,

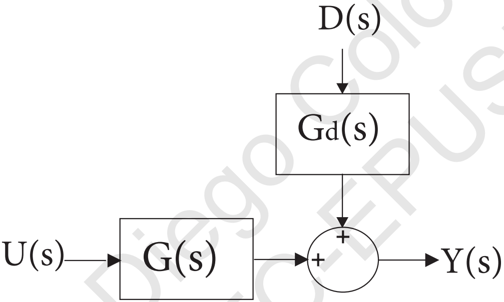
Controle H_∞ - Aula 1

Prof. Diego Colón

15 de setembro de 2020

Neste capítulo, revisa-se o conceito de sistema em malha fechada (com realimentação e alimentação direta), bem como as suas propriedades desejadas. Apresentam-se também os diversos tipos de sinais existentes em sistemas deste tipo, bem como os diversos blocos componentes. Por fim, analizam-se aspectos do projeto dos controladores, bem como as propriedades que estes fornecem ao sistema como um todo.

- **Planta**: sistema a ser controlado, que possui sinais de saida e entradas.
- **Saídas**: são as variáveis a serem controladas, medidas por sensores.
- **Entradas de controle**: sinais de entrada que temos liberdade de alterar a qualquer tempo,
- **Distúbios** sinais de entrada dados do problema, externos ao sistema.
- As plantas neste curso serão assumidas lineares e invariante no tempo (SLIT)

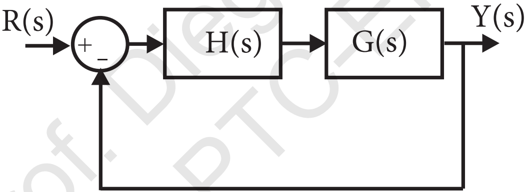


onde:

- $y(t)$ é a saída, ou variável controlada;
- $u(t)$ é a entrada ou variável de controle;
- $d(t)$ é o distúrbio.

- $Y(s)$, $U(s)$ e $D(s)$ são as respectivas transformadas de Laplace.
- $G(s)$ é a função de transferência que relaciona entrada de controle e saída.
- $G_d(s)$ é o *modelo de distúrbio*, que relaciona distúrbio com saída.
- No controle clássico, geralmente não fazemos projeto considerando modelo de distúrbio, ou seja, supomos que $D(s)$ e/ou $G_d(s)$ são identicamente nulos.

- No controle clássico, somente a função de transferência $G(s)$ é considerada para projeto.
- O objetivo é projetar um controlador $H(s)$ de



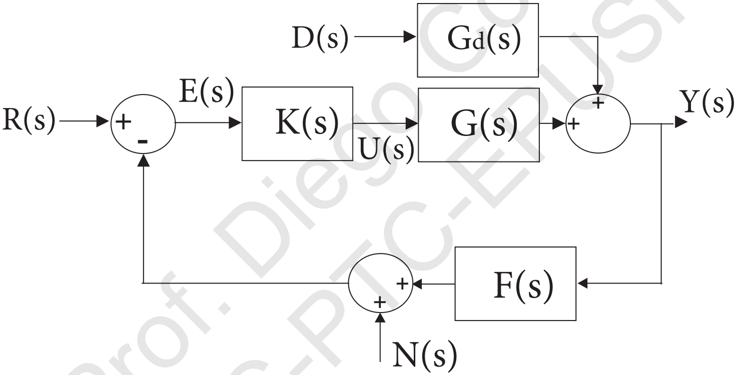
- O sistema em malha fechada deve ser estável e atender requisitos de desempenho.
- Normalmente se deseja que o erro teórico de seguimento de referencia $E_t(s) = R(s) - Y(s)$ seja pequeno.
- O modelo da planta $G(s)$ é levantado nos processos de *modelagem* ou *identificação de sistemas*.
- Necessidade de o sistema ser robusto em malha fechada (propriedade provida pelo controlador).

A tarefas do controlador $H(s)$:

- Calcular, em tempo real e durante o funcionamento do sistema, o sinal de controle $U(s)$, que deve:
- Estabilizar o sistema em MF, para qualquer que seja o seu estado inicial,
- Fazer com que o sinal de saída $Y(s)$ siga "de perto"o sinal de referência $R(s)$, segundo algum critério de desempenho.

