

do seu movimento³, ao contrário do que o procedimento incorreto anterior sugeria. Esse efeito, chamado de *contração de Lorentz*, é simétrico entre os observadores: o observador $\tilde{\mathcal{O}}$ também julgaria que uma régua carregada por \mathcal{O} se contrai pelo mesmo fator. A **Fig. 2.3** ilustra, em diagramas espaço-tempo, como é possível que ambos os observadores julguem que a régua do outro é contraída em relação à sua própria.

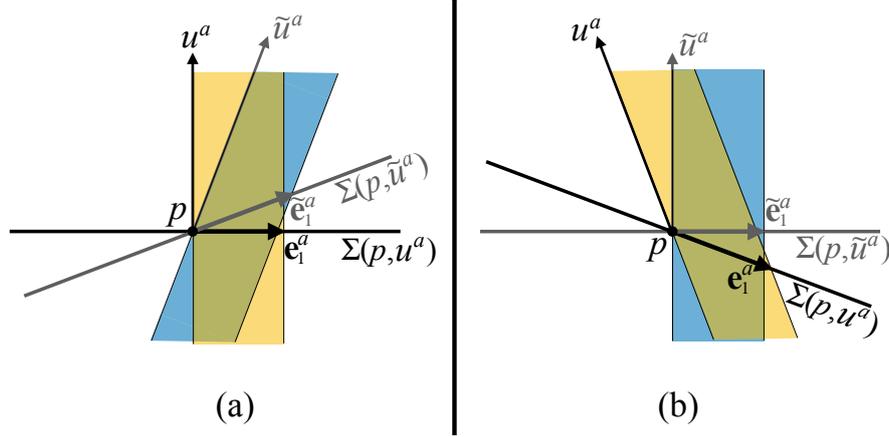


Figura 2.3: Diagramas espaço-tempo mostrando como é possível que ambos observadores, \mathcal{O} e $\tilde{\mathcal{O}}$ — cada um carregando sua própria régua unitária —, descrevam a régua do outro como sendo menor que a sua própria. As régua de \mathcal{O} e $\tilde{\mathcal{O}}$ (amarela e azul, respectivamente) descrevem *folhas-de-mundo* delimitadas pelas linhas-de-mundo de suas extremidades. Cada observador mede tamanhos ao longo da intersecção dessas folhas-de-mundo com sua própria superfície de simultaneidade. Mais uma vez, embora os diagramas (a) e (b) *pareçam* distintos, se referem apenas a “perspectivas” diferentes da mesma situação.

2.2 Observadores arbitrários e famílias de observadores

Na seção anterior, nos restringimos à percepção de tempo e espaço de observadores inerciais, cujas linhas-de-mundo no espaço-tempo são retilíneas. Para esses observadores, o intervalo de tempo $\Delta\tau(p, q)$ decorrido entre dois eventos p e q pertencentes à sua linha-de-mundo é dado diretamente pelo intervalo invariante entre p e q via $\Delta\tau(p, q) = \sqrt{-\mathcal{I}(p, q)}/c$. Além disso, vimos que para esses observadores há uma noção *natural* de seção espacial (ou superfície de simultaneidade) $\Sigma(p, u^a)$ em um evento p de sua linha-de-mundo

³Não é difícil de se ver que tamanhos nas direções perpendiculares ao movimento não são alterados. Veremos isso explicitamente mais adiante.

caracterizada por u^a (vide Exercício 6 do capítulo anterior). A retidão das linhas-de-mundo inerciais foi crucial para conferir significado físico a essas prescrições de se *medir* tempo e espaço separadamente a partir do *uno* quadridimensional. Então, como proceder no caso de observadores mais gerais, cujas linhas-de-mundo não são retilíneas? Como estes percebem tempo e espaço?

A noção de tempo decorrido para um observador arbitrário *sobre* sua linha-de-mundo, $\psi(o, p(\lambda)) = x^a(\lambda)$, é facilmente obtida considerando-se que qualquer linha-de-mundo realista pode ser particionada em trechos arbitrariamente pequenos de modo que, em *cada* trecho, o intervalo de tempo decorrido pode ser aproximado pela relação válida no caso inercial — onde a aproximação será tão melhor quanto menor for o tamanho dos trechos (vide **Fig. 2.4**):

$$\begin{aligned} \Delta\tau(p(\lambda), p(\lambda + \Delta\lambda)) &\approx \sqrt{-\mathcal{I}(p(\lambda), p(\lambda + \Delta\lambda))}/c \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{-g_{ab}[x^a(\lambda + \Delta\lambda) - x^a(\lambda)][x^b(\lambda + \Delta\lambda) - x^b(\lambda)]} \\ &= \frac{\Delta\lambda}{c} \sqrt{-g_{ab} \frac{[x^a(\lambda + \Delta\lambda) - x^a(\lambda)]}{\Delta\lambda} \frac{[x^b(\lambda + \Delta\lambda) - x^b(\lambda)]}{\Delta\lambda}}. \end{aligned}$$

