EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1^a ORDEM, FATORES INTEGRANTES

Consideremos novamente a equação na forma diferencial

$$P(x,y)\,d\,x + Q(x,y)\,d\,y = 0, \tag{1}$$

P e Q definidas em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aberto.

Se y é solução de (1) então y é também solução da equação

$$\mu(x,y)P(x,y)\,d\,x + \mu(x,y)Q(x,y)\,d\,y = 0, \tag{2}$$

obtida multiplicando (1) por uma função (digamos) de classe C^1 e a recíproca vale em um domínio no qual $\mu(x,y) \neq 0$.

Então se (1) não é exata, podemos tentar encontrar μ de tal forma que a equação modificada (2) seja exata. Para isto, devemos ter

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu P) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu)\,Q + \mu\frac{\partial}{\partial x}(Q) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu)\,P + \mu\frac{\partial}{\partial y}(P)\,. \tag{3}$$

Agora, a equação (3) é uma *equação parcial* que, em geral, é mais difícil de resolver que a equação inicial!

Entretanto, esta equação se simplifica, em casos especiais, fazendo hipóteses adicionais. Suponhamos, por exemplo que estamos procurando um fator integrante μ que dependa apenas de x. A equação (3) então se torna (supondo $\mu \neq 0,\ Q \neq 0$):

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}(\mu)}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}.$$

Date: September 16, 2020.

Como estamos supondo μ independente de y, para que a equação (4) tenha solução é necessário que o *o lado direito também dependa apenas de x.*

Se este é o caso, escrevendo $g(x) = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q}$, obtemos

$$\frac{d}{d\,x}\ln(|\mu|) = g(x) \Longrightarrow \ln(|\mu|) = \int g(x)\,d\,x \Longrightarrow \mu = Ke^{\int g(x)\,d\,x}.$$

Como precisamos de apenas uma solução, tomamos

$$\mu(x) = e^{\int g(x)\,d\,x}, \tag{4}$$

sendo $\int g(x)\,d\,x$ uma primitiva qualquer de g.

Analogamente, se $h(y) = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}$, podemos encontrar um fator integrante que dependa apenas de y, da forma:

$$\mu(y) = e^{\int h(y)\,d\,y}. \tag{5}$$

Exemplo 0.1. $(4xy + 3y^2 - x)dx + (x^2 + 2yx)dy = 0$.

Observemos, inicialmente que, *na forma diferencial* a equação está definida em todo o plano R^2. Entretan, como $Q(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2 + 2x = 0$, na forma normal: $\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{4xy+3y^2-x}{x^2+2yx}$, o domínio da equação é:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, x \neq -2y\}$.
(É interessante observar o que ocorre nesses pontos).

Temos $g(x) = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} = \frac{2}{x}$, (para $x \neq 0$) e obtemos o fator integrante que depende apenas de x : $\mu(x) = e^{\int g(x)} = e^{\int \frac{2}{x}} = e^{\ln(x^2)} = x^2$ (observe-se que o fator integrante está bem definido *para todo x* .

Multiplicando a equação original por $\mu(x)$, obtemos a equação:

$$(4x^3y + 3x^2y^2 - x^3)dx + (x^4 + 2yx^3)dy = 0$$

Uma integral primeira é $F(x, y) = x^4y + y^2x^3 - x^4/4$.
Portanto, as soluções são dadas implicitamente por

$$x^4y + y^2x^3 - x^4/4 = C.$$

Podemos resolver esta equação para y, em função de x, resolvendo a equação quadrática, obtendo: $y = \frac{-x^4 \pm \sqrt{\Delta}}{2x^3}$, $\Delta = x^8 + x^7 + 4Cx^3$.
O domínio dessas soluções são os intervalos contidos no conjunto: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid, x \neq 0 \text{ e } \Delta \geq 0\}$. Notemos que, nos pontos da forma $(x. - x/2)$, que não estão no domínio da equação na forma normal, temos:
$x^4y + y^2x^3 - x^4/4 = C \Leftrightarrow -x^5/4 - x^4/4 = C$.
Por outro lado:
$\Delta = x^8 + x^7 + 4Cx^3 = x^3(x^5 + x^4 + 4C)) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^5 + x^4 + 4C = 0$. que correspondem aos pontos fora do domínio da equação na forma normal.
Em particular, para $C = 0$, obtemos $\Delta = x^8 + x^7 = x^7(x + 1)$ e $\Delta < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$. Portanto, neste caso, as soluções so dadas por:
$y = \frac{-x^4 \pm \sqrt{\Delta}}{2x^3} = \frac{-x \pm \sqrt{x(x+1)}}{2x^3}$, com domínios:
$I_1 =]-\infty, -1[$ e $I_2 =]0, \infty[$.