- A tarefa do projetista de controle é chegar a um controlador $H(s)$ que atenda estes requisitos
- As informações sobre $G(s)$ são implicitamente utilizadas durante o projeto, embutidas na técnica utilizada.
- $H(s)$ utiliza a leitura dos sensores $Y(s)$ bem como informações sobre o modelo $G(s)$ que estão armazenadas nele.
- Técnicas clássicas: impôr posições aos pólos e zeros de malha fechada (lugar geométrico das raízes) ou formatos específicos dos diagramas de Bode da *função de transferência em malha aberta* $L(s) = G(s)H(s)$ (métodos de resposta em frequência)

Para este curso, adotamos uma visão mais geral de sistema de controle em malha fechada (MF):



$$E = R - (N + FY) \;\; ; \;\; Y = GKE + G_d D$$

- **Modelo da planta**: função de transferência $G(s)$,
- **Controlador**: representado por $K(s)$ e
- $F(s)$ normalmente representa a dinâmica dos sensores.
- $E(s)$ é o sinal de erro.
- $R(s)$ é o sinal de referência.
- $N(s)$ é o ruído/erro de medida.
- $U(s)$ é o sinal de controle.
- $D(s)$ é o sinal de distúrbio que pode ser medido mas não alterado.

Controle Robusto 3

- O modelo da planta $G(s)$ já inclui os modelos dos atuadores e, frequentemente dos sensores.
- Vamos assumi então $F(s) = I$ (matriz identidade).
- $G_d(s)$ continua sendo o modelo de distúrbios.
- As técnicas de projeto de controle robusto generalizam a ideia do projeto clássico por resposta em frequência.
- Conceitos como diagramas de Bode e de Nyquist serão generalizados para sistemas MIMO.

- Tanto no Controle Clássico quanto no Robusto se usa a função de transferência de malha aberta $L(j\omega) = G(j\omega)K(j\omega)$ (os chamados métodos *loop-shaping*),
- Em Controle Robusto outras funções de transferência são usadas, tais como S e T, que serão definidas a seguir.
- Considerando $F \equiv 1$, tem-se que a saída pode ser relacionada com as entradas conforme:

$$E = R - (N + Y) \ ; \ \ Y = GKE + G_d D$$

$$Y = GKR - GKN + GKY + G_d D$$

$$Y = \underbrace{\frac{GK}{1 + GK}}_{T} R + \underbrace{\frac{1}{1 + GK}}_{S} G_d D - \underbrace{\frac{GK}{1 + GK}}_{T} N, \qquad (1)$$

- S é a chamada *função sensibilidade*
- T é a *função sensibilidade complementar* (também conhecida como função de transferência de MF).
- Ambas as funções são de malha fechada (FTMF) e $S + T = 1$.
- Podemos ainda escrever que $S = 1/(1 + L)$ e $T = L/(1 + L)$.
- Outra relação importante, semelhante a esta, relaciona o *erro teórico* $E_t = Y - R$ (ou seja, o erro não afetado pelo ruido N) com as mesmas entradas:

$$E_t = -SR + SG_d D - TN. \tag{2}$$

Controle Robusto 6

- Se deseja que este erro seja o menor possível em todas as faixas de frequência.
- Normalmente R e D possuem maior amplitude nas baixas frequências, logo:
- S deve atenuar bastante nesta faixa, inclusive para compensar altos ganhos que G possa ter.
- N costuma ter maior amplitude nas altas frequências, logo:
- T deve atenuar nesta outra faixa.
- Felizmente, é o que acontece por conta de $S + T = 1$.

Controle Robusto 7

- Outra importante relação é:

$$U = KS(R - G_d D - N), \tag{3}$$

- Esta relaciona o sinal de controle U com os sinais de entrada.
- KS é outra Função de Transferência em Malha fechada, que também será usada em projetos.
- As três FTMF, ou seja, S, T e KS, são importantes para se analisar e projetar o sistema de controle robusto.

- O projetista deve dar formato da resposta em frequência para estas três FTMF (tanto SISO, através do diagrama de Bode de módulo, quanto MIMO, através dos *valores singulares*)
- Em particular, um imporante parâmetro de uma FTMF é a chamada *norma* H_∞, representada por $\|.\|_\infty$, que será definida mais adiante, e que é de onde vem o nome da teoria aqui exposta.