Logo, no limite em que cada trecho tem tamanho arbitrariamente pequeno,

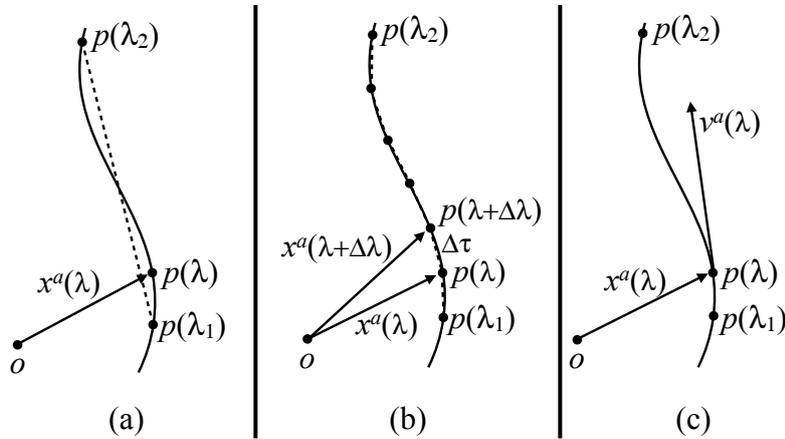


Figura 2.4: (a) Linha-de-mundo arbitrária dada por $\psi(o, p(\lambda)) = x^a(\lambda)$; (b) Partição de modo a aproximar o intervalo de tempo transcorrido sobre a linha-de-mundo pelo de um ao longo de um segmento retilíneo; (c) Representação do vetor tangente $v^a(\lambda) := dx^a(\lambda)/d\lambda$ que se usa para se calcular o *tempo-próprio* ao longo da linha-de-mundo.

$\Delta\lambda \rightarrow 0$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau(\lambda)}{d\lambda} &:= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau(p(\lambda), p(\lambda + \Delta\lambda))}{\Delta\lambda} \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{-g_{ab} \frac{dx^a(\lambda)}{d\lambda} \frac{dx^b(\lambda)}{d\lambda}} \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{-g_{ab} v^a(\lambda) v^b(\lambda)}, \end{aligned}$$

onde $v^a(\lambda) := dx^a(\lambda)/d\lambda$ é o 4-vetor tangente à linha-de-mundo em $p(\lambda)$. Sendo assim, dada qualquer linha-de-mundo, o tempo decorrido ao longo dela — denominado, de agora em diante, de *tempo-próprio* do observador seguindo a linha-de-mundo — é calculado por

$$\tau = \frac{1}{c} \int d\lambda \sqrt{-g_{ab} v^a(\lambda) v^b(\lambda)}, \quad (2.9)$$

onde se subentende os limites de integração apropriados em λ que delimitam o trecho de interesse da linha-de-mundo.

- **Exercício:** Mostre que a expressão dada na Eq. (2.9) é *invariante* por mudança de parametrização da linha-de-mundo, $\lambda \mapsto \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\lambda)$.

A invariância demonstrada no exercício acima era esperada, tanto por construção, quanto por consistência; afinal, a arbitrariedade na escolha de λ não poderia ter consequência sobre o valor de uma quantidade física, como o tempo-próprio ao longo da linha-de-mundo dada. O único parâmetro natural definido sobre uma linha-de-mundo tipo-tempo (ou seja, com o 4-vetor tangente sendo tipo-tempo em todos os pontos) é o próprio tempo-próprio ao longo da linha-de-mundo, $\lambda = \tau$. Note que com essa escolha de parâmetro, o 4-vetor tangente à linha-de-mundo (tipo-tempo) passa a satisfazer a condição de normalização $g_{ab} v^a(\tau) v^b(\tau) = -c^2$ e, *nesse caso*, o chamaremos de *4-velocidade*:

$$v^a = dx^a/d\tau \iff g_{ab} v^a v^b = -c^2.$$

- **Exercício:** Considere dois observadores, \mathcal{A} e \mathcal{B} . O observador \mathcal{A} é inercial e, segundo ele, \mathcal{B} descreve uma trajetória circular de raio R , com módulo de velocidade constante, de modo que a cada intervalo de tempo T (medido por \mathcal{A}) ambos se cruzam.

