Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo

Equação do Biocalor

Coordenadas cilíndricas

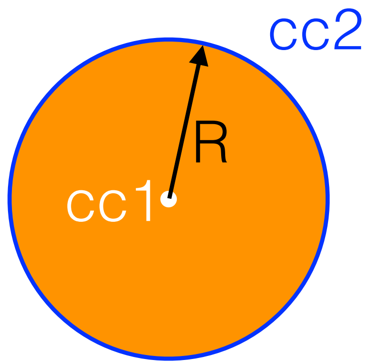
Equação da condução

Equação do biocalor em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

Problema 1D:

$$k\left(\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}\right)+\omega_b\rho_b c_b\left(T_{ar}-T\right)+\dot{q}=0$$



Condições de contorno:

$$-k\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R}=h(T-T_\infty) \qquad \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0}=0$$

Solução da equação do Biocalor

$$k\left(\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}\right)+\omega_b\rho_b c_b\left(T_{ar}-T\right)+\dot{q}=0$$

Mudança de variável:

$$\theta = T - T_\infty$$

$$\theta_a = T_{ar} - T_\infty$$

$$c^2 = \frac{\omega_b\rho_b c_b}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}+c^2(\theta_a-\theta)=-\frac{\dot{q}}{k}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}-c^2\theta=-\frac{\dot{q}}{k}-c^2\theta_a}$$

Solução geral

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}-c^2\theta=-\frac{\dot{q}}{k}-c^2\theta_a$$

Equação homogênea:

$$\boxed{\frac{d^2\theta_H}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta_H}{dr}-c^2\theta_H=0}$$

Equação não-homogênea:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}-c^2\theta=-\frac{\dot{q}}{k}-c^2\theta_a$$

Solução geral

Equação homogênea:

$$\frac{d^2\theta_H}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta_H}{dr} - c^2\theta_H = 0$$

Solução: $$\theta_H = C_1 I_0(cr) + C_2 K_0(cr)$$

I_0 é a função de Bessel modificada do 1º tipo de ordem zero como:

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \ldots$$

K_0 função de Bessel modificada do 2º tipo de ordem zero:

$$K_0(x) = (\ln 2 - e)I_0(x) - \left[I_0(x)\ln x - \frac{x^2}{4} - \ldots \right]$$

Condições de contorno

Mudança de variável:

$$\theta = T - T_\infty$$

$$\theta_a = T_{ar} - T_\infty$$

$$c^2 = \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k}$$

Condições de contorno:

$$-k \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R} = h(T - T_\infty) \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r=R} = -\frac{h}{k}\theta\left(R\right)$$

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{r=0} = 0$$

para $r = 0, \quad \theta \;\; finito$

Assim, obtemos a solução particular:

$$\theta = \left[\frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b} + \theta_{ar} \right] \left[1 - \frac{Bi}{c\,R\,I_1(cR) + Bi\,I_0(cR)} I_0(cr) \right]$$

Com: $c = \sqrt{\dfrac{\omega_b \rho_b c_b}{k}}$

Forma adimensional:

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_0} = \left[\frac{c\,R\,I_1(c^*) + Bi\,I_0(c^*) - Bi I_0(c^* r^*)}{c\,R\,I_1(c^*) + Bi\,I_0(c^*) - Bi} \right]$$

