ESCOLA POLITÉCNICA DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos
PSI - EPUSP

PSI 3214

LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ELÉTRICA

Experiência 03:
Análise de Fourier de Sinais Periódicos

Profa. Elisabete Galeazzo
Antonio Sandro Verri
Dennis Cabrera Garcia

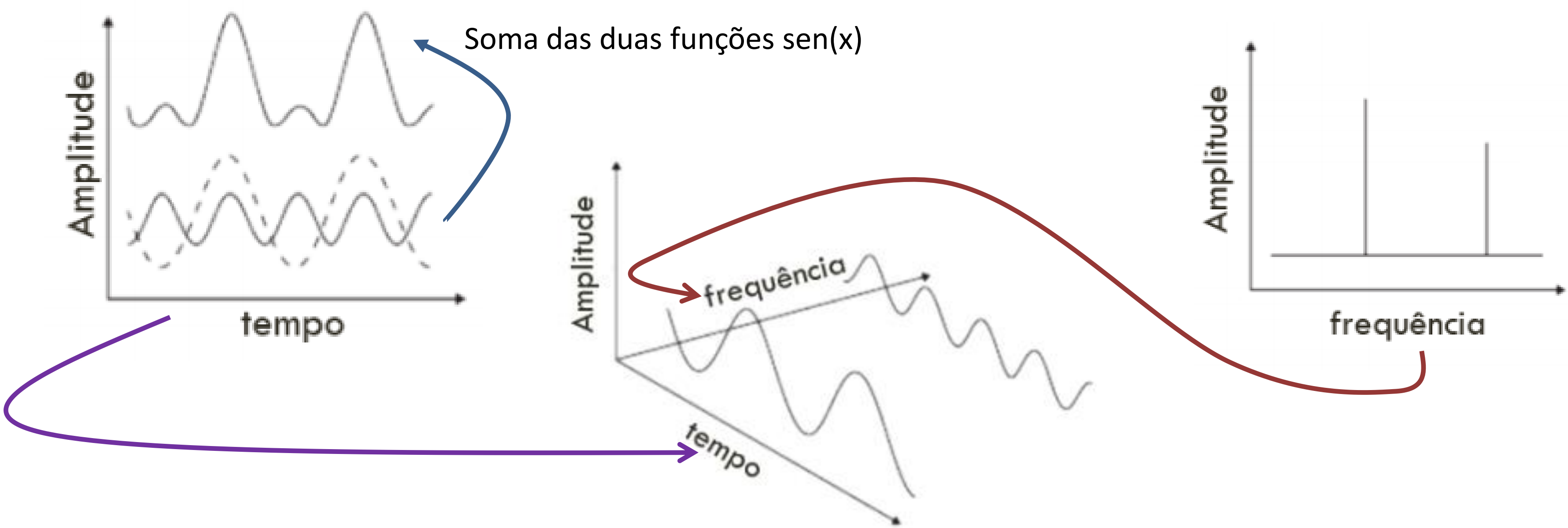
Representação dos sinais no domínio do tempo e da frequência

