PNV 3421 – Processos Estocásticos

Notas de Aula – Teoria de Filas 17/9/2020

1 – Comentários Referentes à Resolução das Questões da 1ª Série de Problemas

1.1 Comentários gerais

Os elementos centrais para a resolução das questões da 1ª Série são a definição e interpretação de variáveis aleatórias sem memória e a definição e propriedades do processo de Poisson. Eles precisam estar conectados a conceitos básicos de probabilidade e necessitam do apoio de ferramental matemático: integral, derivada, séries. Em questões envolvendo duas variáveis aleatórias, foram mostrados, em aulas anteriores, exemplos de como lidar com elas. Os exemplos anteriores envolviam o cálculo de uma probabilidade e o cálculo de uma média. Agora, na Questão 9a) e na Questão 12, a mesma técnica deve ser aplicada para calcular a função densidade de probabilidade do tempo total de processamento da peça na máquina 6 e do tempo de permanência do navio no terminal, respectivamente. Calcula-se, inicialmente, a função densidade de probabilidade condicionada ao número de passagens pela máquina 6, ou ao número de navios encontrados ao chegar, e depois elimina-se tal condicionalidade.

Esta série introduz, na Questão 3, e explora em outras questões depois a determinação da distribuição do mínimo entre duas variáveis aleatórias independentes. Resultado particularmente importante para tópicos futuros da disciplina é que o mínimo entre duas variáveis exponenciais é também uma variável exponencial.

1.2 Comentários específicos sobre as questões 10 e 11

As questões 10 e 11 exploram um conceito normalmente não tratado em um curso básico de probabilide – o conceito de entrada ou incidência aleatória (random incidence). Na questão 11 há duas argumentações conduzindo a resultados contraditórios, gerando, por serem ambas aparentemente corretas, o paradoxo do tempo de espera. A argumenlação (a) utiliza apenas o fato de que a variável aleatória exponencial não tem memória e não pode ser refutada. Para entender a falha na argumentação (b), é conveniente examinar a Questão 10b.

Questão 10

a) X - vida útil de um equipamento

$$P[X=1] = 0{,}5 \quad ; \quad P[X=9] = 0{,}5$$

Vida média $E[X] = 1 \times 0{,}5 + 9 \times 0{,}5 = 5$

b) Admita que uma dada tenha mantido, por um longo tempo, o registro da duração (vida útil) de equipamentos, repostos em caso de falha, por outro equipamento, todos cuja vida útil é descrita pela distribuição de probabilidade acima. Para melhor documentar o processo de substituição/reposição, as vidas úteis dos equipamentos eram registradas em bobinas de comprimento igual a 5000; os trechos correspondentes a equipamentos de vida útil igual a 9 eram pintados com tal comprimento de vermelho. Analogamente, marcava-se, em preto, com comprimento igual a 1, os trechos correspondentes aos equipamentos cuja vida era igual a 1. Caso a bobina fosse aberta em toda a sua extensão, qual seria a cor predominante ?

Caso você sorteasse, com função densidade de probabilidade uniforme entre 0 e 5000, um instante desse intervalo, haveria maior probabilidade de cair sobre um intervalo correspondente à operação de um equipamento de vida útil igual a 1 ou igual a 9 ?

<u>Sugestão</u> Admita que, no intervalo (0, 5000], o tamanho da amostra de equipamentos é suficientemente grande para adotar que a vida média dos equipamentos da amostra, $\overline{X}$, é igual a $E(X)$.

Depois de responder a 10b, mostre onde está a falha da argumentação 11b.

A Figura abaixo é uma ilustração esquemática do registro da vida útil dos equipamentos.

Correção do parágrafo inicial do enunciado da Questão 12.

12) Para uma fila M/M/1, com intervalos exponenciais, de média $1/\lambda$, entre chegadas consecutivas, tempos de atendimento exponenciais, de média $1/\mu$ e um único posto de atendimento, sabe-se que, em regime estacionário :

2 - Introdução a Cadeias de Markov

Uma autolocadora dispõe de 5 lojas para atendimento de seus clientes em uma dada região metropolitana. Ela mantém um registro relacionando o local de devolução do veículo com o local em ele foi retirado; a tabela 1 abaixo mostra a frequência relativa de devolução na loja j para um veículo retirado na loja i, frij.

Tabela 1. Frequência relativa de devolução na loja j para um veículo retirado da loja i. (frij)

loja i \ loja j	1	2	3	4	5
1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
2	0,1	0,4	0,2	0,1	0,2
3	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1
4	0,2	0,2	0,1	0,3	0,2
5	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2

A empresa está interessada em saber como o comportamento dos usuários, mostrada na Tabela 1, associado à demanda por veículos em cada uma das lojas deve moldar sua política de remanejamento (reposicionamento) de veículos entre as diversas lojas.