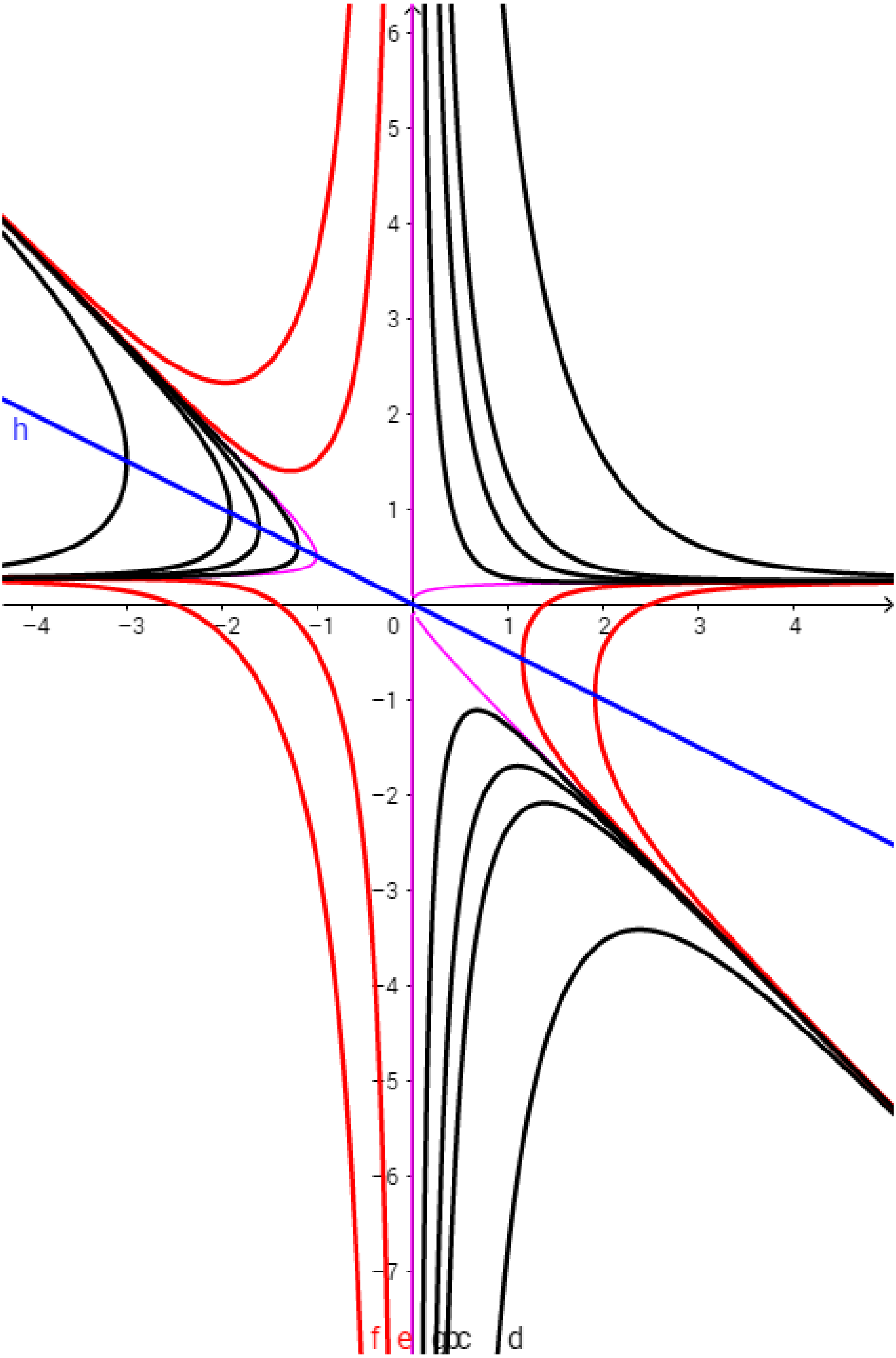

FIGURE 1. Curvas de nível do potencial.

