MAP0217 - Cálculo Diferencial
MAT0311 - Cálculo Diferencial e Integral V
1a. Prova - Peso 1

2º Semestre de 2020

1. **Entrega: Até 29/09/2020**
2. Para nota serão consideradas questões cujos valores somem no máximo 10 pontos, escolhidas dentre as Questões Q1 e Q10.
Para compor esses 10 pontos, será considerada a melhor escolha para cada aluno.

BOA PROVA!

PARTE I - Topologia do $\mathbf{R}^n$

Exercício 1 Mostre que em $\mathbf{R}^2$ o "quadrado sem contorno" $(0,1)\times(0,1)\subset\mathbf{R}^2$ é um subconjunto aberto.

Questão 1 *(1.0)* Mostre que se $F\subset\mathbf{R}^n$ é fechado e $A\subset\mathbf{R}^n$ é aberto, então $F\setminus A$ é fechado.

Questão 2 *(1.5)* Na tabela abaixo, $M=\mathbf{R}$ ou $M=\mathbf{R}^2$ conforme indicado, e X é um subconjunto de M. Considere $\cup_n A_n=\cup_{n\in\mathbf{N}}A_n$. Complete as lacunas com os subconjuntos correspondentes:

M	$X\subset M$	X°	∂X	X'	$\overline{X}$	X é aberto?	X é fechado?
$\mathbf{R}$	$\cap_n\left(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$						
$\mathbf{R}$	$\cup_n\left[\frac{1}{3n},\frac{1}{3n-1}\right]$						
$\mathbf{R}^2$	$\cup_n B_{\frac{1}{3n}}[0]\setminus B_{\frac{1}{3n+1}}(0)$						

Exercício 2 Decida se cada subconjunto de $\mathbf{R}^2$ abaixo tem ou não algum ponto de acumulação. Justifique sua resposta.
(a) $\{(1/n,1/n)\ |n\in\mathbf{N}\}$. (b) $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. (c) $A\times\{0\}$ onde $A\subset\mathbf{R}$ é aberto, não vazio.

PARTE II - Topologia de Espaços Métricos

Exercício 3 Sejam (M,d) um espaço métrico e $H\subset M$ aberto não vazio, e $p\in H$. Mostre que $H\setminus\{p\}$ é aberto.

Exercício 4 Seja (M,d) um espaço métrico, e $A\subset M$ aberto, não vazio. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, e justifique:

(a) *A é uma união de bolas abertas.*

(b) *A é uma união de bolas fechadas.*

Questão 3 *(1.5)* Na tabela abaixo, considere M como espaço métrico com a métrica discreta, e seja X o subconjunto de M indicado. Considere $\cup_n A_n = \cup_{n\in\mathbf{N}} A_n$. Complete as lacunas com os subconjuntos correspondentes:

M	$X \subset M$	X°	∂X	X'	$\overline{X}$	X é aberto?	X é fechado?
$\mathbf{R}$	$\cap_n \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$						
$\mathbf{R}$	$\cup_n \left[\frac{1}{3n}, \frac{1}{3n-1}\right]$						
$\mathbf{R}^2$	$\cup_n B_{\frac{1}{3n}}[0] \setminus B_{\frac{1}{3n+1}}(0)$						

Questão 4 *(2.0)* Seja $M = \mathbf{R}^2$ com a métrica $\widetilde{d}(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, d_*(x_2, y_2)\}$, onde $d_*(t,s) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq s \\ 0 & \text{se } t = s \end{cases}$ é a métrica discreta em $\mathbf{R}$.

Considere os subconjuntos de M dados, e complete a tabela:

$X \subset M$	X é aberto?	Justificativa	X é limitado?	Justificativa
$A = (0,1) \times (0,1)$				
$B = [0,1] \times [0,1]$				
$C = [0,1] \times (0,1)$				
$D = (0,1) \times [0,1]$				
$A = \mathbf{N} \times (0,1)$				
$B = (0,1) \times \mathbf{N}$				
$C = \mathbf{N} \times [0,1]$				
$D = [0,1] \times \mathbf{N}$				

Exercício 5 Mostre que as normas $\| \|_2$ e $\| \|_\infty$ são equivalentes em $V = \mathbf{R}^k$.