Dentro deste contexto, considere-se o seguinte processo estocástico em tempo discreto $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ em que:

$X_0 = i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, se, no instante inicial, um dado veículo está na loja i; e

$X_n = j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, se, após a locação j esse mesmo veículo é devolvido na loja j.

O processo estocástico $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ se propõe, assim, a acompanhar, do ponto de vista probabilístico, o percurso de um veículo ao longo de diversas locações, adotando que o comportamento dos usuários obedecerá o padrão definido pela Tabela 1. Isto significa que será admitido que:

$$p_{ij} \triangleq P[X_{n+1} = j / X_n = i] = fr_{ij}$$

e a matriz da tabela 1 receberá o nome de matriz P.

Para uma dada condição inicial, $X_0 = i$, o interesse é saber como evolui o valor da probabi lidade condicional $P[X_n = j / X_0 = i]$, para $j = 1, 2, \ldots, 5$, a medida que n cresce.

Considere-se, como um primeiro exercício, calcular $P[X_2 = 4 / X_0 = 2]$. A Figura 1, abaixo ilustra os caminhos possíveis para passar do estado $X_0 = 2$ para o estado $X_2 = 4$. De acordo com essa figura, a probabilidade $P[X_2 = 4 / X_0 = 2]$ pode ser calculado como:

$$
\begin{aligned}
P[X_2 = 4 / X_0 = 2] = {} & P[X_1 = 1 / X_0 = 2] * P[X_2 = 4 / X_1 = 1] + \\
& + P[X_1 = 2 / X_0 = 2] * P[X_2 = 4 / X_1 = 2] + \\
& + P[X_1 = 3 / X_0 = 2] * P[X_2 = 4 / X_1 = 3] + \\
& + P[X_1 = 4 / X_0 = 2] \times P[X_2 = 4 / X_1 = 4] + \\
& + P[X_1 = 5 / X_0 = 2] \times P[X_2 = 4 / X_1 = 5] =
\end{aligned}
$$

$$
= \sum_{k=1}^{5} P[X_1 = k / X_0 = 2] \, P[X_2 = 4 / X_1 = k] =
$$

$$
= \sum_{k=1}^{5} p_{2k} \, p_{k4} = 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}15
$$

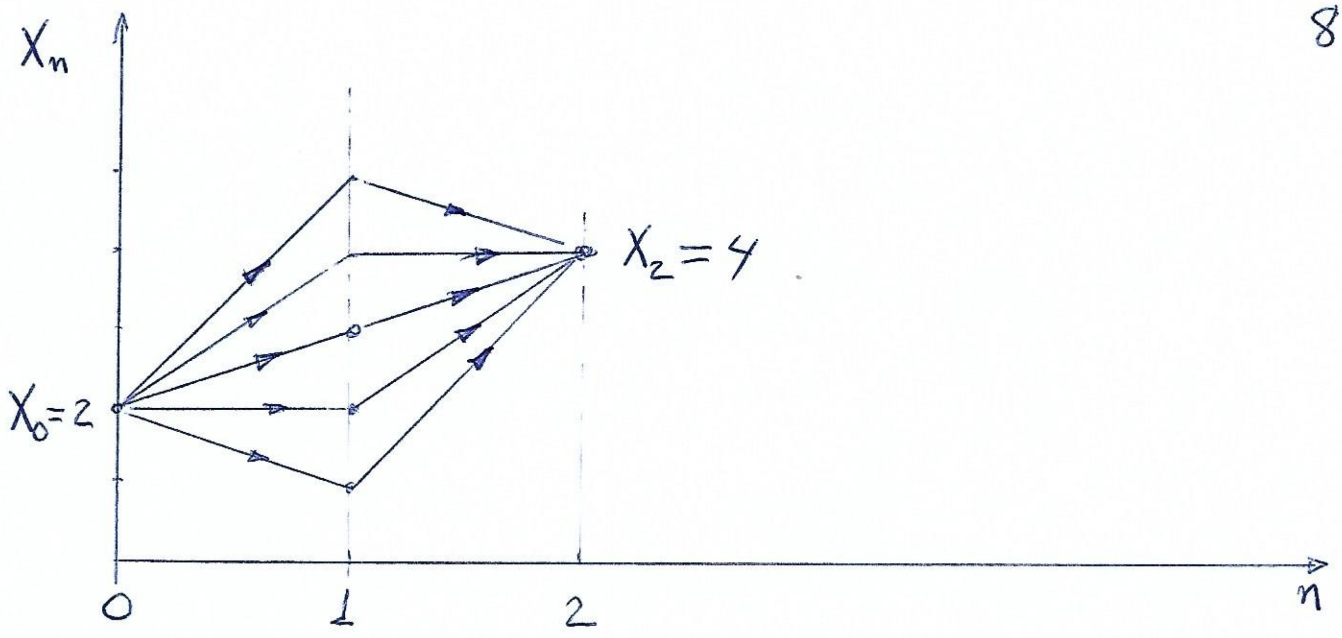

Figura 1 Caminhos possíveis do estado $X_0 = 2$ para o estado $X_2 = 4$.