2 maneiras distintas de visualizar o mesmo sinal

Levam a uma compreensão mais clara do comportamento do sinal

Domínio do tempo:
A abscissa é expressa em tempo

Domínio da frequência:
A abscissa é expressa em frequência



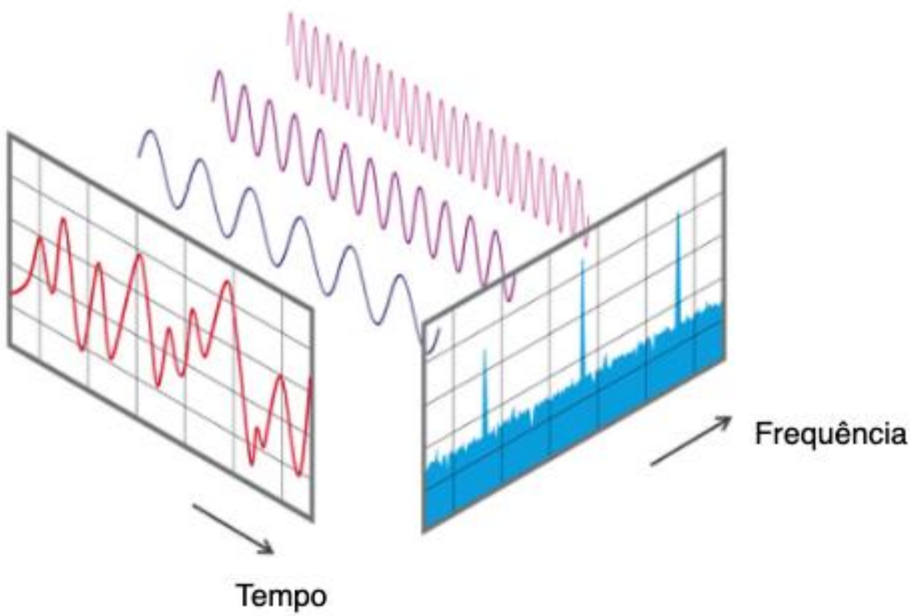
Sinais elétricos

tensão (**v(t)**) ou a corrente(**i(t)**) são grandezas que podem ser:

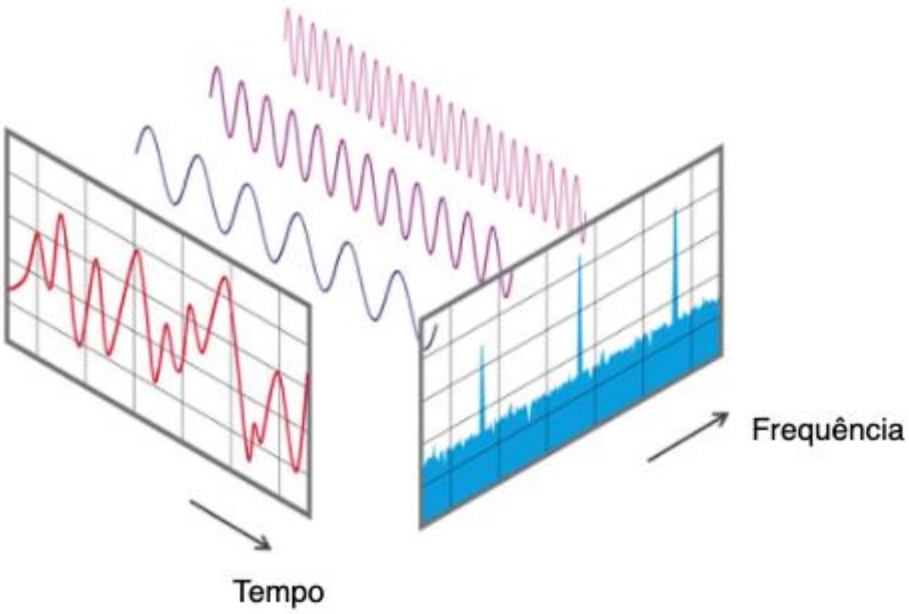
$\rightarrow$ Variáveis no tempo

$\rightarrow$ Variáveis na frequência

Domínio do tempo	**Domínio da frequência = Espectro**
Variável independente $\rightarrow$ **tempo**	Variável independente $\rightarrow$ **frequência**



Sinais: decomposição em senoides



Senoides são sinais simples $\rightarrow$ definidos por amplitude, frequência e fase;

. Espectro em frequência de uma senóide é uma única raia.
Altura da raia é igual à amplitude do sinal;

Sinal periódico qualquer pode ser representado por uma série de ondas senoidais, com frequências múltiplas de uma frequência fundamental, cada qual com uma amplitude e fase distintas.

ANÁLISE DE FOURIER

- A análise de Fourier é uma família de técnicas matemáticas baseadas na decomposição de sinais em senoides.

POR QUE DECOMPOSIÇÃO DE SINAIS EM SENÓIDES É INTERESSANTE PARA ANÁLISE DE CIRCUITOS????

SENOIDES QUE ENTRAM NUM SISTEMA LINEAR, SAEM COMO SENÓIDES (COM AMPLITUDES E FASES ALTERADAS POSSIVELMENTE), MAS MANTÊM A FREQUÊNCIA ORIGINAL!!!