PARTE III - Sequências em $\mathbf{R}^k$

Exercício 6 Seja $\left(x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ uma sequência em $M = \mathbf{R}^k$
[respectivamente, em $M = {\mathbf{R}_+^*}^k = (0,\infty)\times(0,\infty)\times\cdots\times(0,\infty) \subset \mathbf{R}^k$]
e seja $\overline{x} = (\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^k) \in M = \mathbf{R}^k$
[respectivamente, em $\overline{x} = (\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^k) \in M = {\mathbf{R}_+^*}^k = (0,\infty)\times(0,\infty)\times\cdots\times(0,\infty) \subset \mathbf{R}^k$].

Mostre que vale a afirmação:

$$x_n \to \overline{x} \iff x_n^i \to \overline{x}^i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Questão 5 *(1.0)* Decida se cada uma das sequências abaixo converge em $\mathbf{R}^3$, e em caso afirmativo, calcule seu limite. Justifique suas afirmações.

(a) $x_n = (\frac{1}{n} + e^{-n}, \frac{\sin n}{n}, a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n),\ n \in \mathbf{N}$, onde $a \in (-1, 1)$.

(b) $x_n = (ne^{-n}, \cos\frac{1}{n}, (-1)^n),\ n \in \mathbf{N}$.

(c) $x_n = (2, \frac{\sin n}{n}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}),\ n \in \mathbf{N}$.

Questão 6 *(1.0)* Mostre que em $\mathbf{R}^k$, toda sequência de Cauchy é convergente, isto é, ele é um espaço métrico completo.

PARTE IV - Sequências em Espaços Métricos

Questão 7 *(1.0)* Releia a questão 6.

A afirmação continua válida para sequências em M e $\overline{x} \in M$ se usarmos

$$M = {\mathbf{R}_+^*}^k = (0,\infty)\times(0,\infty)\times\cdots\times(0,\infty)$$

com a distância

$$d(x,y) = d((x_1,\ldots,x_k),(y_1,\ldots,y_k)) = \|(x_1,\ldots,x_{k-1}) - (y_1,\ldots,y_{k-1})\| + |\tfrac{1}{x_k} - \tfrac{1}{y_k}|?$$

Exercício 7 Mostre que se uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ é convergente num espaço métrico (M, d), então ela é limitada.

Exercício 8 Mostre que se uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ é limitada num espaço métrico (M, d) e $p \in M$, então existe $r > 0$ tal que $x_n \in B_r(p), \forall n \in \mathbf{N}$.

Exercício 9 Mostre que se uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ é convergente num espaço métrico (M, d), então ela é uma sequência de Cauchy.

Questão 8 *(2.0)* Seja $M = C([0,1])$ com a norma $\| \|_i$ e considere em M a sequência $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definida por $f_n(t) = t^n, t \in [0,1]$. Seja $\overline{f} \in M$ a função nula.

Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, e justifique sua resposta.

(a) *Com a métrica dada por $\| \|_1$, a sequência $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge para $\overline{f}$.*

(b) *Com a métrica dada por $\| \|_2$, a sequência $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge para $\overline{f}$.*

(c) *Com a métrica dada por $\| \|_\infty$, a sequência $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge para $\overline{f}$.*

PARTE V - Continuidade de funções de $\mathbf{R}^p$ em $\mathbf{R}^q$

Exercício 10 Sejam $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ e $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_p) \in \mathbf{R}^p$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1, x_2 \ldots, x_p) \\ &= (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots, f_q(x_1, x_2, \ldots, x_p)) \\ &= (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x)). \end{aligned}$$

(a) Usando a definição de continuidade, mostre que
f é contínua em $\overline{x} \iff f_1, f_2, \ldots, f_q : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ são contínuas em $\overline{x}$.

(b) Usando a caracterização de continuidade por sequências, mostre que
f é contínua em $\overline{x} \iff f_1, f_2, \ldots, f_q : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ são contínuas em $\overline{x}$.

Questão 9 *(1.0)* Decida se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, e justifique.
"A função $H(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$
é contínua em $(0,0)$."

Questão 10 *(1.0)* Decida se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, e justifique.
"A função $G(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$
é contínua em $(0,0)$."