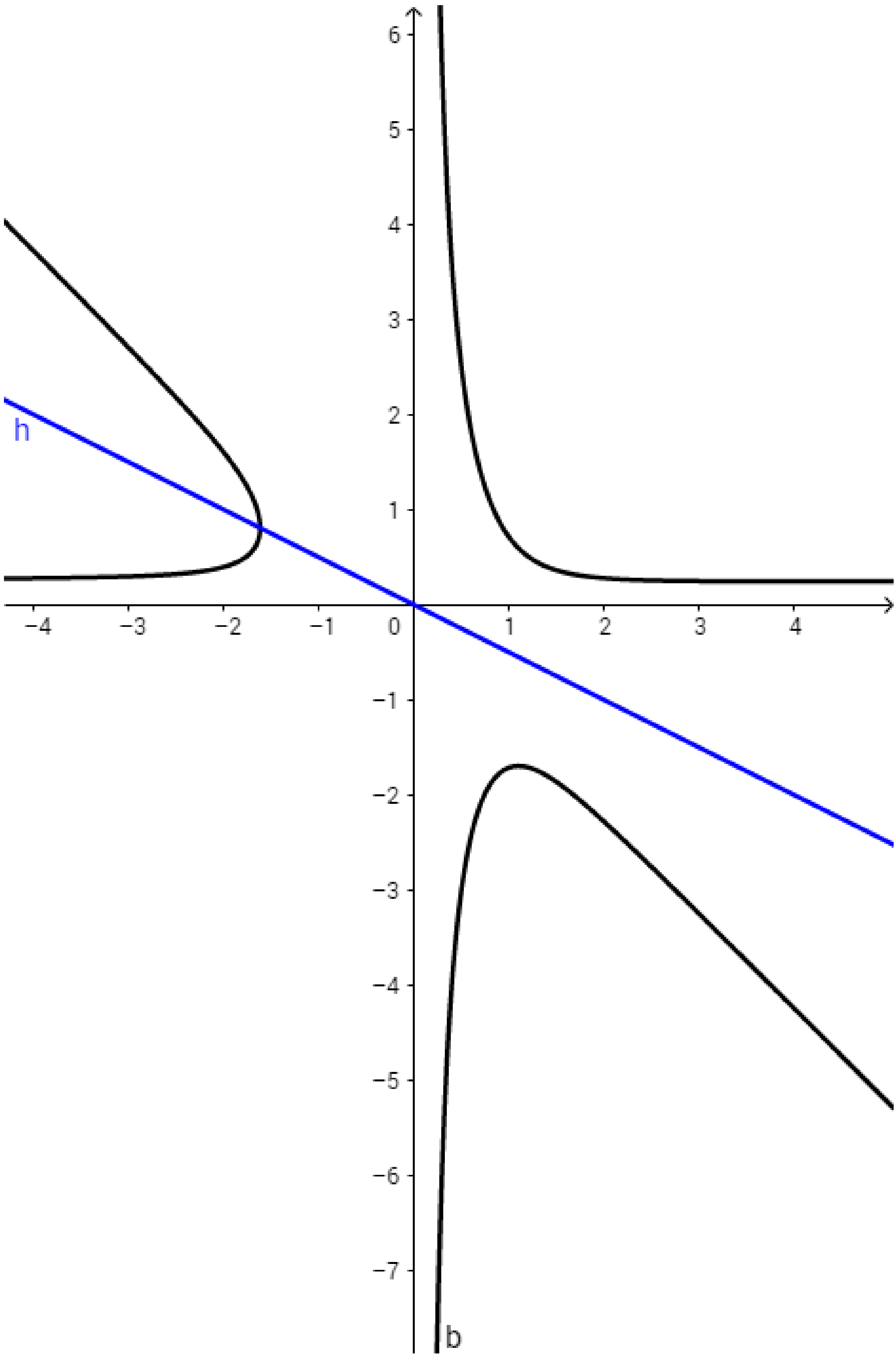

FIGURE 2. Curva de nivel 1.

