Aula 2. Distribuição conjunta de duas variáveis aleatórias contínuas (Exercícios).

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Distribuição conjunta, marginais e condicionais de v.a.contínuas X, Y.

densidade $f(x,y) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$

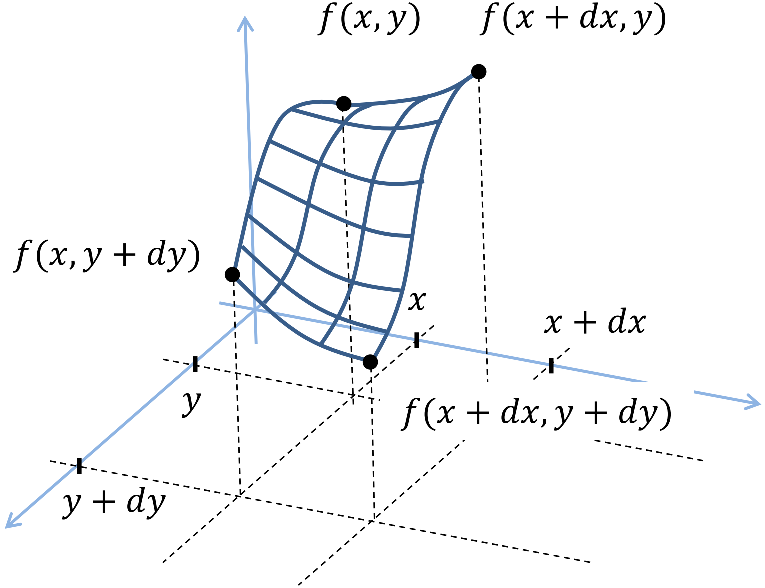
densidade marginal de X : $\quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

densidade marginal de Y : $\quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

densidade condicional de X : $\quad f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

densidade condicional de Y : $\quad f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x \le X \le x+dx \mid y \le Y \le y+dy) &= \frac{\mathbb{P}(x \le X \le x+dx, y \le Y \le y+dy)}{\mathbb{P}(y \le Y \le y+dy)} \\ &\cong \frac{f(x,y)dxdy}{f_Y(y)dy} = f_{X|Y}(x|y)dx\end{aligned}$$



Exemplo 3.7 (Ross). *Densidade conjunta de X, Y é*

$$f(x,y) = \begin{cases} 4y(x-y)e^{-(x+y)}, & x \in (0,\infty), y \in [0,x] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule esperança condicional de X dado $Y = y$.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{4y(x-y)e^{-(x+y)}\mathbb{I}_{(y\le x)}}{\int_0^\infty 4y(x-y)e^{-(x+y)}\mathbb{I}_{(y\le x)}dx} = \frac{(x-y)e^{-x}\mathbb{I}_{(y\le x)}}{\int_y^\infty (x-y)e^{-x}dx}$$

$$\{x = y+z\} = \frac{(x-y)e^{-x}\mathbb{I}_{(y\le x)}}{e^{-y}\int_0^\infty ze^{-z}dz} = (x-y)e^{-(x-y)}\mathbb{I}_{(y\le x)}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mid Y = y) &= \int_y^\infty x(x-y)e^{-(x-y)}dx = \int_0^\infty (z+y)ze^{-z}dz \\ &= \mathbb{E}(\xi^2) + y\mathbb{E}(\xi), \quad \xi \sim \exp(1) \\ &= 2 + y \end{aligned}$$

Exemplo ?.?, gamma a priori, (Ross) "Mistura discreta contínua". *Número de casos de seguro para um segurado segue a distribuição de Poisson com média* λ*. O valor de* λ *depende de indivíduo, e em uma população supomos que* λ *pode ser modelada através da densidade* $g(\lambda) = \lambda e^{-\lambda}, \lambda > 0$ *(distribuição gamma). Achar a distribuição de número de casos de seguro de um indivíduo, escolhido ao acaso dessa população.*

$$\mathbb{P}(X = n) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X = n \mid Y = \lambda) g(\lambda) d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \cdot \lambda e^{-\lambda} d\lambda = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \lambda^{n+1} e^{-2\lambda} d\lambda = \ldots ?$$

Exemplo ?.? (Ross) "Mistura discreta contínua".

