**PME 3534 – Técnicas Experimentais e Computacionais em Biomecânica em Sistemas Vasculares**

**Aula: 16/09/20**

**Prof. Jayme P. Ortiz**

**Introdução ao Método dos Volumes Finitos: Problemas de Difusão Pura**

$$\frac{\partial(\rho\,\phi)}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\,\phi\;\vec{V}\right) = \mathrm{div}\left(\Gamma\,\mathrm{grad}\,\phi\right) + S_\phi \qquad \text{(I)}$$

No case de Difusão Pura, Unidimensional, Permanente, a equação (I) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right) + S_\phi = 0 \qquad \text{(II)}$$

Utilizando o método de volumes finitos, a equação (II) pode ser escrita como:

$$\Gamma_e A_e\left(\frac{\phi_E-\phi_P}{\delta x_{PE}}\right) - \Gamma_w A_w\left(\frac{\phi_P-\phi_W}{\delta x_{WP}}\right) + \left(S_u + S_P\phi_P\right) = 0 \qquad \text{(III)}$$

Ou

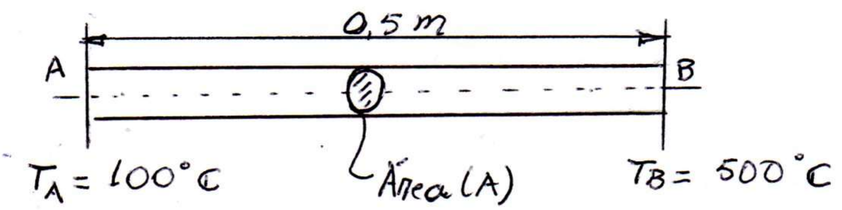
$$\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}\,A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}\,A_w - S_P\right)\phi_P = \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}\,A_w\right)\phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}\,A_e\right)\phi_E + S_u \qquad \text{(IV)}$$

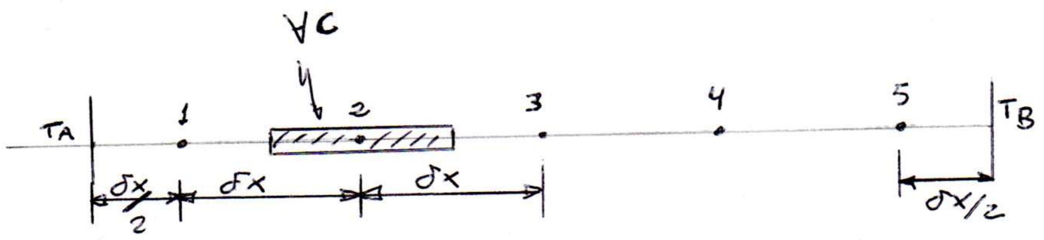
**Exercício 1:** Considere uma haste metálica isolada capaz de conduzir calor, mantendo-se as extremidades A e B nas temperaturas 100ºC e 500ºC, respectivamente. Admitindo-se que o problema é unidimensional determinar a distribuição de temperatura na haste para a condição de estado permanente.

***Dados:***

- *Condutividade térmica:* *k = 1000 W/m.K;*

- *Área da seção transversal: A = 10 x 10$^{-3}$ m$^2$*




$$\delta x = 0{,}1\ m$$

Considera-se no exercício a utilização de uma malha com 5 nós. Para cada um dos nós 2, 3, 4 os valores de temperatura nos nós a este e oeste são avaliados com pontos nodais. As equações discretizadas para estes nós podem ser escritas como:

$$\left(\frac{k_e}{\delta x_{PE}}\ A_e + \frac{k_w}{\delta x_{WP}}\ A_w\right) T_P = \left(\frac{\mathrm{k}_w}{\delta x_{WP}}\ A_w\right) T_W + \left(\frac{k_e}{\delta x_{PE}}\ A_e\right) T_E$$

Admitindo:

*$k_e$= $k_w$= k*

*$A_e$= $A_w$= A , tem-se que:*

$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E$ *, sendo:*

$$a_W = \frac{k}{\delta x} A$$

$$a_E = \frac{k}{\delta x} A$$

$$a_P = a_W + a_E = 2\,\frac{k}{\delta x}A$$

Para a solução dos nós 1 e 5 deve-se levar em consideração as condições das fronteiras.