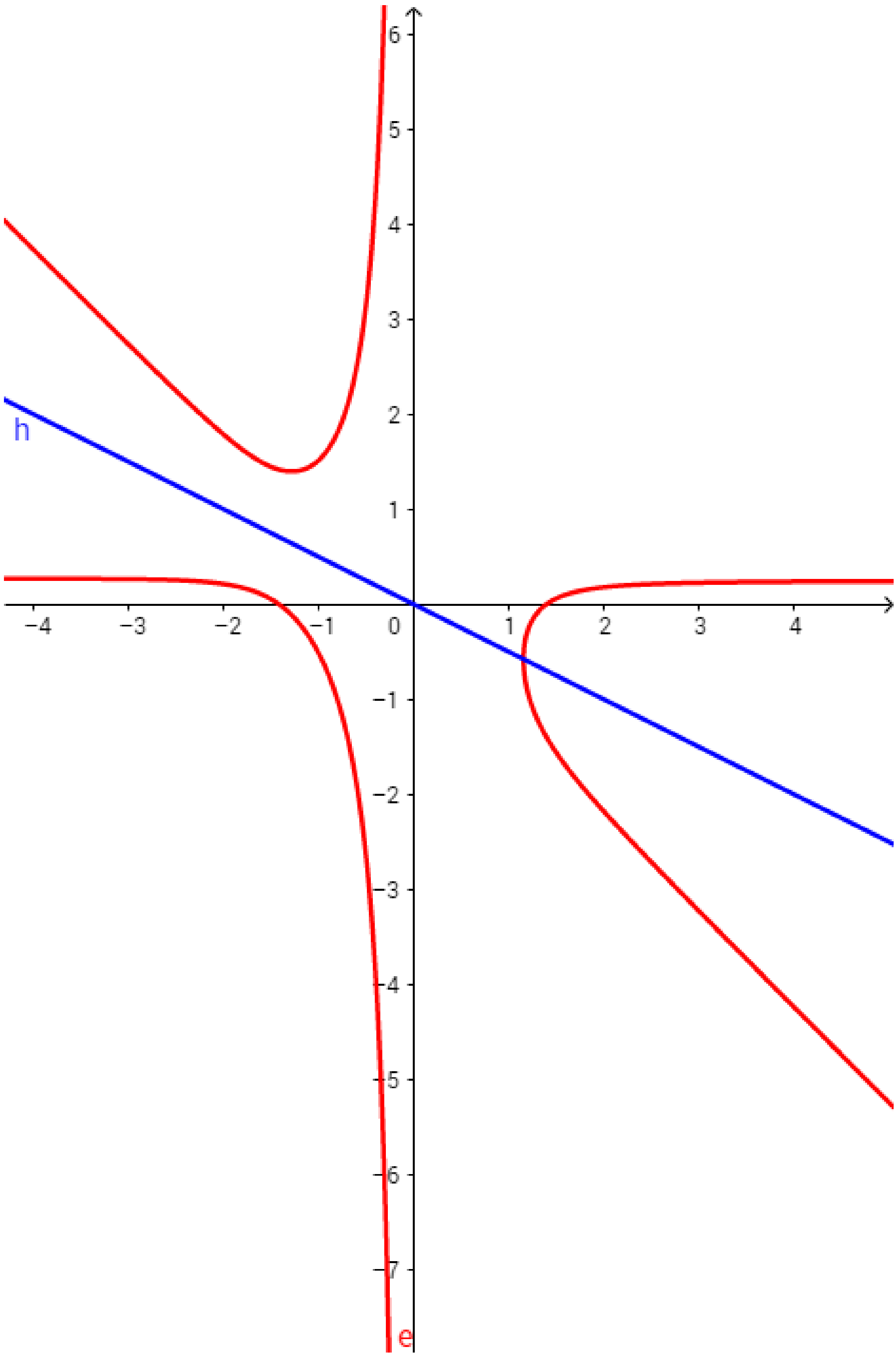

FIGURE 3. Curva de nível -1 .