$$c^* = \sqrt{\frac{\omega_b \rho_b c_b R^2}{k}}$$

$$r^* = \frac{r}{R}$$

Assim: $\theta^* = \theta^*\left(r^*, c^*, Bi\right)$

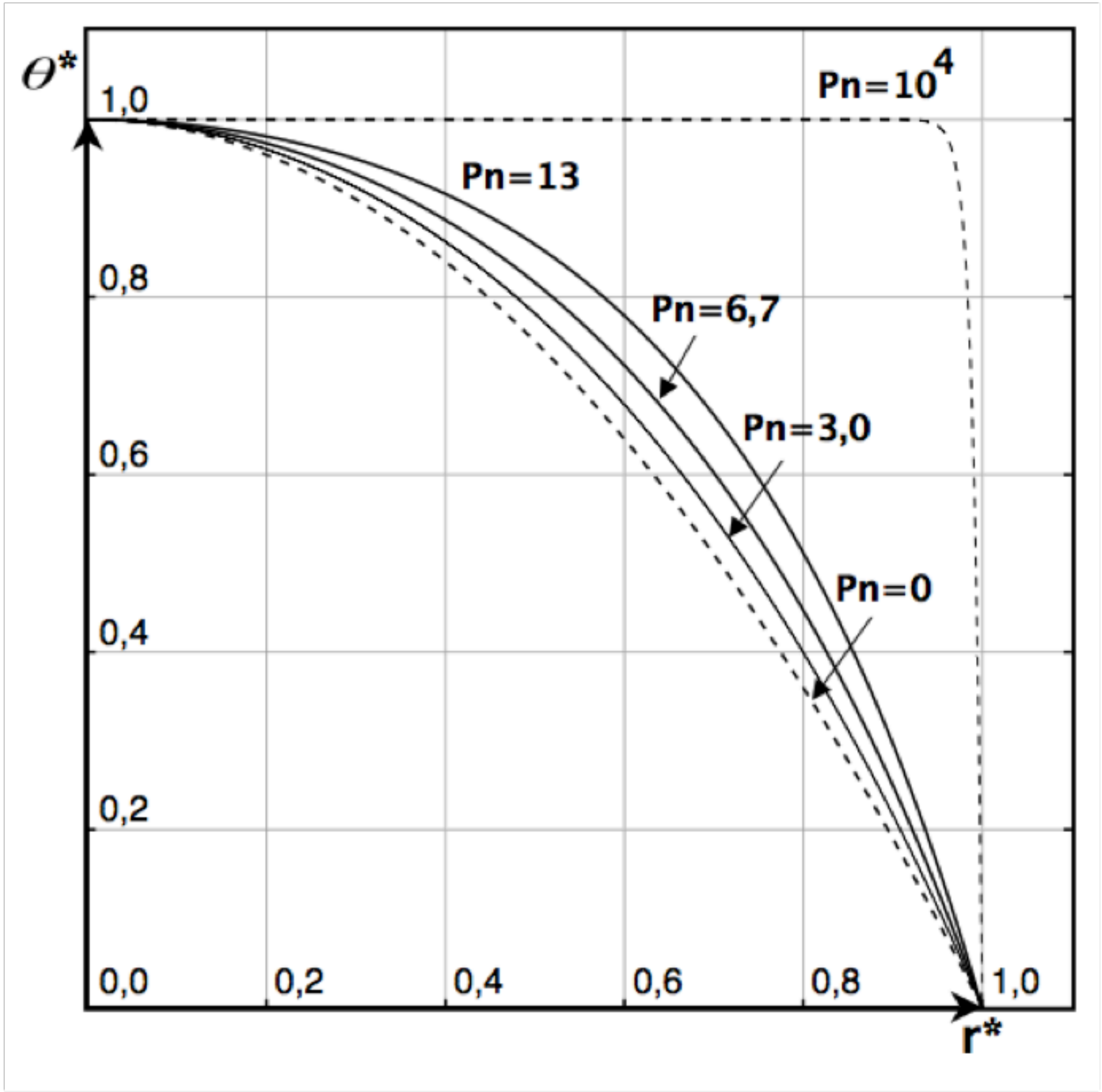
Simulação

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
ω_b	Taxa de perfusão por unidade de volume do tecido	3,0	ml/(min.100ml)
ρ_b	Massa específica média dos tecidos que compõe o antebraço	1000	kg/m^3
c_b	Calor específico médio dos tecidos que compõe o antebraço	4,19	kJ/(kg.K)
R	Raio médio do antebraço	4,5	cm
k	Condutividade térmica média dos tecidos que compõe o antebraço	0,63	W/(m.K)
Pn	Número de Pennes	6,7	-----

