INTEGRAL DE LINHA

Cálculo II – Aula 8

Profa. Dra. Patricia Targon Campana

Grupo de Biomateriais e Espectroscopia

pcampana@usp.br

Sala 339C – Titanic

3091-8883 9 3775-3979

sciencenebula.tumblr.com

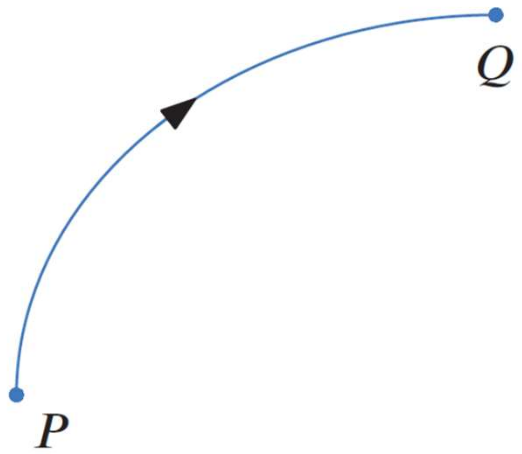
/Campana.PT

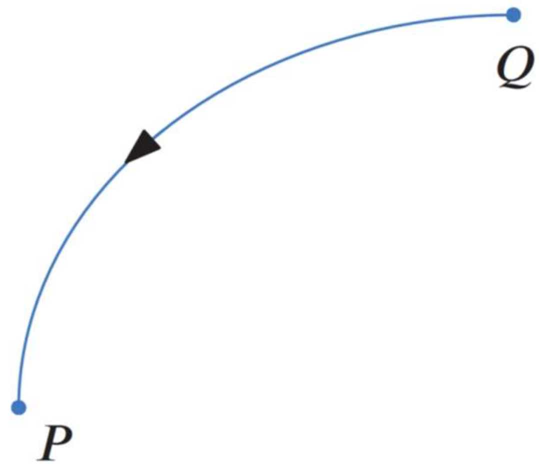
@profaPCampana

a idéia de uma integral de linha e a orientação de uma curva

Uma curva pode ser traçada em duas direções. Precisamos escolher uma direção antes de definirmos uma integral de linha.

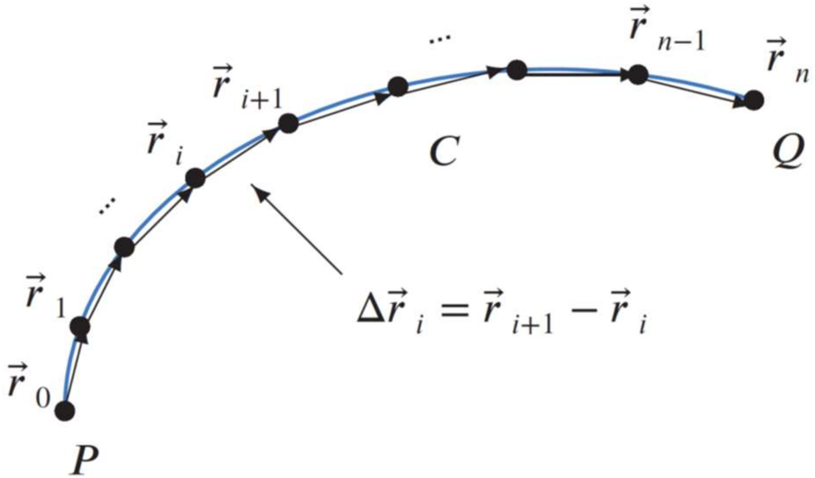
Diz-se que uma curva é orientada se escolhemos uma direção de deslocamento nela.

