Exercícios 3.2

1. Prove, pela definição, que a função dada é contínua no ponto dado.

   a) $f(x) = 4x - 3$ em $p = 2$
   b) $f(x) = x + 1$ em $p = 2$
   c) $f(x) = -3x$ em $p = 1$
   d) $f(x) = x^3$ em $p = 2$
   e) $f(x) = x^4$ em $p = -1$
   f) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 4$
   g) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 0$
   h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em $p = 1$

2. Prove que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua em todo $p \neq 0$.

3. Seja $n > 0$ um natural. Prove que $f(x) = x^n$ é contínua.

4. Prove que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua.

5. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é contínua em 1? Justifique.

7. Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ e que seja contínua em todos os pontos exceto nos inteiros.

8. Seja f dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Mostre que f é descontínua em todo p real.

9. Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é contínua.

a) $f(x) = [\![x]\!]$ em que $[\![x]\!] = \text{máx}\ \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$ (*Função maior inteiro.*)

b) $f(x) = x - [\![x]\!]$

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 + 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

11. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases}$ em $p = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ L & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $p = 0$

12. Dê o valor (caso exista) que a função dada deveria ter no ponto dado para ser contínua neste ponto. Justifique.

a) $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ em $p = 2$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$ em $p = 0$

c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ em $p = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 4 & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $p = 3$

e) $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ em $p = 1$

f) $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$ em $p = 2$

13. Sabe-se que f é contínua em 2 e que $f(2) = 8$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$

$$2 - \delta < x < 2 + \delta \Rightarrow f(x) > 7.$$

14. Sabe-se que f é contínua em 1 e que $f(1) = 2$. Prove que existe $r > 0$ tal que para todo $x \in D_f$

$$1 - r < x < 1 + r \Rightarrow \frac{3}{2} < f(x) < \frac{5}{2}.$$

16. Suponha que $|f(x) - f(1)| \leq (x-1)^2$ para todo x. Prove que f é contínua em 1.

18. Prove que a função $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ é contínua em 0.

21. Sejam f e g contínuas em $\mathbb{R}$ e tais que $f(x) = g(x)$ para todo x racional. Prove que $f(x) = g(x)$ para todo x real.

24. Seja $f(x) = x^3 + x$. Prove que

a) $|f(x) - f(2)| \leq 20\,|x - 2|$ para $0 \leq x \leq 3$
b) f é contínua em 2

25. Prove que $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ é contínua em 1.

Calcule e justifique

a) $\lim_{x \to 2} x^2$

b) $\lim_{x \to 1} (3x + 1)$

c) $\lim_{x \to -2} (4x + 1)$

d) $\lim_{x \to 10} 5$

e) $\lim_{x \to -9} 50$

f) $\lim_{x \to -1} (-x^2 - 2x + 3)$

g) $\lim_{x \to 4} \sqrt{x}$

h) $\lim_{x \to -3} \sqrt[3]{x}$

i) $\lim_{x \to -8} \sqrt{5}$

j) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

l) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$

m) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

n) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$

o) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

p) $\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \dfrac{9x^2 - 1}{3x + 1}$

q) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$

r) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{x - 3}$

s) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}}{x - 2}$

t) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2}$

u) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{5}}$

2. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases}$ em $p = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ L & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $p = 3$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x + 5} - \sqrt{10}} & \text{se } x \neq 5 \\ L & \text{se } x = 5 \end{cases}$ em $p = 5$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x}{x + 1} & \text{se } x \neq -1 \\ 2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$ é contínua em −1? E em 0? Por quê?

4. Calcule $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ sendo *f* dada por

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 2x^2 + x$

c) $f(x) = 5$

d) $f(x) = -x^3 + 2x$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

f) $f(x) = 3x + 1$

5. Calcule.

a) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 + x^2}{3x^3 + x^4 + x}$

c) $\lim_{h \to 0} (x^2 + 3xh)$

d) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

e) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$

f) $\lim_{x \to p} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{p}}{x - p}$ $(p \neq 0)$

g) $\lim_{x \to p} \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{p}}{x - p}$ $(p \neq 0)$

h) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6}$

i) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^4 + 3x - 4}$

j) $\lim_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x + 7} - \sqrt{14}}$

l) $\lim_{x \to p} \dfrac{x^3 - p^3}{x - p}$

m) $\lim_{x \to p} \dfrac{x^4 - p^4}{x - p}$

n) $\lim_{x \to p} \dfrac{x^n - p^n}{x - p}$ $(n > 0$ natural$)$

o) $\lim_{x \to p} \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}}{x - p}$

p) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$

q) $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$ onde $f(x) = \dfrac{1}{x}$

r) $\lim_{x \to p} \dfrac{g(x) - g(p)}{x - p}$ onde $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

s) $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ onde $f(x) = x^2 - 3x$

6. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{3} < x^2 + x < 2 + \frac{1}{3}.$$

7. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{2} < \frac{x^5 + 3x}{x^2 + 1} < 2 + \frac{1}{2}$$

9. Suponha que $\lim_{x \to p} f(x) = L$. Prove que existem $r > 0$, α e β tais que, para todo $x \in D_f$,

$$0 < |x - p| < r \Rightarrow \alpha < f(x) < \beta.$$

Interprete graficamente.

12. Prove: $\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to p} |f(x) - L| = 0$.

13. Prove: $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x)}{x - p} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to p} \dfrac{f(x)}{|x - p|} = 0$.

14. Suponha que existe $r > 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para $0 < |x - p| < r$ e que $\lim_{x \to p} f(x) = L$. Prove que $L \geq 0$.

    (*Sugestão*: Suponha $L < 0$ e use a conservação do sinal.)

15. Suponha f contínua em $\mathbb{R}$ e $f(x) \geq 0$ para todo x racional. Prove que $f(x) \geq 0$ para todo x.