Número de Pennes: $$Pn = \frac{\omega_b \rho_b c_b R^2}{k}$$

$$c^* = \sqrt{Pn}$$

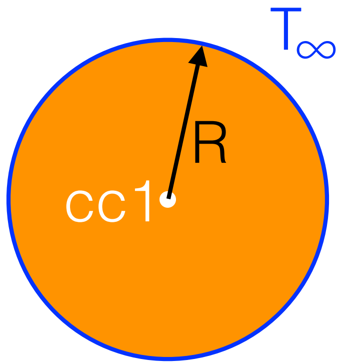
Simulação



Solução - temperatura superficial especificada

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_0} = \left[\frac{c\,R\,I_1(c^*) + Bi\,I_0(c^*) - Bi I_0(c^* r^*)}{c\,R\,I_1(c^*) + Bi\,I_0(c^*) - Bi} \right]$$

$$c^* = \sqrt{\frac{\omega_b \rho_b c_b R^2}{k}} \qquad r^* = \frac{r}{R}$$



$$T_s = T\left(r = R\right) \to T_\infty$$

Perfil adimensional:

$$\lim_{Bi \to \infty} \theta^* = \left[\frac{I_0(c^*) - I_0(c^* r^*)}{I_0(c^*) - 1} \right]$$

$$\boxed{\theta^* = \frac{I_0(c^* r^*) - I_0(c^*)}{1 - I_0(c^*)}}$$

Apêndices

Funções de Bessel e dedução da solução da equação diferencial

Funções de Bessel

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Função de Bessel de ordem zero

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

Função de Bessel de ordem um

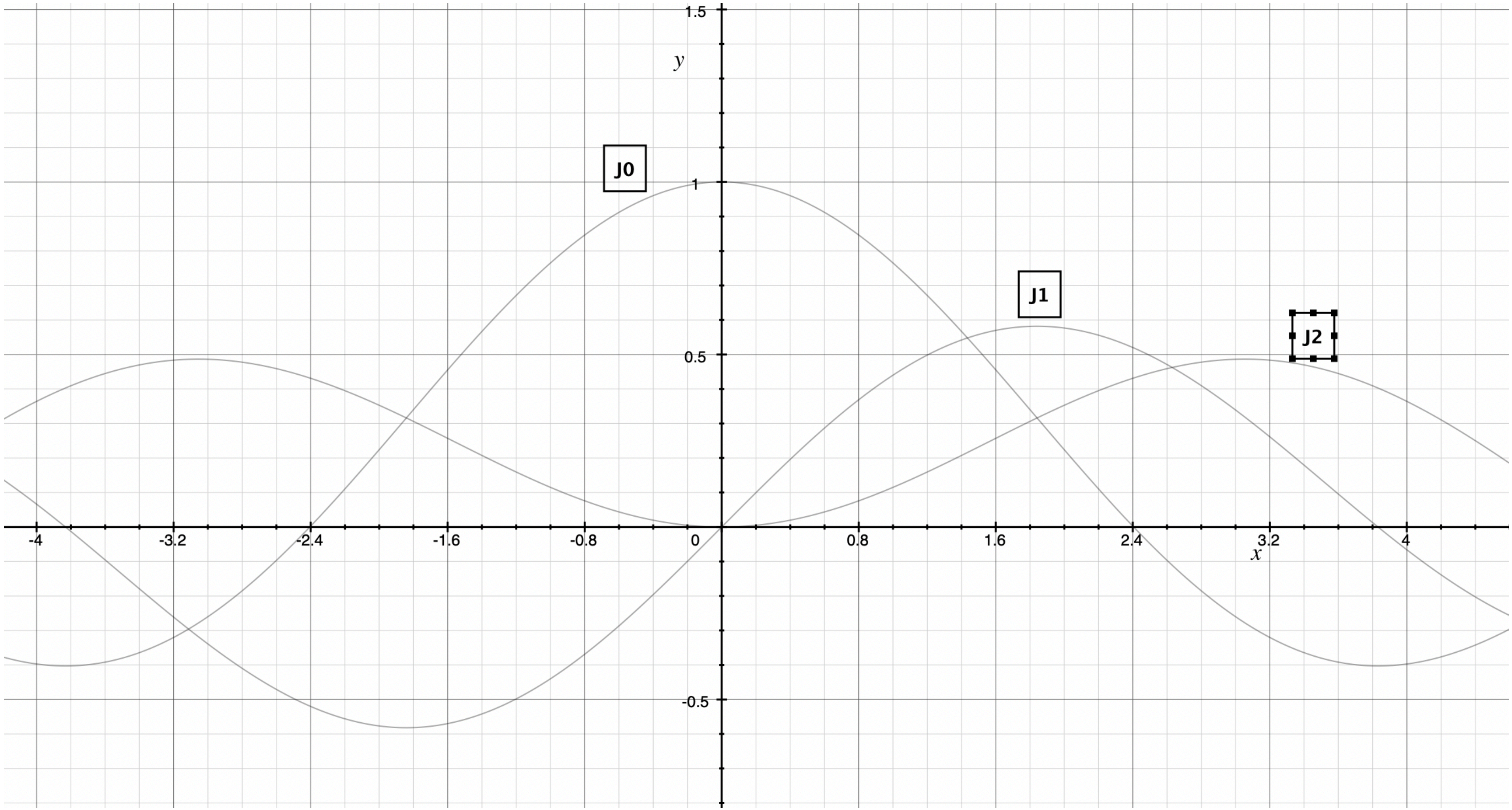
$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \dots$$