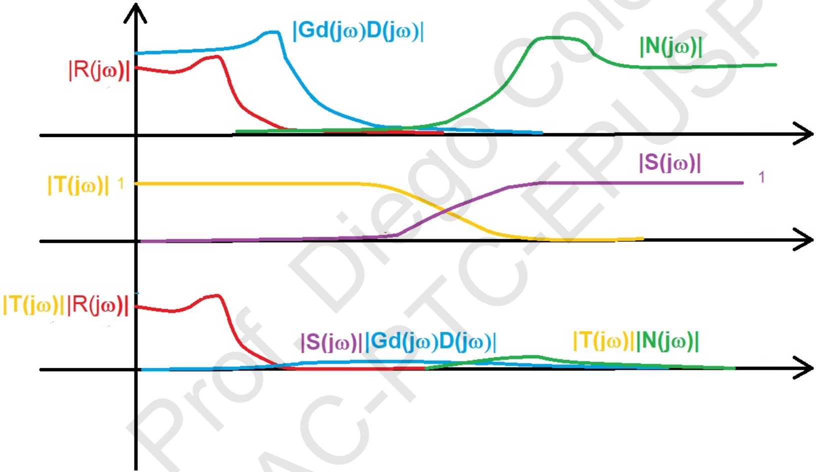
Controle Ideal 1

- Idealmente, o sinal controlado $y(t)$ deveria seguir perfeitamente o sinal de referência $r(t)$ sem influência do distúrbio $d(t)$ e do ruído/erro de medida $n(t)$.
- Para isto acontecer, deveríamos ter $T \equiv 1$, o que equivaleria a $S \equiv 0$.
- Nesta situação ideal, só teríamos perfeito seguimento de referência se $N \equiv 0$, ou seja, se não houvesse erro de medida do sensor. Isto pois na situação ideal, tem-se que $y = r - n$.

Controle Ideal 2

- Não se consegue $T(j\omega) \equiv 1$, mas é possível que $|T(j\omega)|$ seja aproximadamente um em uma determinada faixa de frequências.
- Nesta faixa, $|S(j\omega)|$ fica aproximadamente zero.
- Tipicamente, o espectro do sinal de referência $r(t)$ se concentra nas baixas frequências na maioria das aplicações

Controle Ideal 3

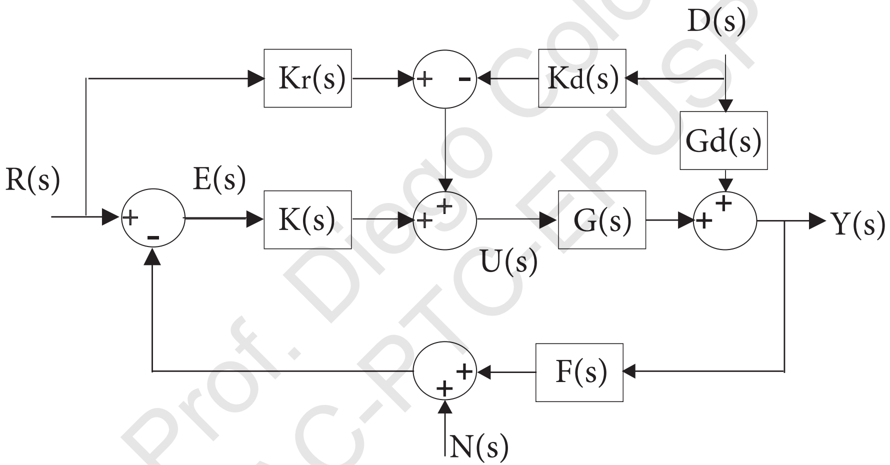


Controle Ideal 4

- Para haver bom seguimento de referência, $|T(j\omega)|$ deve ser 1 nas baixas frequências, pois assim $|T(j\omega)R(j\omega)| \simeq |R(j\omega)|$
- $|D(j\omega)|$ também se concentra tipicamente nas baixas frequências (curva azul). Como $|S(j\omega)| \simeq 0$ por conta da identidade $T + S = 1$, temos $|S(j\omega)G_d(j\omega)D(j\omega)| \simeq 0$
- $|N(j\omega)|$ se concentra nas altas frequências, como pode ser visto na mesma figura, em verde. Este aparece multiplicado por T, e $|T(j\omega)| \simeq 0$ nas altas frequências, $|T(j\omega)N(j\omega)| \simeq 0$.

Controle Ideal 5

- $|Y(j\omega)|$ será a soma vetorial/complexa da equação acima. Como a amplitude das duas últims parcelas da soma são pequenas, o resultado é que $|Y(j\omega)| \simeq |R(j\omega)|$, desde que T e S satisfaçam as propriedades assumidas.
- Uma análise semelhante pode ser feita para a equação do erro. Então $|E(j\omega)| \simeq 0$ para todas as frequências.
- Como $T = GK(I + GK)^{-1}$ e $S = (I + GK)^{-1}$, e como G não pode ser alterado, para que T e S tenham estas propriedades, deve projetar um controlador $K(s)$ adequado.


D(s)
Kr(s)
+
-
Kd(s)
Gd(s)
R(s)
E(s)
+
-
K(s)
+
+
G(s)
+
+
Y(s)
U(s)
+
+
F(s)
N(s)

Controle com Dois Graus de Liberdade 2

- Tal sistema tem um número maior de controladores (dois ou mais)
- Permite que especificações mais exigentes sejam atendidas.
- Além do controlador de realimentação $K(s)$, o sistema também possui dois controladores do tipo *feedfoward*: $K_r(s)$ e $K_d(s)$.
- Vamos assumir que $N(s) \equiv 0$ e que $F(s) \equiv 1$.