- (a) Utilizando uma base tetrada conveniente, de modo que \mathbf{e}_0^a caracterize a direção da linha-de-mundo de \mathcal{A} , forneça as linhas-de-mundo $x^a(\lambda)$ e $y^a(\lambda)$ de \mathcal{A} e \mathcal{B} , respectivamente; (Use o parâmetro que julgar mais conveniente em cada uma.)

- (b) Calcule o intervalo de tempo entre os cruzamentos de \mathcal{A} e \mathcal{B} , de acordo com \mathcal{B} . Deixe clara sua relação de ordem com o valor de T (de ser maior ou menor).

- **Exercício:** Utilizando a Eq. (2.9) e a desigualdade triangular na direção temporal (demonstrada num exercício da seção anterior), prove que o *maior* intervalo de tempo-próprio decorrido entre dois eventos é sempre ao longo de uma linha-de-mundo *inercial* passando por esses eventos. (Isso completa a solução do “paradoxo dos gêmeos” mencionado na seção anterior, agora considerando um movimento arbitrário para o gêmeo viajante.)

O raciocínio que nos levou à Eq. (2.9) é completamente análogo ao de se calcular o comprimento de arco de uma curva arbitrária em geometria euclidiana. E, de fato, se ao invés de considerarmos uma linha-de-mundo, considerarmos uma curva tipo-espaço (ou seja, uma curva cujo 4-vetor tangente $v^a(\lambda)$ é tipo-espaço em todos os pontos — vide **Fig. 2.5(a)**), podemos calcular seu *comprimento-próprio* ℓ através da expressão análoga a (2.9),

$$\ell = \int d\lambda \sqrt{g_{ab}v^a(\lambda)v^b(\lambda)}, \quad (2.10)$$

exatamente como no caso euclidiano. Mas a semelhança entre as Eqs. (2.9) e (2.10) é um tanto enganosa, pois, embora seja bastante claro e direto o significado físico do tempo-próprio calculado em (2.9) — o tempo decorrido para um observador seguindo a linha-de-mundo utilizada na integração —, a interpretação *física* do comprimento-próprio calculado em (2.10) é um tanto mais sutil: *quem atribui esse valor ao comprimento da curva tipo-espaço dada?*

O(a) leitor(a) poderia se apressar em responder que quem atribui o valor ℓ ao comprimento da curva tipo-espaço dada é o observador para quem a curva é *puramente* espacial; ou seja, aquele com linha-de-mundo na direção de u^a de modo que a curva dada esteja completamente contida em $\Sigma(p, u^a)$ (para algum evento p da curva, por exemplo). O problema com essa tentativa de resposta é evidente: a curva tipo-espaço dada pode não estar completamente contida em *nenhum* subespaço tridimensional de \mathbb{M} , caso em que não haveria nenhum observador para o qual ela seria puramente espacial (vide **Fig. 2.5(b)**). No entanto, analisando mais cuidadosamente o procedimento que leva à Eq. (2.10), vemos que cada elemento $d\ell = \sqrt{g_{ab}v^a(\lambda)v^b(\lambda)} d\lambda$ que contribui para o valor total de ℓ deve representar um trecho puramente espacial apenas no entorno do evento $p(\lambda)$ da curva. Assim, se ao invés de escolhermos *um* observador, escolhermos um *conjunto* de observadores, cada um passando por um dos eventos $p(\lambda)$ da curva, numa direção dada por um 4-vetor $u^a(\lambda)$ satisfazendo $g_{ab}u^a(\lambda)v^b(\lambda) = 0$ (vide **Fig. 2.5(c)**), então, para *esse* conjunto de observadores, o comprimento da curva medido *localmente*

— ou seja, cada observador mede o trecho da curva apenas em sua própria vizinhança e, então, essas medidas são somadas — é exatamente o dado pela Eq. (2.10).