Função de Bessel de ordem n

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left[1 - \frac{x^2}{2 \cdot (2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2) \cdot (2n+4)} - \dots\right]$$

Funções de Bessel

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo



Funções de Bessel

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \qquad J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \dots$$

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x) \quad + \quad \frac{d}{dx}\left[xJ_1(x)\right] = xJ_0(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_0}{dx}\right) + xJ_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore x\frac{d^2J_0}{dx^2} + \frac{dJ_0}{dx} + J_0 x = 0$$

J_0, a função de Bessel de ordem zero, satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Equação de Bessel de ordem 0

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0$$

Y_0, a função de Bessel do 2º tipo de ordem 0, também satisfaz a equação diferencial anterior, sendo definida por:

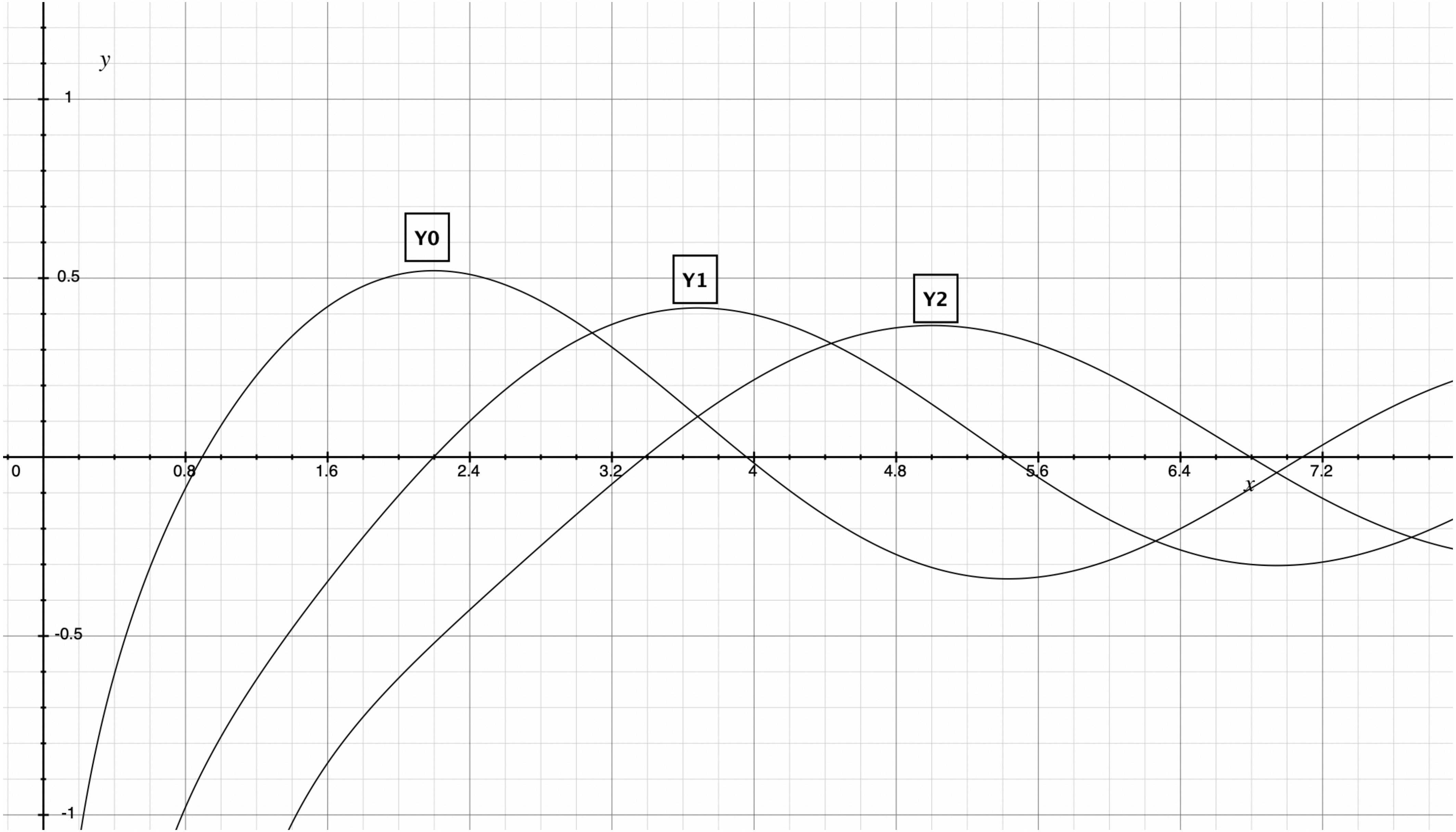
$$Y_0(x)=J_0\ln x+\frac{x^2}{4}+\frac{3x^4}{128}+\ldots$$

Portanto, a solução da eq. de Bessel é:

$$y=C_1J_0(x)+C_2Y_0(x)$$

Função de Bessel de 2º tipo

Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo



Solução da equação diferencial

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Desejamos resolver:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}-c^2\theta=0$$

Sabemos resolver:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0$$

Fazendo y = θ e x = z.r (dx = z.dr):

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}+z^2\theta=0$$

Fazendo z = i.c:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}-c^2\theta=0$$

Equação de Bessel modificada:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}-c^2\theta=0$$