OBS: gamma distribuição $\gamma(n+2,2)$ tem a densidade

$$f(\lambda) = \frac{2e^{-2\lambda}(2\lambda)^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ isso significa que}$$
$$1 = \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^\infty \lambda^{n+1}e^{-2\lambda}d\lambda$$

Assim, continuando o calculo de probabilidade:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n) &= \frac{1}{n!}\int_0^\infty \lambda^{n+1}e^{-2\lambda}d\lambda \\ &= \frac{1}{n!}\frac{(n+1)!}{2^{n+2}} = \frac{n+1}{2^{n+2}}, \quad n = 0, 1, \ldots .\end{aligned}$$

$\square$

Neste mesmo "espirito" consideramos próximo exemplo.

“Mistura discreta contínua”: a priori uniforme (Ross Ch.3.6.3).

Seja $X \sim B(n,p)$, e supomos que p é escolhido de acordo com a distribuição uniforme em intervalo $(0,1)$, $p \sim$ *U*$(0,1)$. *Achar a distribuição de X.*

$$\mathbb{P}(X=k) = \int_0^1 \mathbb{P}(X=k \mid p) f(p) dp = \int_0^1 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} dp = ...?$$

Para calcular o integral vamos lembrar a distribuição beta: $\zeta \sim B(\alpha,\beta)$, se a densidade $f(x)$ dela está concentrada em intervalo $(0,1)$ e $f(x) \propto x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$, ou

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0,1).$$

“Mistura discreta contínua”: a priori uniforme (Ross Ch.3.6.3).

$$\zeta \sim B(\alpha, \beta) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0,1).$$

o que significa que

$$1 = \int_0^1 f(x)dx = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx,$$

ou

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

“Mistura discreta contínua”: a priori uniforme (Ross Ch.3.6.3).

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Agora

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \int_0^1 \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}dp = \binom{n}{k}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)} \\
&= \binom{n}{k}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} \\
&= \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

“Mistura discreta contínua”: a priori uniforme (Ross Ch.3.6.3).

Um jeito alternativo de descrever esse experimento: $X \sim B(n,p)$ em que $p \sim U(0,1)$ representamos como soma $X = \sum_{i=1}^n X_i$, em que $X_i \sim B(p)$ é i-ésimo experimento Bernoulli. Com a mesma p faremos em sequencia os experimentos X_i, e calculamos a probabilidade de $X_{r+1} = 1$, sabendo, que $\sum_{i=1}^r X_i = k$.

$$\mathbb{P}(X_{r+1} = 1 \mid \sum_{i=1}^{r} X_i = k) = \frac{\mathbb{P}(X_{r+1} = 1, \sum_{i=1}^r X_i = k)}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^r X_i = k)}$$

$$= \frac{\int_0^1 \mathbb{P}(X_{r+1} = 1 \sum_{i=1}^r X_i = k \mid p) dp}{1/(r+1)} = (r+1) \int_0^1 \binom{r}{k} p^{k+1} (1-p)^{r-k} dp$$

$$= (r+1)\binom{r}{k} \frac{(k+1)!(r-k)!}{(r+2)!} = \frac{k+1}{r+2}$$

ou seja, se os anteriores r experimentos Bernoulli resultaram em k sucessos, então o proximo sucesso ocorre com a prob. $\frac{k+1}{r+2}$.

Exemplo. Distribuição Uniforme. *Um ponto é escolhido aleatoriamente no quadrado* $Q = \{(x, y) : \; |x| + |y| \leq 1\}$. *Sejam* (X, Y) *as coordenadas desse ponto. Isso significa que a densidade conjunta é*

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{se } (x, y) \in Q; \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin Q. \end{cases}$$

1. *Achar valor de* c.