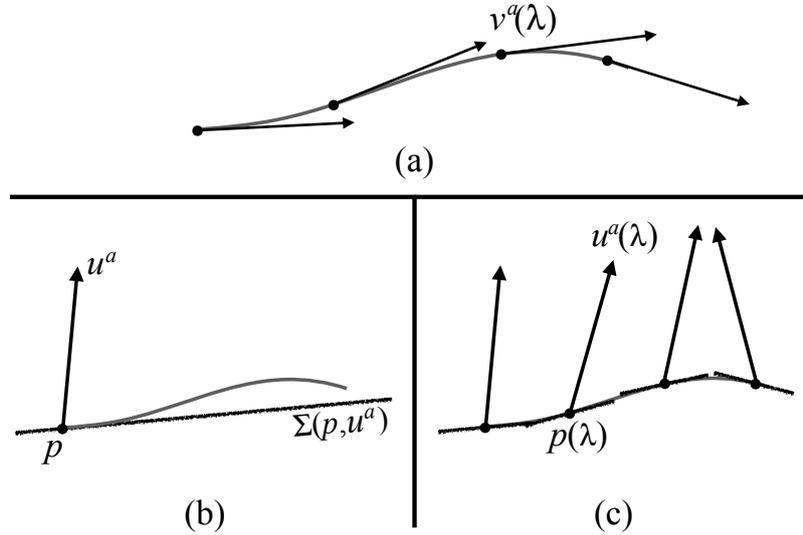


Figura 2.5: (a) Representação de uma curva tipo-espaço arbitrária em \mathbb{M} ; (b) Essa curva pode não estar contida em nenhum subespaço $\Sigma(p, u^a)$ de \mathbb{M} , para nenhum p e u^a ; (c) Mas existe uma coleção de 4-vetores tipo-tempo $u^a(\lambda)$ que, em cada evento $p(\lambda)$ da curva, é ortogonal ao 4-vetor tangente à curva, $v^a(\lambda)$. Esses 4-vetores $u^a(\lambda)$ definem um conjunto de observadores para o qual o comprimento da curva — medido *localmente* por cada observador — é dado pela Eq. (2.10).

Mesmo no caso particular em que a curva tipo-espaço dada estivesse contida num subespaço $\Sigma(p, u^a)$ — caso em que poderíamos dizer que o observador inercial caracterizado por u^a atribuiria o valor ℓ para o comprimento da curva —, ainda assim argumentaremos que faz mais sentido *físico* restringir medidas de comprimentos espaciais a serem *locais* — i.e., realizadas por observadores nas imediações de suas linhas-de-mundo — e distribuir a tarefa de se medir comprimentos macroscópicos (ou seja, não-infinitesimais) a uma coleção de observadores distribuídos ao longo da região em que se deseja realizar a medida. Isso não só permitirá que comprimentos sejam medidos ao longo de curvas tipo-espaço que não estão contidas em nenhum subespaço $\Sigma(p, u^a)$ (como vimos acima), como também nos permitirá definir medidas de distância realizada por observadores que *não* são inerciais. Isso porque a *naturalidade* de se interpretar $\Sigma(p, u^a)$ como sendo uma seção puramente espacial depende fortemente da retidão da linha-de-mundo do observador caracterizada por u^a (vide Exercício 6 do capítulo anterior). A **Fig. 2.6** abaixo ilustra como essa “naturalidade” é perdida no caso de

uma linha-de-mundo arbitrária, a menos que estejamos interessados numa porção de $\Sigma(p, u^a)$ arbitrariamente pequena, em torno da linha-de-mundo em p — que, adiante, denotaremos por $d\Sigma(p, u^a)$. Ela mostra, para uma linha-de-mundo que não é retilínea passando por um evento p , como eventos de $\Sigma(p, u^a)$ próximos a p (por exemplo, q e r na figura) ainda podem ser naturalmente interpretados como simultâneos a p (pela troca de sinais luminosos, como justificado no Exercício 6 do capítulo anterior), mas como essa naturalidade não se aplica a eventos de $\Sigma(p, u^a)$ muito afastados de p (por exemplo, x e y na figura), pois o evento p deixa de ser o “ponto médio” da linha-de-mundo entre a emissão e a recepção de sinais de luz trocados com esses eventos.

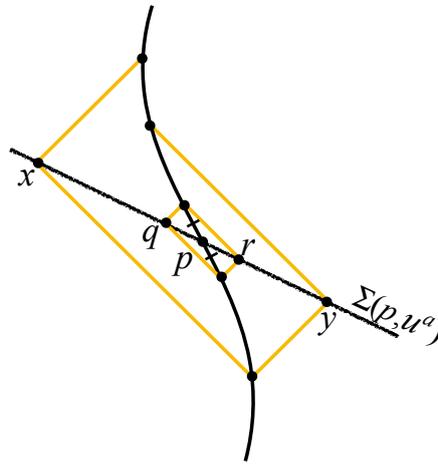


Figura 2.6: Representação de sinais de luz trocados entre a linha-de-mundo não-inercial e eventos de $\Sigma(p, u^a)$. Para eventos de $\Sigma(p, u^a)$ (arbitrariamente) próximos a p , como q e r , p continua sendo, em ótima aproximação, o “ponto médio” entre os eventos de emissão e recepção desses sinais de luz — o que justifica pensarmos em q e r como simultâneos a p . Essa propriedade, no entanto, não é válida para eventos de $\Sigma(p, u^a)$ mais afastados de p , como x e y . Sendo assim, para observadores que não são inerciais, uma noção “macroscópica” (i.e., não-infinitesimal) e *natural* de simultaneidade é perdida.