Neste caso, tem-se que $E = R - Y$, de modo que o sinal de controle e a saída ficam:

$$U = KE + K_r R - K_d D \tag{4}$$
$$Y = GU + G_d D \tag{5}$$

Após algumas substituições, tem-se:

$$Y = GK(R - Y) + GK_r R - GK_d D + (G_d - GK_d)D \tag{6}$$

o que vai resultar na relação entre saída e entradas:

$$Y = \underbrace{\frac{GK}{1 + GK}}_{T} R + \underbrace{\frac{1}{1 + GK}}_{S} GK_r R + \underbrace{\frac{1}{1 + GK}}_{S} (G_d - GK_d)D, \tag{7}$$

Controle com Dois Graus de Liberdade 4

- Se $G_d - GK_d \equiv 0$, poderíamos eliminar completamente o efeito do distúrbio na saída.
- Essa é a principal vantagem em se usar feedforward de distúrbio (juntamente com realimentação, ou *feedback*)
- É preciso ter sensor para medir $d(t)$
- Temos que definir o controlador feedfoward:

$$K_d = G^{-1} G_d$$

ou seja, um função de transferência dependente da inversa de outra.

Controle com Dois Graus de Liberdade 5

- Matematicamente, isso sempre é possível.
- Na maioria dos casos, $G(s)$ tem mais pólos do que zeros, o que pode significar que $K_d(s)$ poderia ser não realizável (*inversão explícita da planta*).
- Outra situação complicada: $G(s)$ é um sistema de estável de *fase não-mínima*, ou seja, com zeros no semi-plano direito.
- Neste caso, $K_d(s)$ seria instável, o que não é nada recomendável.
- Na prática, K_d deve $G^{-1}G_d$ na faixa de frequências onde o distúrbio é relevante, de modo a reforçar o efeito de S nesta faixa.

A expressão do erro para um sistema com dois graus de liberdade é:

$$E = Y - R = TR + SGK_rR + S(G_d - GK_d)D - R$$

o que vai resultar na expressão:

$$E = S(GK_r - 1)R + S(G_d - GK_d)D$$

- Qual a utilidade da alimentação direta de R, através do controlador/filtro $K_r(s)$?

- Para anular o erro, idealmente temos que fazer $K_r = G^{-1}$ e $K_d = G^{-1}G_d$.
- Em ambos os casos, teríamos que inverter explicitamente a planta, o que já vimos que é complicado as vezes.
- Na prática, entretanto, podemos fazer $K_r(s)$ aproximadamente igual a $G^{-1}(s)$, sobretudo na região onde se concentra o espectro de $R(s)$, o que constribuiria para $S(GK_r - 1)$ ser ainda mais próximo de zero nesta faixa,
- Por conta disso, o erro ser menor ainda.

O que é robustez ? 1

- Robustez significa, *capacidade do sistema manter o seu funcionamento adequado em ambiente adverso*.
- No contexto de Controle Robusto, entretanto, uma definição mais precisa é necessária.
- Define-se dois conceitos de robustez relacionados:
    1. *robustez de estabilidade*, que significa a capacidade do sistema manter a estabilidade mediante incertezas no modelo da planta,
    2. *robustez de desempenho*, que significa a capacidade do sistema manter o mesmo desempenho mediante incertezas no modelo da planta.

O que é robustez ? 2

- Essas incertezas podem advir de diversas fontes, tais como uma modelagem imperfeita, um processo de *linearização* ou por variação no tempo
- Em geral, nos cursos de controle clássico, o conceito de robustez é pouco tratado, sendo mencionado como um requisito a ser imposto nas *margens de ganho e de fase*
- Neste curso, iremos introduzir definições mais precisas de robustez, que irão depender de conceitos mais sofisticados, tais como *família de plantas*, que abarcam todas as incertezas no modelo.

O que é robustez ? 3

- Controle robusto vem se desenvolvendo ao longo das últimas décadas.
- Atualmente já abarca uma ampla gama de classes de sistemas, desde os lineares mais simples, até os não-lineares e estocásticos.
- A teoria que será apresentada aqui, que está bem desenvolvida e consolidada, é a teoria de controle H_∞ (H infinito),
- O sistema a ser controlado é linear e invariante no tempo (a menos das incertezas).

Há várias vantagens que podem ser citadas sobre essa teoria, se compararmos com o controle clássico. Dentre elas:

1. Formalização precisa do conceito de robustez,
2. Funciona tanto para sistemas com uma entrada e uma saida (SISO) ou com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO),
3. Para quem já conhece controle clássico, muitos conceitos são estendidos naturalmente.

Desvantagem da teoria H_∞: sua extensão para sistemas não-lineares, da forma como está hoje, é difícil de ser utilizada. Uma técnica de análise de robustez que funciona também para sistemas não-lineares e vem ganhando notoriedade nos últimos anos é a do *polynomial chaos*, que apesar de ser de natureza estocástica, pode ser implementada computacionalmente.