2. *Achar distribuições marginais* f_X *e* f_Y.

3. *Usando item anterior reponder: as variáveis aleatórias* X *e* Y *são independentes?*

4. *Encontre a densidade de* X *dado que* $Y = 1/2$.

5. *Encontre a densidade de* X *dado que* $X + Y = 1/2$.

Exemplo. Distribuição Uniforme.

1. Achar valor de c.

Temos que:

$$Q = \begin{cases} x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, & \text{com área } \frac{1}{2} \\ -x + y \leq 1, x < 0, y \geq 0, & \text{com área } \frac{1}{2} \\ x - y \leq 1, x \geq 0, y < 0, & \text{com área } \frac{1}{2} \\ -x - y \leq 1, x < 0, y < 0, & \text{com área } \frac{1}{2} \end{cases}$$

e área de quadrado Q é 2. O que significa que $c = \frac{1}{2}$. Então

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } (x, y) \in Q; \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin Q. \end{cases}$$

Exemplo. Distribuição Uniforme.

2. Achar distribuições marginais f_X e f_Y.

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{|y|\le 1-|x|} \frac{1}{2}dy = \int_{-1-x}^{1+x} \frac{1}{2}\mathbb{I}_{[-1,0]}(x)dy + \int_{-1+x}^{1-x} \frac{1}{2}\mathbb{I}_{[0,1]}(x)dy \\
&= \frac{1}{2}\Big((1+x)-(-x-1)\Big)\mathbb{I}_{[-1,0]}(x) + \frac{1}{2}\Big((1-x)-(x-1)\Big)\mathbb{I}_{[0,1]}(x) \\
&= (1+x)\mathbb{I}_{[-1,0]}(x) + (1-x)\mathbb{I}_{[0,1]}(x)
\end{aligned}
$$

Ou, em outra formula

$$
f_X(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } x \in [0,1] \\ 1+x, & \text{se } x \in [-1,0] \end{cases}
$$

E de forma análoga, obtemos que:

$$
f_Y(y) = \begin{cases} 1-y, & \text{se } y \in [0,1] \\ 1+y, & \text{se } y \in [-1,0] \end{cases}
$$

Exemplo. Distribuição Uniforme.

3. X e Y são independentes?

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x,y) = \frac{1}{2} \text{ se } x, y \in Q$$

Portanto, X e Y não são independentes.

Exemplo. Distribuição Uniforme.

4. Encontre a densidade de X dado que $Y = 1/2$

$$f_{X|Y}(X|Y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}_Q(x,y)}{(1-y)\mathbb{I}_{[0,1]}(y) + (1+y)\mathbb{I}_{[-1,0]}(y)}$$

Como Y=$\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(X|Y = \frac{1}{2}) &= \frac{f(x,\frac{1}{2})}{f_Y(\frac{1}{2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)}{(1-\frac{1}{2})\mathbb{I}_{[0,1]}(\frac{1}{2}) + 0} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)}{\frac{1}{2}} = \mathbb{I}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x) \end{aligned}$$

Exemplo. Distribuição Uniforme.

5. Encontre a densidade de X dado que $X+Y=\frac{1}{2}$.

Observe: $X+Y=\frac{1}{2} \Rightarrow Y=\frac{1}{2}-X$

Pelo gráfico, X tem distribuição uniforme no intervalo da reta vermelha. Os pontos podem que tocam a borda do quadrado podem ser encontrados da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y-\frac{1}{2}=0 \\ x-y-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x=\frac{3}{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y-\frac{1}{2}=0 \\ -x+y-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x=\frac{-1}{4}$$

Portanto $X \sim U(-\frac{1}{4},\frac{3}{4})$

References:

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models.* 6th edition, Academic Press, 1997.