Além da perda da naturalidade de se considerar $\Sigma(p, u^a)$ como a seção espacial para observadores arbitrários, a **Fig. 2.7(a)** ilustra como seria problemático forçar essa interpretação. Se a linha-de-mundo do observador não é retilínea, então, em geral, os subespaços $\Sigma(p, u^a)$ e $\Sigma(r, u^a)$, construídos em eventos p e r distintos dessa linha-de-mundo, se interceptam e, pior, trocam a ordem temporal a uma certa distância da linha-de-mundo. Assim, se fôssemos levar a sério a interpretação de

$\Sigma(p, u^a)$ como superfície de simultaneidade mesmo para observadores não-inerciais, seríamos obrigados a aceitar que eventos $x \in \Sigma(p, u^a)$ e $y \in \Sigma(r, u^a)$ tivessem uma relação de causa e efeito *invertida* em relação à dos eventos p e r a que são, respectivamente, simultâneos (vide **Fig. 2.7(a)**). Um conceito de simultaneidade assim patológico não teria nenhuma utilidade. Por isso, a partir de agora, restringiremos a noção de simultaneidade (equivalentemente, seção espacial) ao âmbito *local*, como representado na **Fig. 2.7(b)**.

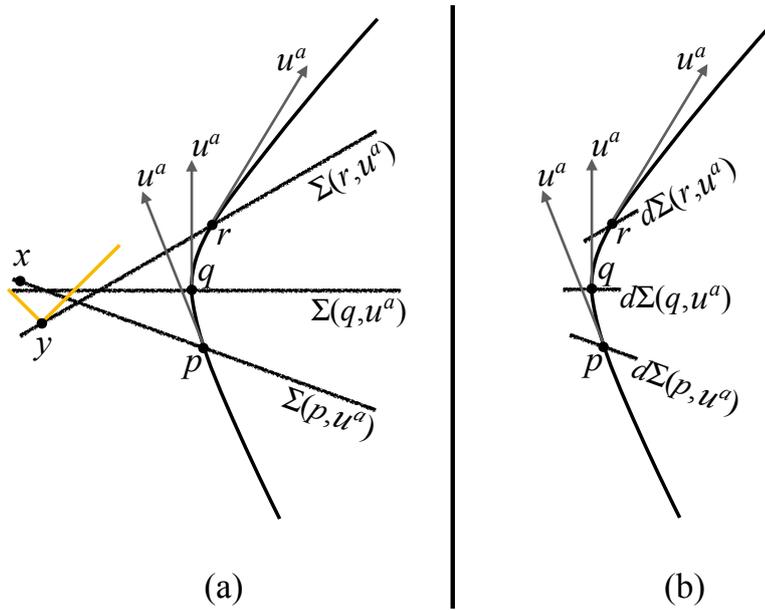


Figura 2.7: (a) Os subespaços $\Sigma(p, u^a)$ definidos em eventos distintos de uma linha-de-mundo arbitrária podem trocar a ordem temporal em eventos muito afastados da linha-de-mundo, de modo que, embora p esteja no passado *absoluto* de r — ou seja, p está dentro do cone-de-luz passado de r —, o evento $x \in \Sigma(p, u^a)$ esteja no futuro absoluto de $y \in \Sigma(r, u^a)$; (b) A situação patológica ilustrada em (a) desaparece se restringirmos o conceito de simultaneidade (e, conseqüentemente, seções espaciais) ao âmbito *local*, ou seja, apenas nas imediações da linha-de-mundo.

Vale notar que a restrição do conceito de simultaneidade ou de seção espacial à vizinhança de linhas-de-mundo não invalida o que havíamos feito até a seção anterior para medidas de distâncias espaciais por observadores inerciais. Apenas temos que reinterpretar aqueles resultados à luz dessa nova abordagem: ao invés de $\Sigma(p, u^a)$ ser visto como a seção espacial de *um* observador inercial passando pelo evento p com linha-de-mundo na direção de u^a (**Fig. 2.8(a)**), esse subespaço será interpretado como a seção espacial de uma *família* de observadores inerciais, todos

com linhas-de-mundo na mesma direção, dada pelo *mesmo* u^a em todos os eventos de $\Sigma(p, u^a)$ (**Fig. 2.8(b)**).