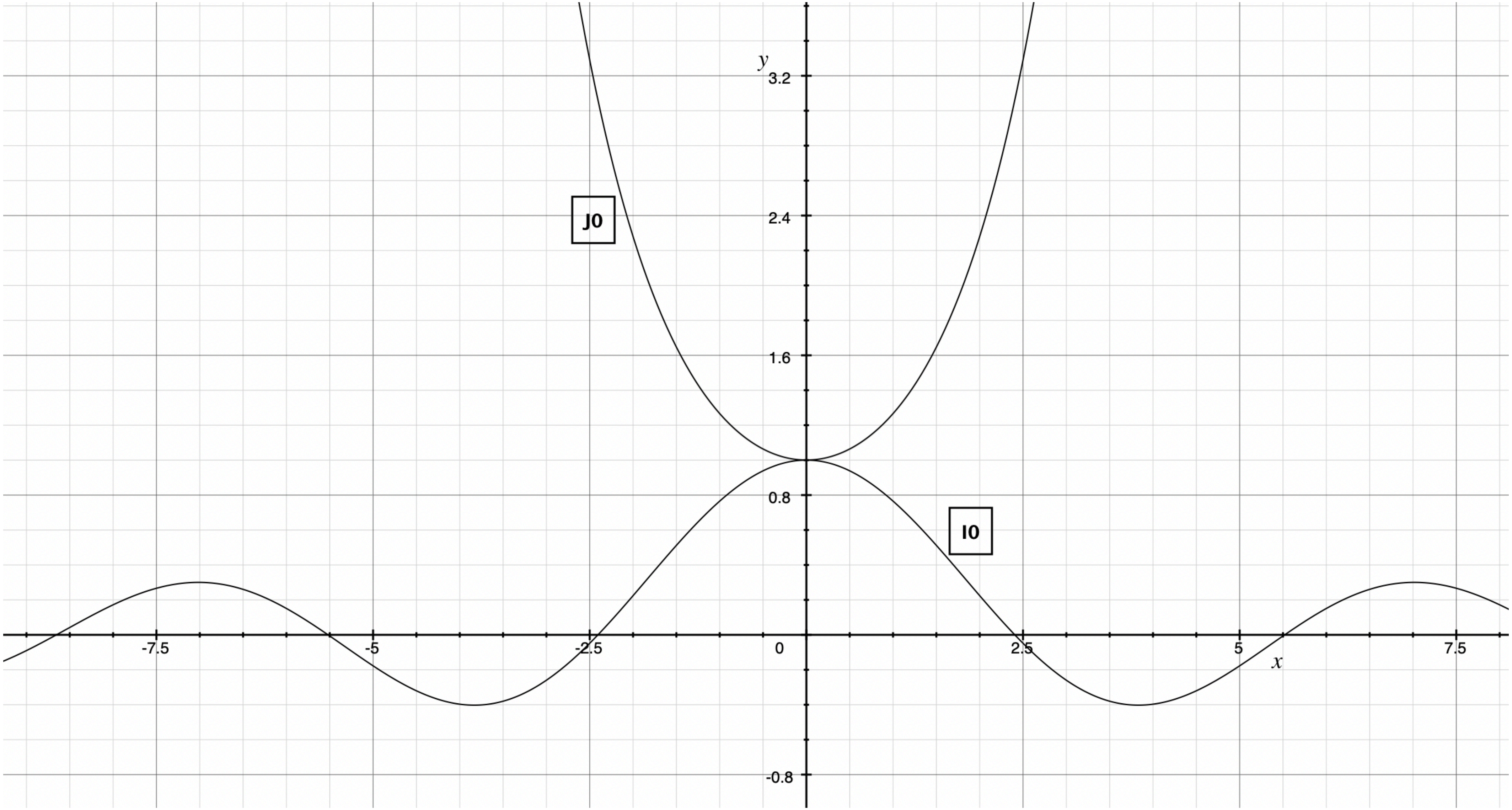
Solução particular:

$$\theta=J_0(i\cdot c\cdot r)$$

Função de Bessel modificada do 1º tipo de ordem zero como:

$$I_0(x)=J_0(ix)=1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots$$

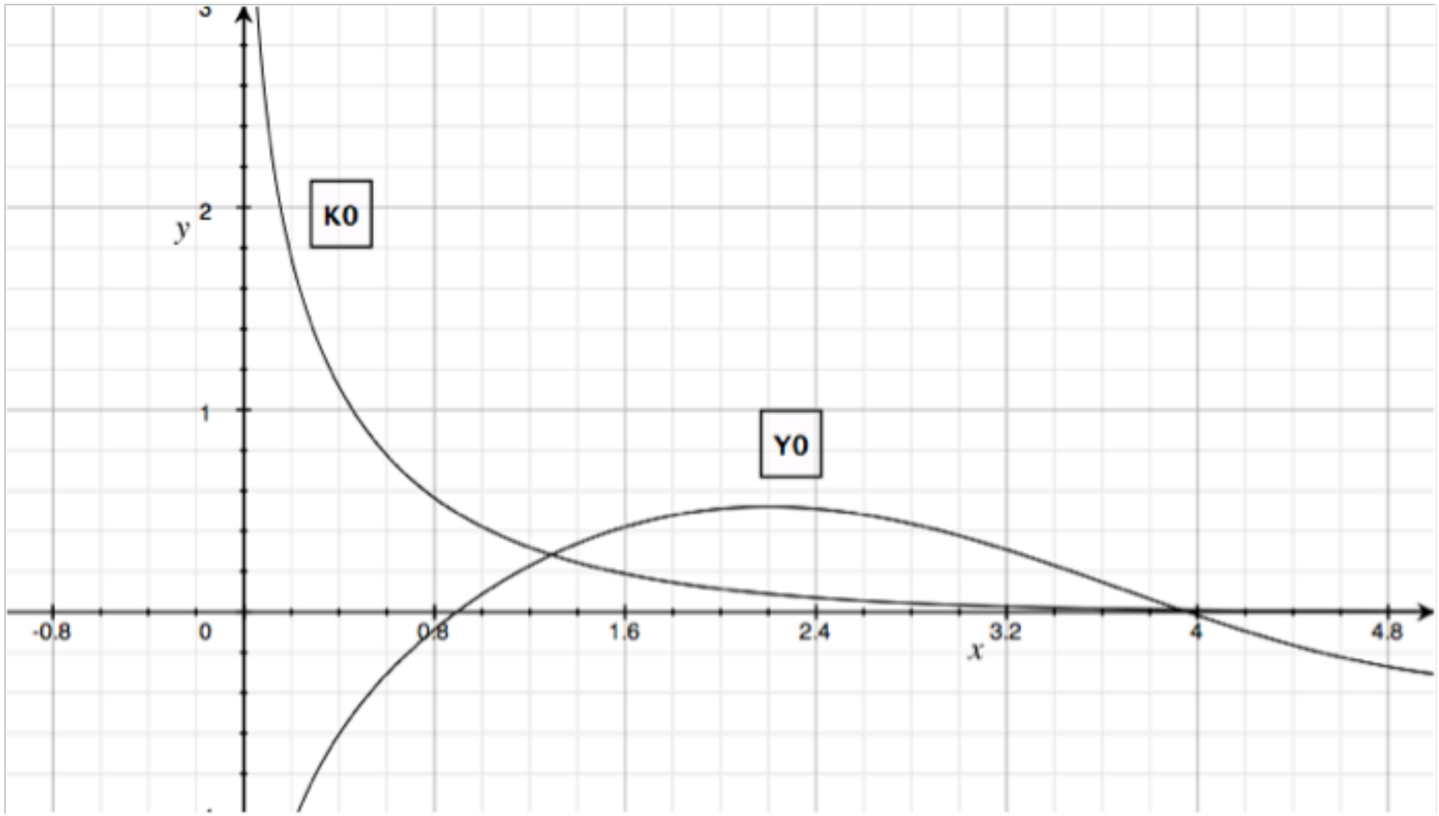
Função de Bessel modificada do 1º tipo



Função de Bessel modificada do 2º tipo

A função de Bessel modificada do 2º tipo de ordem zero também é solução da equação diferencial:

$$K_0(x) = (\ln 2 - e) I_0(x) - \left[I_0(x) \ln x - \frac{x^2}{4} - \dots \right]$$



Solução da equação diferencial

Equação :

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr} - c^2\theta = 0$$

Solução geral:

$$\theta = C_1 I_0(cr) + C_2 K_0(cr)$$

$$\frac{d^2\theta_H}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta_H}{dr}-c^2\theta_H=0$$

Homogênea

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}-c^2\theta=-\frac{\dot{q}}{k}-c^2\theta_a$$

