}\right) v_i$.

$\square$

Exemplo para ilustrar o teorema

Verificar a dependência linear do conjunto B, e caso seja LD, encontre algum que seja combinação linear dos anteriores

$$B = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(1,-1,-1,-1)\}$$

Montando o sistema da combinação linear igual ao vetor nulo, como matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

O sistema é **indeterminado** (z é var. livre), portanto B é LD.
Do sistema, $x = -2z, y = z, w = 0$. Tomemos uma solução não nula (ex.: $z = 1$): $x = -2, y = 1, z = 1, w = 0$.
Chamando os vetores de v_1, v_2, v_3, v_4:

$$-2v_1 + v_2 + v_3 = 0 \implies v_3 = 2v_1 - v_2.$$

Num conj. LD, ao menos um é comb. linear dos anteriores

- Corolário: Se $v_1, \ldots, v_n$ são LI e $v_1, \ldots, v_n, x$ são LD, então x é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$.