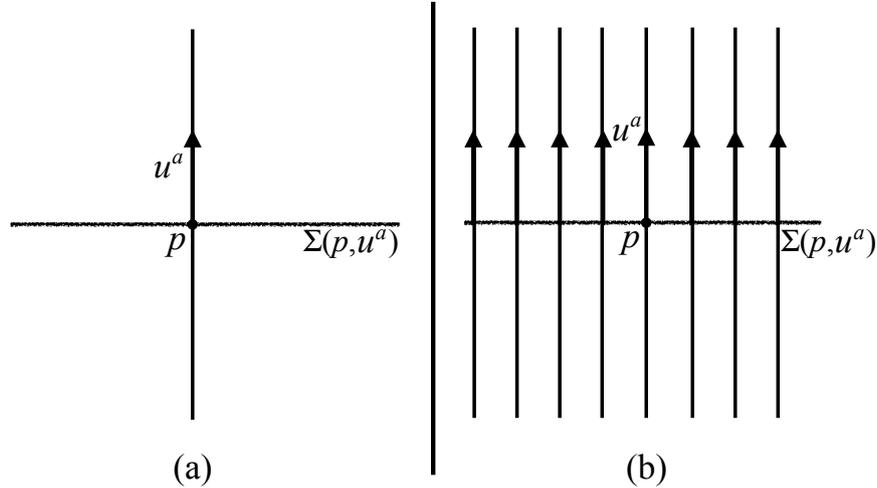


Figura 2.8: (a) Superfície de simultaneidade ou seção espacial $\Sigma(p, u^a)$ de um observador inercial; (b) Releitura dessa mesma superfície, mas agora construída *localmente* por cada membro de uma família de observadores inerciais em repouso relativo entre eles.

Para ilustrar o uso de famílias de observadores para se definir seções espaciais e simultaneidade, analisaremos o “paradoxo do carrossel”. Sua formulação é a seguinte. Considere uma família de observadores inerciais (em repouso relativo entre eles) e uma plataforma circular girante (chamada “carrossel”), com raio R , girando com velocidade angular Ω — as grandezas R e Ω são medidas pela família inercial dada. Ao longo do perímetro do carrossel, *sobre* ele, alinham-se observadores carregando réguas orientadas ao longo do perímetro. Essas réguas enfileiradas servem para os observadores girando com o carrossel medirem o perímetro do mesmo. Réguas idênticas também são usadas pelos observadores inerciais, da mesma maneira, para medir o perímetro do carrossel do ponto de vista deles. A situação (aparentemente) paradoxal vem agora. De acordo com os observadores inerciais, para quem o perímetro do carrossel vale $2\pi R$, as réguas em movimento, enfileiradas ao longo do perímetro do carrossel, encontram-se contraídas de acordo com a Eq. (2.8) (com $V = \Omega R$) e, portanto, mais dessas réguas caberiam ao longo de todo o perímetro do carrossel. Com isso, a conclusão dos observadores inerciais é que os observadores em movimento com o carrossel deveriam medir um perímetro *maior* para o carrossel: $2\pi R\gamma$. No entanto, do ponto de vista dos observadores sobre o carrossel, são as réguas dos observadores inerciais que se encontram contraídas na

direção do movimento relativo. Assim, se cada observador sobre o carrossel contar, à medida que o carrossel vai girando, quantas régua inerciais são necessárias para completar uma volta no carrossel, cada observador sobre o carrossel concluiria que o comprimento do perímetro do carrossel é *menor* que o perímetro medido pelos observadores inerciais: $2\pi R/\gamma$. Temos uma situação aparentemente paradoxal. Quem tem razão? Qual o valor do perímetro do carrossel atribuído pelos observadores sobre ele?