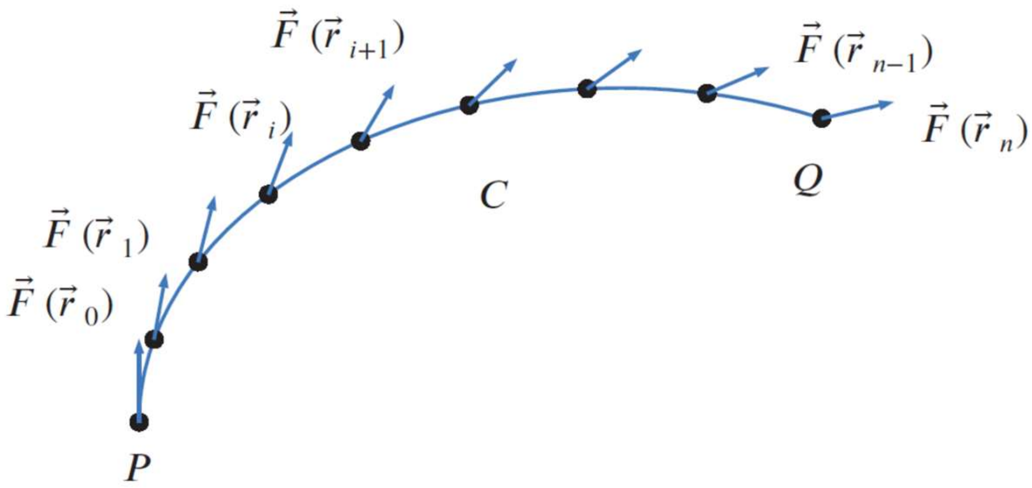




Definição da integral de linha

Considere um campo vetorial $\vec{F}$ e uma curva orientada C. Começamos dividindo C em segmentos de linha reta ao longo das quais $\vec{F}$ é aproximadamente constante. Cada pedacinho pode ser representado por um vetor $\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$ e o valor de **F** em cada pedaço de C é aproximadamente **F** (**r**$_i$)





No nosso exemplo inicial, o campo vetorial **F** representa a curva real, e a curva orientada C é o caminho da pessoa que rema o barco. Queremos determinar o quanto o campo vetorial **F** ajuda ou atrapalha o movimento ao longo de C.

Podemos usar o produto escalar para medir até que ponto dois vetores apontam na mesma direção ou em direções opostas:

$\mathbf{F}(\mathbf{r}\ i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i$

Somando todas essas peças, obtemos:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i.$$

Definimos a integral de linha, $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, tomando o limite como $\|\Delta \vec{r}_i\| \to 0.$

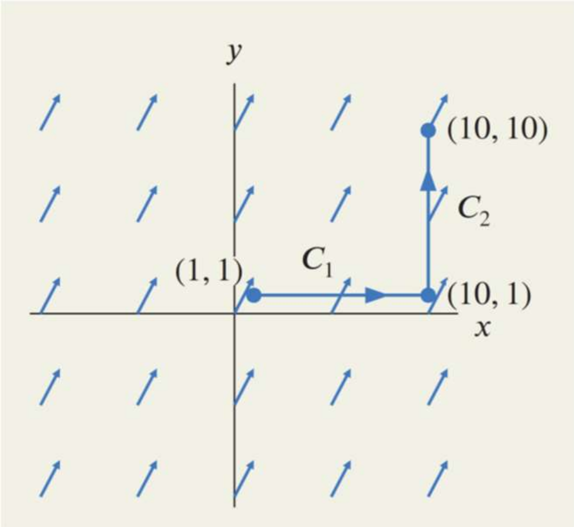
A integral de linha de um campo vetorial **F** ao longo de uma curva orientada C é

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{\|\Delta\vec{r}_i\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i.$$

O limite, na definição de uma integral de linha, existe se $\vec{F}$ for contínuo na curva C e se a curva C for feita de forma a juntar um número finito de curvas suaves.

Para isso, subdividimos a curva usando uma parametrização que vai de uma extremidade para a outra, sempre para frente, passar por cima de qualquer parte da curva duas vezes.

Exemplo 1: Encontre a integral de linha do campo vetorial constante **F** = **i** + 2 **j** ao longo do caminho de (1, 1) a (10, 10):



Seja C1 o segmento horizontal do caminho que vai de (1, 1) a (10, 1). Dividindo esse caminho em pedaços menores (Δ**r**) horizontais de forma que:

Δ**r** = Δx**i** e **F** · Δ**r** = (**i** + 2**j**) · Δx**i** = Δ**x**

Conseqüentemente,

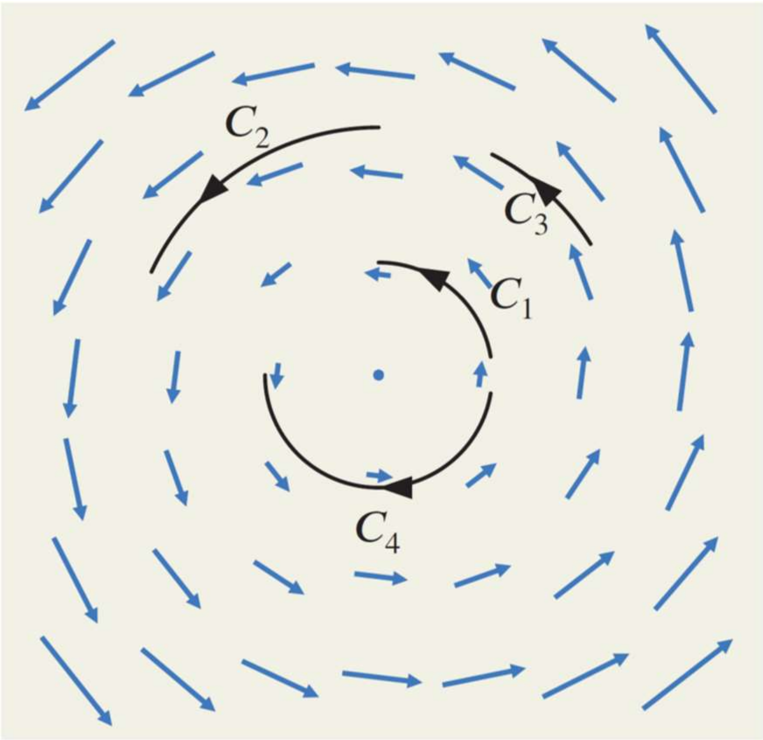
$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x=1}^{x=10} dx = 9$$

Da mesma forma, ao longo de C2, temos Δ**r** = Δy**j** e **F** · Δ**r** = (**i** + 2**j**) · Δy**j** = 2Δy

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{y=1}^{y=10} 2\,dy = 18.$$

$$\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 9 + 18 = 27$$

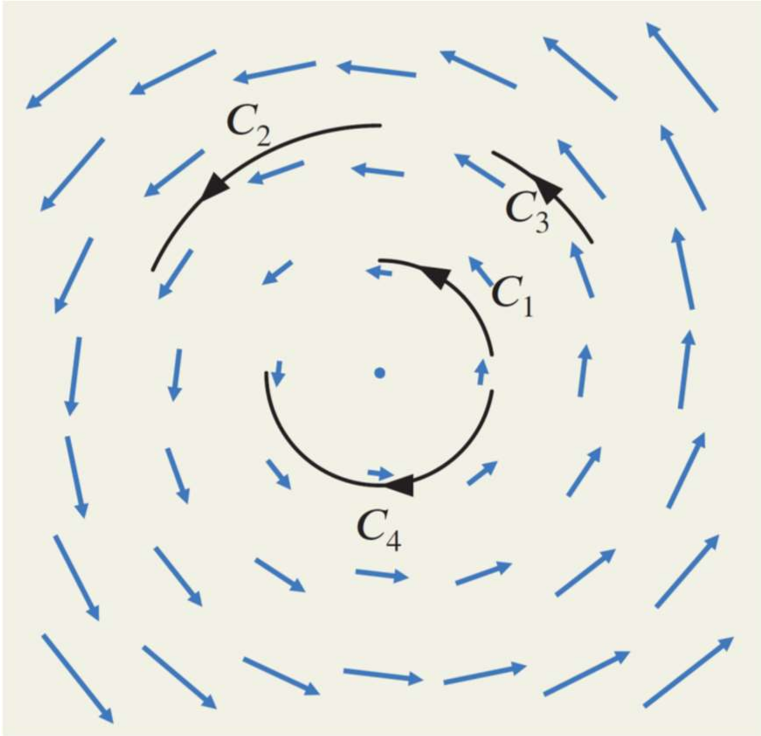
Exemplo 12: o campo vetorial **F** e as curvas orientadas C1, C2, C3, C4 são mostradas na figura:



As curvas C1 e C3 têm o mesmo comprimento.
A) Qual das integrais de linha para i = 1, 2, 3, 4, são positivas e quais são negativas?
B) Organize essas integrais de linha em ordem crescente.

Solução:

O campo vetorial **F** e os segmentos de linha Δ**r** são aproximadamente paralelos e na mesma direção para as curvas C1, C2 e C3. Portanto, as contribuições de cada termo **F** ·Δ**r** são positivas para essas curvas:



$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ são positivas

Para a curva C4, o campo vetorial e os segmentos de linha estão em direções opostas: cada termo **F** · Δ**r** é negativo e, portanto:

$\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é negativa

B) Como a magnitude do campo vetorial é menor ao longo de C1 do que ao longo de C3, e essas duas curvas são do mesmo comprimento, temos

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} < \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Além disso, a magnitude do campo vetorial é a mesma ao longo de C2 e C3, mas a curva C2 é mais longa do que a curva C3. Assim,

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} < \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Juntando esses resultados com o fato de que $\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é negativa, a ordem das integrais será:

$$\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} < \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} < \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} < \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Referências

Deborah Hughes-Hallett, Andrew M. Gleason, William G. McCallum - Calculus_ Multivariable (2017, Wiley)