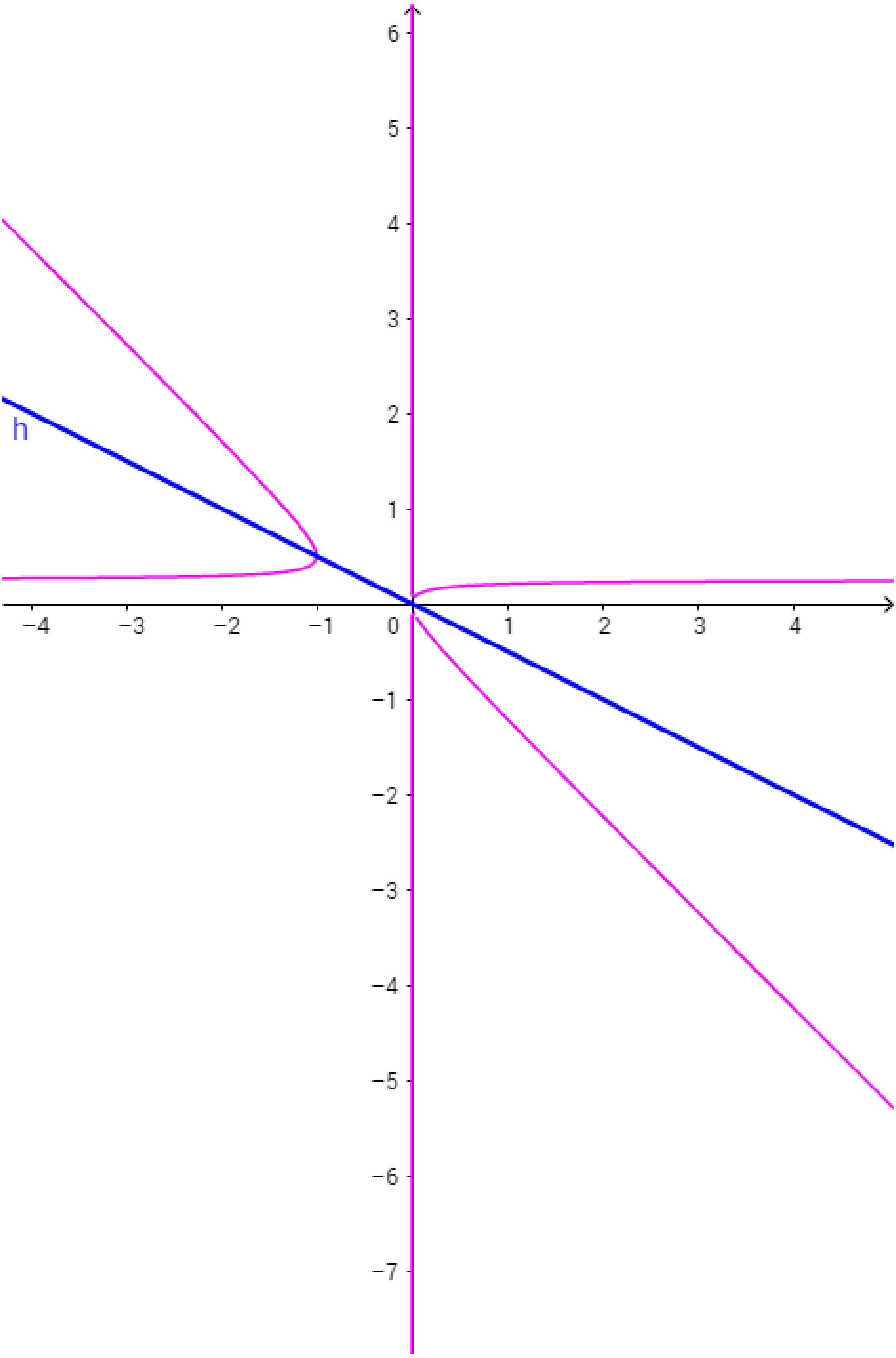

FIGURE 4. Curva de nivel 1.