A **Fig. 2.9** abaixo representa a situação num diagrama espaço-tempo. O perímetro do carrossel (que forma uma circunferência de raio R nas seções espaciais euclidianas dos observadores inerciais), descreve um cilindro no espaço-tempo. Por concretude, consideramos um caso em que $\gamma = 11/10$ e escolhemos régua que têm tamanho próprio $L_0 = 2\pi R/10$. Desse modo, para cobrir o perímetro do carrossel, precisamos de 10 observadores inerciais, $\{\mathcal{O}_j\}_{j=0,\dots,9}$ — cujas linhas-de-mundo são representadas pelas curvas tracejadas pretas —, separados pelas régua de comprimento L_0 . As linhas-de-mundo dos observadores *sobre* o carrossel, enfileirados ao longo do perímetro e também separados pelas suas próprias régua de comprimento L_0 , são representadas pelas curvas tracejadas vermelhas. Mas devemos lembrar que os observadores sobre o carrossel medem distâncias espaciais ao longo das direções ortogonais a suas linhas-de-mundo. Essas direções determinam, ao longo do perímetro do carrossel, curvas tipo-espaço como a indicada pela linha vermelha contínua; é ao longo dessas curvas que a distância entre os observadores sobre o carrossel vale L_0 . A figura deixa clara a simetria esperada *localmente* entre os dois conjuntos de observadores: os observadores $\{\mathcal{O}_j\}_{j=0,\dots,9}$ atribuem um tamanho $L = L_0/\gamma = 2\pi R/11$ para a separação entre os observadores sobre o carrossel e suas régua — e, portanto, são necessários 11 observadores enfileirados sobre o carrossel, $\{\tilde{\mathcal{O}}_j\}_{j=0,\dots,10}$ —, enquanto que estes últimos também atribuem um tamanho $L = L_0/\gamma = 2\pi R/11$ para a separação entre os observadores inerciais e suas régua — medido ao longo da curva espacial vermelha.

A origem do “paradoxo” enunciado acima é que essa curva puramente espacial para os observadores $\{\tilde{\mathcal{O}}_j\}_{j=0,\dots,10}$ (curva contínua vermelha na **Fig. 2.9**), ao longo da qual estes últimos devem “medir” o perímetro do carrossel, não fecha sobre si mesma — ao contrário da circunferência de base do cilindro, que representa o perímetro do carrossel para os observadores inerciais. A contrapartida física desse não fechamento é a *impossibilidade* de se definir simultaneidade global ao longo do referencial girante; ou, em termos práticos, é impossível sincronizar relógios em um referencial girante. Qualquer tentativa de se

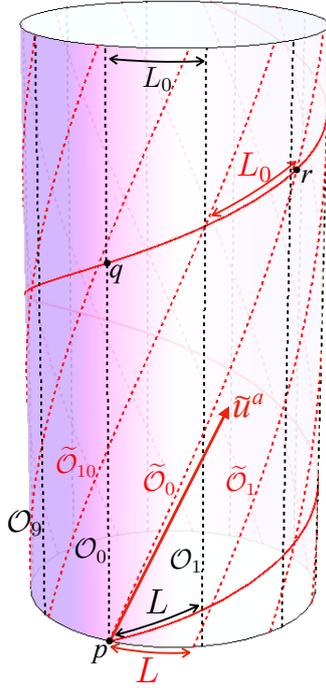


Figura 2.9: Diagrama espaço-tempo do perímetro de um carrossel (cilindro de base circular). As linhas tracejadas representam linhas-de-mundo dos observadores inerciais $\{\mathcal{O}_j\}_{j=0,\dots,9}$ (pretas) e dos observadores $\{\tilde{\mathcal{O}}_j\}_{j=0,\dots,10}$ sobre o carrossel girando (vermelhas). A linha contínua vermelha representa uma curva que é puramente espacial para os observadores $\{\tilde{\mathcal{O}}_j\}_{j=0,\dots,10}$, ao longo da qual estes últimos medem distâncias. A ambiguidade em se atribuir um valor de perímetro ao carrossel, segundo observadores girantes, se relaciona ao fato de a curva espacial vermelha não ser uma curva fechada. Apesar disso, o valor mais natural para essa medida é o comprimento dessa curva de p a r .

sincronizar os relógios dos observadores $\{\tilde{\mathcal{O}}_j\}_{j=0,\dots,10}$, sincronizando $\tilde{\mathcal{O}}_1$ com $\tilde{\mathcal{O}}_0$, $\tilde{\mathcal{O}}_2$ com $\tilde{\mathcal{O}}_1$ e assim por diante — construindo, trecho a trecho, a curva contínua vermelha a partir do evento p —, levará a uma dessincronização *inevitável* ao final do processo, entre $\tilde{\mathcal{O}}_{10}$ e $\tilde{\mathcal{O}}_0$ — dada pelo intervalo de tempo-próprio $\Delta\tau$ decorrido entre os eventos p e r ao longo da linha-de-mundo de $\tilde{\mathcal{O}}_0$. Sendo assim, a questão inevitável é: qual trecho dessa curva espacial representa o comprimento do perímetro do carrossel segundo os observadores $\tilde{\mathcal{O}}_j$?

