Lista 2 - Otimização Não Linear

1 "Introdução"

Considere o seguinte problema geral de programação não linear

$$\begin{array}{rll} \text{Minimizar} & f(x), & \\ \text{Sujeito a} & h_i(x) = 0, & i = 1, 2, \dots, m \\ & g_j(x) \le 0, & j = 1, 2, \dots, p \end{array} \tag{1}$$

onde $f, h_i, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções continuamente diferenciáveis. A função f é chamada *"função objetivo "*. As funções $h_i, i = 1, 2, \dots, m$ são chamadas *"restrições de igualdade"* e as funções $g_j, j = 1, 2, \dots, p$ são chamadas *"restrições de desigualdades"*. O conjunto de pontos tais que as restrições são satisfeitas é chamado de *"conjunto viável"* e será denotado por Ω, isto é,

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n | h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m; \quad g_j(x) \le 0, j = 1, 2, \dots, p\}.$$

Dado $x \in \Omega$, definimos como sendo o conjunto de índices das restrições de desigualdades ativas em x o conjunto $A(x) := \{j \in \{1, 2, \dots, p\} | g_j(x) = 0\}$.

O *"cone tangente"* a Ω em um ponto viável x^* é dado por

$$\mathcal{T}_\Omega(x^*) := \{0\} \cup \left\{ d \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \exists \{x^k\} \in \Omega, x^k \to x^*, \frac{x^k - x^*}{||x^k - x^*||} \to \frac{d}{||d||} \right\}.$$

O *"cone linearizado"* de Ω em um ponto viável x^* é dado por

$$\mathcal{L}_\Omega(x^*) := \{d \in \mathbb{R}^n | \nabla h_i(x^*)^T d = 0, i = 1, 2, \dots, m; \nabla g_j(x^*)^T d \le 0, j \in A(x^*)\}.$$

O *"cone crítico"* é dado por

$$C(x) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{array}{ll} \nabla h_i(x)^T d = 0, & i = 1, 2, \dots, m \\ \nabla g_j(x)^T d \le 0, & j \in A(x) \\ \nabla f(x)^T d = 0 & \end{array} \right\}. \tag{2}$$

2 Exercícios

1. Suponha que $x \in \Omega$ e $-\nabla f(x) \notin \mathcal{T}_\Omega(x)^\circ$. Mostre que existe uma direção de descida. Isto é, uma direção d, $f(x + td) < f(x)$ para todo $t \in (0, \varepsilon]$. Note que $x + td$ não necessariamente pertence a Ω para t perto de 0.

2. Considere o Problema (1). Seja $x^* \in \Omega$. Se $\{\nabla h_i(x^*), \nabla g_j(x^*); i = 1, \dots, m, j \in A(x^*)\}$ é um conjunto linearmente independente, então dizemos que vale a condição de independência linear (LICQ) em x^*. Prove usando o Teorema da Função Implícita que se vale LICQ em x^*, então $\mathcal{T}_\Omega(x^*) = \mathcal{L}_\Omega(x^*)$ (esta igualdade é conhecida como Condição de Qualificação de Abadie).

3. Prove que LICQ implica existência e unicidade dos multiplicadores de Lagrange.

4. Dizemos que a condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) vale em $x \in \Omega$ quando

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x) + \sum_{j \in A(x)} \mu_j \nabla g_j(x) = 0, \quad \mu_j \geq 0$$

implica que $\lambda_i = 0$, $\mu_j = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$, $j \in A(x)$.

Prove que se x^* é mínimo local, então a condição de Mangasarian-Fromovitz é equivalente a dizer que o conjunto dos multiplicadores de Lagrange é não vazio, fechado e limitado.

5. Mostre que MFCQ não vale em nenhum ponto de $\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 x_2 = 0\}$.

6. Dizemos que vale a condição de posto constante (CRCQ) em $x \in \Omega$, se existe uma vizinhança V de x tal que para todo $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$, $J \subseteq A(x)$, o posto de $\{\nabla h_i(y), \nabla g_j(y), i \in I, j \in J\}$ permanece constante para todo $y \in V$.

Prove se verdadeiro ou dê um contra exemplo se falso para as seguintes afirmações:

i). CRCQ implica MFCQ;

ii). MFCQ implica CRCQ;

iii). CRCQ implica LICQ;

iv). LICQ implica CRCQ.

7. Seja x um ponto KKT. Dado qualquer multiplicador de Lagrange $(\lambda, \mu) \in \Lambda(x)$, mostre que o cone crítico definido em (2) pode ser escrito como

$$C(x) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} \nabla h_i(x)^T d = 0, & i = 1, 2, \ldots, m \\ \nabla g_j(x)^T d \leq 0, & j \in A(x), \mu_j = 0 \\ \nabla g_j(x)^T d = 0, & j \in A(x), \mu_j > 0 \end{array} \right\}.$$

8. Mostre que a condição AKKT é uma condição de otimalidade genuína, isto é, que todo mínimo local é um ponto AKKT. O que podemos dizer sobre as condições de Karush-Kuhn-Tucker?

9. Econtrar todos os valores do paramêtro σ, onde $\sigma \in R$, para os quais o ponto $\overline{x} = (\frac{\sqrt{3}}{2} + 1, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$ seja uma solução do problema

$$\begin{array}{cc} \text{Minimizar} & \sigma x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a} & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1, \\ & (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \leq 1. \end{array}$$

10. Encontrar todos os valores do parâmetro σ, onde $\sigma \in R$, para os quais o ponto $\overline{x} = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ seja uma solução do problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -x_1 + \sigma x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1^2 + x_2^2 \leq 2, \\ & x_1^2 - x_2 \leq 0. \end{array}$$

References

[1] G. Haeser and A. Ramos. *Condições de Otimalidade e Algoritmos em Otimização não Linear*, volume 83 (85p.) e-ISBN: 978-85-8215-075-7. SBMAC, Notas em Matemática Aplicada, 2016.