Continuação do exercício anterior - atividade para os alunos em aula. Calculem para todos os estados $j = 1$ a 5, $P[X_2 = j / X_0 = 2]$

Como mencionado anteriormente, deseja-se verificar, para uma dada condição inicial, $X_0 = 2$, no presente caso, como evolui, para um dado j, $P[X_n = j / X_0 = 2]$, a medida que n cresce. Isto é, como varia, com o número de locações, a probabilidade do veículo ser devolvido a loja j depois da locação n. Observando a expressão utilizada na página 7 para o cálculo de $P[X_2 = 4 / X_0 = 2]$, é possível dar um passo adiante e generalizar:

$$P[X_{n+1} = j / X_0 = 2] = \sum_{k=1}^{5} P[X_n = k / X_0 = 2] * P[X_{n+1} = j / X_n = k]$$

$$n = 1, 2, \dots ; \quad j = 1, \dots, 5 \qquad (1)$$

Para $n = 1$, $P[X_1 = j / X_0 = 2] = p_{2j}$, $j = 1, \dots, 5$, que são os valores da segunda linha da tabela 1. A Tabela 2 mostra os valores obtidos, para n variando de 1 a 5, de $P[X_n = j / X_0 = 2]$, para j de 1 a 5. De acordo com a expressão (1), o elemento j da linha $(n+1)$ é obtido por meio do produto dos elementos da linha n pelos elementos da coluna j da matriz P.

Tabela 2 Evolução de $P[X_n = j / X_0 = 2]$ com n

n \ j	1	2	3	4	5
1	0,1	0,4	0,2	0,1	0,2
2	0,14	0,32	0,21	0,15	0,18
3	0,147	0,303	0,206	0,165	0,179
4	0,1491	0,2991	0,2041	0,1683	0,1794
5	0,14968	0,29817	0,20358	0,16898	0,17959

E o que acontece se for alterado o estado inicial?

Se o veículo estivesse inicialmente na loja 5, como seria a evolução de $P[X_n = j / X_0 = 5]$?

A Tabela 3 mostra os resultados obtidos.

Tabela 3. Evolução de $P[X_n = j / X_0 = 5]$ com n.

n \ j	1	2	3	4	5
1	0,2	0,30	0,2	0,1	0,2
2	0,15	0,30	0,21	0,16	0,18
3	0,149	0,299	0,205	0,168	0,179
4	0,1496	0,2982	0,2037	0,1690	0,1795
5					

Examinando-se os resultados encaixados nas Tabelas 2 e 3, a conjectura natural é:

$$\lim_{n \to \infty} P[X_n = j / X_0 = i] = \pi_j$$

que não depende do estado inicial.

A questão seguinte que surge é:
É possível calcular, de maneira exata, o limite π_j ?

Sim, é possível calcular os valores de π_j, $j = 1, \ldots, 5$ para este exemplo introdutório.

Observando a expressão (1) e deixando $n \to \infty$, chega-se ao seguinte resultado:

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{5} \pi_k \, p_{kj} \quad , \; j = 1, \ldots, 5 \qquad (2)$$

A expressão (2) define um sistema de 5 equações para o cálculo de $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ e π_5. Como se trata de um sistema homogêneo de equações lineares, se estas equações fossem independentes, a solução única seria $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = 0$. No entanto, como a soma dos elementos de cada linha da matriz P é igual a 1, o sistema de equações 2 é redundante e uma das equações deve ser abandonada. Em seu lugar, inclui-se a equação:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$$

Da resolução do sistema de equações, são obtidos os seguintes valores:

$$\pi_1 = 0{,}14987$$
$$\pi_2 = 0{,}29788$$
$$\pi_3 = 0{,}20342$$
$$\pi_4 = 0{,}16916$$
$$\pi_5 = 0{,}17967$$

Assim, grosso modo, a probabilidade de que, após um grande número de locações, o veículo esteja na loja 1 é 15%, na loja 2 é 30%, na loja 3 é 20%, na loja 4 é 17% e na loja 5 é 18%