A estratégia usada pelos observadores inerciais, no enunciado do “paradoxo”, para inferir qual o perímetro do carrossel de acordo com os observadores “girantes”, é equivalente a se medir o comprimento da

curva contínua vermelha de p a r , que leva ao resultado $11L_0 = 2\pi R\gamma$. Já a estratégia dos próprios observadores girantes — contar a quantidade de réguas inerciais necessárias para dar a volta no carrossel e, então, considerar que todas elas encontram-se contraídas — é equivalente a se medir o comprimento da mesma curva espacial anterior, mas agora apenas entre p e q , levando ao valor $10L = 2\pi R/\gamma$. Fica claro, então, o porquê dos resultados não serem iguais, não havendo nenhum verdadeiro paradoxo nessa discrepância. Mas a questão persiste: qual desses valores é o mais natural para o perímetro do carrossel de acordo com os observadores girantes?

O fato de não se poder definir *globalmente* uma noção de simultaneidade no referencial girante torna inevitável uma certa dose de arbitrariedade em qualquer definição de comprimento medido pelos observadores $\tilde{\mathcal{O}}_j$. Mas nesse caso do carrossel especificamente, podemos argumentar que o valor mais natural do seu perímetro, de acordo com os observadores sobre o carrossel, é, curiosamente, o inferido (no enunciado do “paradoxo”) pelos observadores *inerciais*: $2\pi R\gamma$. Isso porque se os próprios observadores girantes trocarem informação entre eles, sabendo em quantos são (11, no caso da figura) e qual a distância entre eles ($L_0 = 2\pi R/10$, na figura), concluirão, em acordo com os observadores inerciais, que o perímetro do carrossel é dado pelo produto desses dois números ($11L_0 = 2\pi R\gamma$, na figura). Isso, mais uma vez, é equivalente a se medir o comprimento da curva vermelha de p a r , começando e terminando no *mesmo* observador *girante*.

- **Exercício:** Calcule a dessincronização inevitável ao longo do carrossel de raio R , girando com velocidade angular Ω . Estime o valor dessa dessincronização no caso de observadores ao longo do equador da Terra, devido ao movimento de rotação.
- **Exercício:** A **Fig. 2.10** abaixo representa o mesmo carrossel da figura anterior (com valor de γ genérico), mas agora destacando apenas as linhas-de-mundo dos observadores \mathcal{O}_0 e $\tilde{\mathcal{O}}_0$ (curvas tracejadas vermelhas) e um *flash* de luz emitido no evento do cruzamento de ambos (evento p na figura). As curvas contínuas amarelas na figura representam linhas-de-mundo da luz confinada ao perímetro do carrossel (por exemplo, através de espelhos cuidadosamente posicionados ao longo do perímetro). Esses raios percorrem o perímetro do carrossel, em sentidos opostos, e voltam a atingir o observador inercial \mathcal{O}_0 simultaneamente (evento s na figura). No entanto, cada um desses raios atinge o observador $\tilde{\mathcal{O}}_0$ em eventos distintos (q e r na figura). (Atenção: os eventos q e r da **Fig. 2.10** *não* são os mesmos da figura anterior.)

- (a) Calcule o intervalo de tempo, para o observador $\tilde{\mathcal{O}}_0$, entre as chegadas da luz vinda de sentidos opostos;
- (b) Relacione esse valor com a dessincronização calculada no exercício anterior e explique como o observador $\tilde{\mathcal{O}}_0$ pode interpretar essa relação.

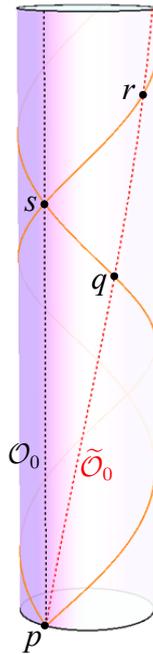


Figura 2.10: Diagrama espaço-tempo do perímetro de um carrossel, como na figura anterior, mas, agora, destacando apenas as linhas-de-mundo dos observadores \mathcal{O}_0 e $\tilde{\mathcal{O}}_0$ (linhas tracejadas preta e vermelha, respectivamente). No evento p , um *flash* de luz é emitido e os raios em sentidos opostos são confinados a se moverem ao longo do perímetro do carrossel (linhas amarelas). Esses raios de luz dão a volta no carrossel e atingem o observador inercial \mathcal{O}_0 simultaneamente (evento s). No entanto, esses raios de luz atingem o observador $\tilde{\mathcal{O}}_0$ em eventos distintos (q e r).

2.2.1 Observadores uniformemente acelerados e o *Rindler wedge*

Uma família de observadores particularmente relevante é a família de observadores *uniformemente acelerada*. Por “uniformemente acelerada” se quer dizer que *cada* observador dessa família possui uma *3-aceleração* (vide Exercício © para definição de 3-vetor) que, *em relação*