Não-homogênea

Solução:

$$\theta_H=C_1I_0(cr)+C_2K_0(cr)$$

Solução geral:

$$\theta=C_1I_0(cr)+C_2K_0(cr)+\frac{\dot{q}}{c^2k}+\theta_a$$

Condições de contorno

Mudança de variável:

$$\theta = T - T_\infty$$

$$\theta_a = T_{ar} - T_\infty$$

$$c^2 = \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k}$$

Condições de contorno:

$$\left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r=R} = -\frac{h}{k}\theta\left(R\right)$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{r=0} = 0 \quad \text{ou} \quad \text{para } r = 0, \quad \theta \ \textit{finito}$$

Determinação das constantes

para $r = 0, \quad \theta \ \textit{finito} \longrightarrow \lim_{x \to 0} K_0(x) = \infty \quad \therefore C_2 = 0$

$$\theta = C_1 I_0(cr) + \frac{\dot{q}}{c^2 k} + \theta_a$$

$$\left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r=R} = -\frac{h}{k}\theta(R) \xrightarrow{\frac{dI_0(cr)}{dr} = cI_1(cr)} \frac{d\theta}{dr} = \frac{d}{dr}\left[C_1 I_0(cr) + \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b} + \theta_{ar}\right] = C_1 \frac{dI_0(cr)}{dr}$$

$$C_1 \frac{dI_0(cR)}{dr} = C_1 c I_1(cr) = -\frac{h}{k}\theta(R)$$

Determinação das constantes

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

$$C_1 \frac{dI_0(cR)}{dr} = C_1 c I_1(cr) = -\frac{h}{k}\theta\left(R\right)$$

$$C_1 \cdot c I_1(cR) = -\frac{h}{k}\left[C_1 I_0(cR) + \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b} + \theta_{ar}\right]$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = -\frac{\frac{Bi}{R}\left[\frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b} + \theta_{ar}\right]}{c I_1(cR) + \frac{Bi}{R} I_0(cR)}$$

com $Bi = \frac{hR}{k}$

Solução

$$\theta = -\frac{\dfrac{Bi}{R}\left[\dfrac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b} + \theta_{ar}\right]}{c I_1(cR) + \dfrac{Bi}{R} I_0(cR)} I_0(cr) + \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b} + \theta_{ar}$$

$$\theta = \left[\frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b} + \theta_{ar}\right]\left[1 - \frac{Bi}{c\,R\,I_1(cR) + Bi\,I_0(cR)} I_0(cr)\right]$$

Com: $c = \sqrt{\dfrac{\omega_b \rho_b c_b}{k}}$

Solução na forma adimensional

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

$$\theta = \left[\frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b} + \theta_{ar} \right] \left[1 - \frac{Bi}{c\,R\,I_1(cR) + Bi\,I_0(cR)} I_0(cr) \right]$$

$$\theta_0 = \left[\frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b} + \theta_{ar} \right] \left[1 - \frac{Bi}{c\,R\,I_1(cR) + Bi\,I_0(cR)} \right]$$

Forma adimensional:

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_0} = \left[\frac{c\,R\,I_1(c^*) + Bi\,I_0(c^*) - Bi I_0(c^* r^*)}{c\,R\,I_1(c^*) + Bi\,I_0(c^*) - Bi} \right]$$

Solução biocalor - adimensional

Forma adimensional:

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_0} = \left[\frac{c\,R\,I_1(c^*) + Bi\,I_0(c^*) - Bi I_0(c^* r^*)}{c\,R\,I_1(c^*) + Bi\,I_0(c^*) - Bi} \right]$$

$$c^* = \sqrt{\frac{\omega_b \rho_b c_b R^2}{k}}$$

$$r^* = \frac{r}{R}$$

Assim: $\theta^* = \theta^*\left(r^*, c^*, Bi\right)$

Forma adimensional:

$$\lim_{Bi\to\infty}\theta^* = \left[\frac{I_0(c^*) - I_0(c^* r^*)}{I_0(c^*) - 1}\right]$$

$$\theta^* = \frac{I_0(c^* r^*) - I_0(c^*)}{1 - I_0(c^*)}$$

Número de Pennes:
$$Pn = \frac{\omega_b \rho_b c_b R^2}{k}$$

$$c^* = \sqrt{Pn}$$