A integração da equação II para a condição de fronteira do nó 1, conduz:

Nesta equação o fluxo através da fronteira A do Volume de controle foi aproximado assumindo uma distribuição linear de temperatura entre o ponto *A* e o ponto nodal *P.* Rearranjando a equação:

$$kA\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - kA\left(\frac{T_P - T_A}{\frac{\delta x}{2}}\right) = 0$$

ou

$$\left(\frac{k}{\delta x}\,A + \frac{2k}{\delta x}\,A\right)T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{k}{\delta x}\,A\right)T_E + \left(\frac{2k}{\delta x}\,A\right)T_A$$

ou: $a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u$

*Onde:*

$$a_W = 0$$

$$a_E = \frac{k}{\delta x}A$$

$$a_P = a_W + a_E - S_P = 2\,\frac{k}{\delta x}A$$

$$S_P = -2\,\frac{k}{\delta x}A$$

$$S_u = 2\,\frac{kA}{\delta x}T_A$$

A equação discretizada do nó 5 pode ser obtida analogamente, resultando:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u$$

Onde:

$$a_W = \frac{k}{\delta x} A$$

$$a_E = 0$$

$$a_P = a_W + a_E - S_P$$

$$S_P = -2 \frac{k}{\delta x} A$$

$$S_u = 2 \frac{kA}{\delta x} T_B$$

Sendo:

$$\frac{kA}{\delta x} = 100$$

Trabalhando os coeficientes das equações resulta

Sistema de equações algébricas:

$$300\, T_1 = 100\, T_2 + 200\, T_A$$

$$200\, T_2 = 100\, T_1 + 100\, T_3$$

$$200\, T_3 = 100\, T_2 + 100\, T_4$$

$$200\, T_4 = 100\, T_3 + 100\, T_5$$

$$300\, T_5 = 100\, T_4 + 200\, T_B$$

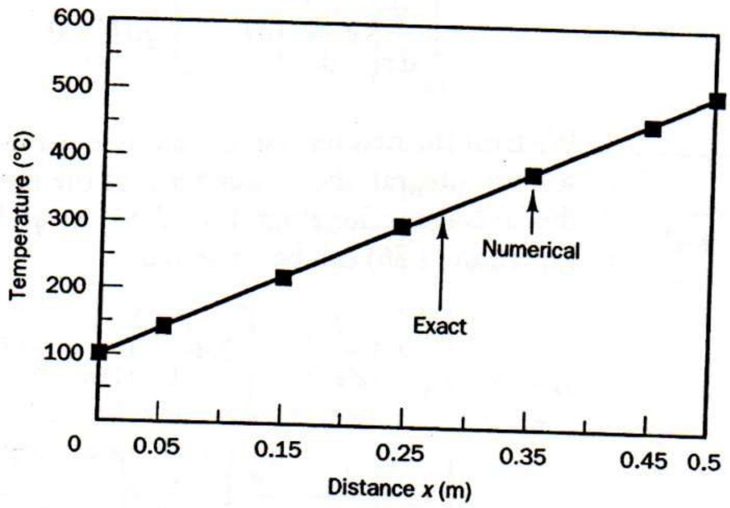
Solução:

*$T_1$= $140^0$C ; $T_2$= $220^0$C ; $T_3$= $300^0$C ; $T_4$= $380^0$C ; $T_5$= $460^0$C*

Considerando que a solução exata para o problema é dada por:

$$T = 800\, x + 100$$

O gráfico mostra comparativamente os resultados da solução exata com a solução numérica:

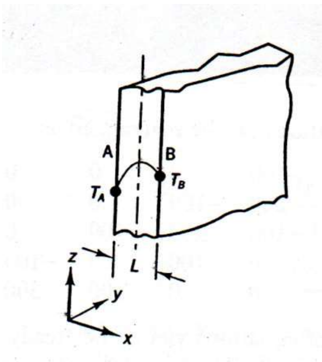


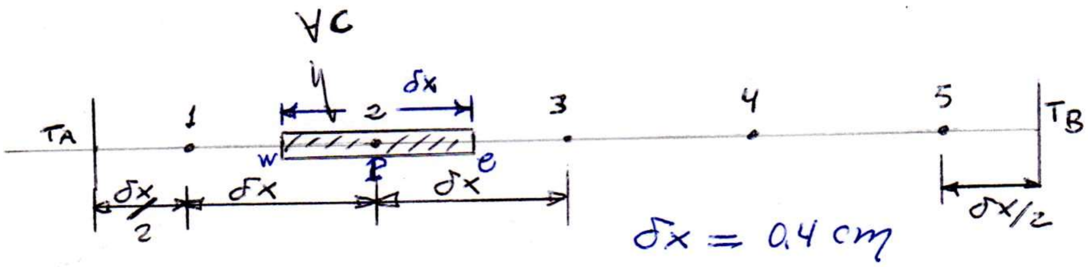

**Exercício 2:** Uma placa de espessura *L = 2 cm*, com constante de condutividade térmica *k = 0,5 W/m.K* e geração uniforme de calor *q = 1000 kW/m*$^3$ está sujeita nas faces A e B às temperatura de 100ºC e de 200ºC, respectivamente. Assumindo que as dimensões nas direções y e z são tão largas que os gradientes de temperatura são significantes somente na direção x, determine a distribuição de temperatura no estado permanente. Compare o resultado numérico com a solução analítica dada pela equação:

$$T = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2k}\,(L - x)\right] x + T_A$$

**Solução:**

Equação básica de governo: $\frac{d}{dx}\left(\mathrm{k}\frac{dT}{dx}\right) + q = 0$




Forma integral da equação de governo:

$$\int_{\Delta\forall} \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)d\forall + \int_{\Delta\forall} q\, d\forall = 0$$

Para os nós 2, 3, 4:

$$\left(\mathrm{kA}\frac{dT}{dx}\right)_e - \left(\mathrm{kA}\frac{dT}{dx}\right)_w + q\Delta\forall = 0$$

Ou

$$\mathrm{k}_e A\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - \mathrm{k}_w A\left(\frac{T_P - T_W}{\delta x}\right) + qA\delta x = 0$$

Ou

$$\left(\frac{k_e}{\delta x}A + \frac{k_w}{\delta x}A\right)T_P = \left(\frac{k_w}{\delta x}A\right)T_W + \left(\frac{k_e}{\delta x}A\right)T_E + qA\delta x$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u$$

| $a_W$ | $a_E$ | $a_P$ | $S_P$ | $S_u$ |
|---|---|---|---|---|
| $kA/\delta x$ | $kA/\delta x$ | $a_W + a_E - S_P$ | 0 | $qA\delta x$ |

Incorporando as condições de fronteiras para o nó 1 a temperatura para a fronteira oeste é conhecida:

$$\mathrm{k}_e A\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - \mathrm{k}_A A\left(\frac{T_P - T_A}{\delta x/2}\right) + qA\delta x = 0$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u$$

| $a_W$ | $a_E$ | $a_P$ | $S_P$ | $S_u$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $kA/\delta x$ | $a_W + a_E - S_P$ | $2kA/\delta x$ | $qA\delta x +$ $(2kA/\delta x)T_A$ |

Para o nó 5:

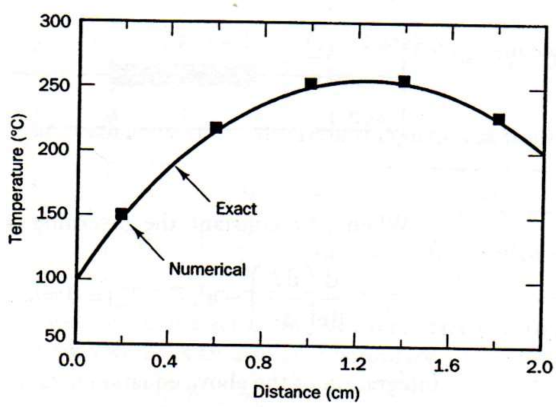
$$\mathrm{k}_B A\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x/2}\right) - \mathrm{k}_w A\left(\frac{T_P - T_W}{\delta x/2}\right) + qA\delta x = 0$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u$$

| $a_W$ | $a_E$ | $a_P$ | $S_P$ | $S_u$ |
|---|---|---|---|---|
| $kA/\delta x$ | 0 | $a_W + a_E - S_P$ | $2kA/\delta x$ | $qA\delta x +$ $(2kA/\delta x)T_B$ |

Solução: $T_1 = 150^0$; $T_2 = 218^0$; $T_3 = 254^0$;: $T_4 = 258^0$; : $T_5 = 230^0$.

Solução gráfica comparativa (exata e numérica)



## Referência

Versteeg, H.K.; Malalasekera, W. (2007) An Introduction to Computational Fluid Dynamics – The Finite Volume Method. Pearson Prentice Hall – second edition.