Classificação dos sinais

✓ **Sinais contínuos** **ou** **discretos**

x(t) onde *t* pode assumir qualquer valor real

x[n] onde n ∈ {...-3,-2,-1,0,1,2,3...}

✓ **Sinais periódicos** ou aperiódicos

Análise de Fourier (decomposição de funções em senoides):

Sinais contínuos e periódicos:	→	Série de Fourier
Sinais contínuos e aperiódicos:	→	Transformada de Fourier
Sinais discretos e aperiódicos:	→	Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT)
Sinais discretos e periódicos:	→	**Transformada Discreta de Fourier (TDF)**

Família do sinais digitalizados!

Séries de Fourier

EXEMPLOS: ***f(x) e s(t)*** são **funções contínuas e periódicas no tempo**,

<u>**Sinais contínuos e periódicos**</u>: → <u>**Série de Fourier**</u>

$$f(x) = a_0 + a_1 sen(x) + a_2 sen(2x) + a_3 sen(3x) + \ldots$$
$$+ b_1 \cos(x) + b_2 \cos(2x) + b_3 \cos(3x) + \ldots$$

$$\boxed{s(t) = a(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\cos(n\omega_o t) + b(n)\sin(n\omega_o t)}$$

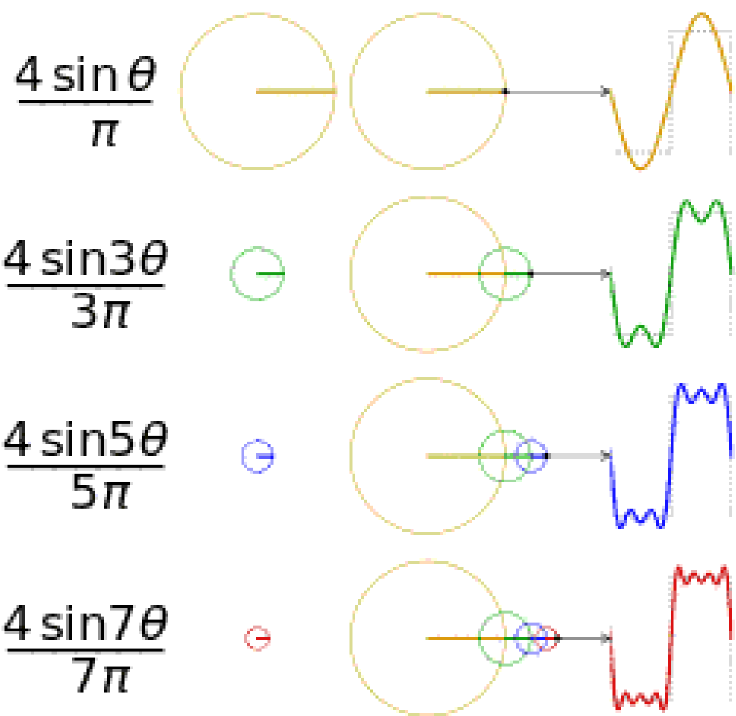
$$a(0) = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(n\omega_o t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(n\omega_o t)dt$$

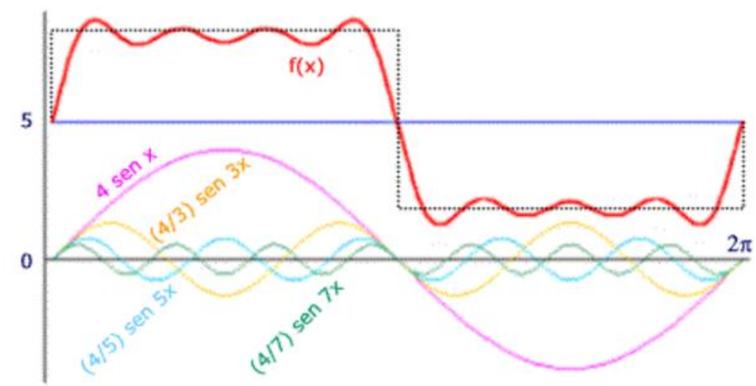
$$\omega_o = \frac{2\pi}{T}$$

https://pt.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-signals

Exemplo:
F(x) $\approx$ sinal retangular

```
f(x) = 5 + (4)sen x + (4/3)sen 3x + (4/5)sen 5x + (4/7)sen 7x + ...
```





Sinais discretizados

Para ser possível efetuar processamento digital dos sinais:

$\rightarrow$ As informações (sinais) devem ser discretizadas;

$\rightarrow$ As informações devem ser finitas.

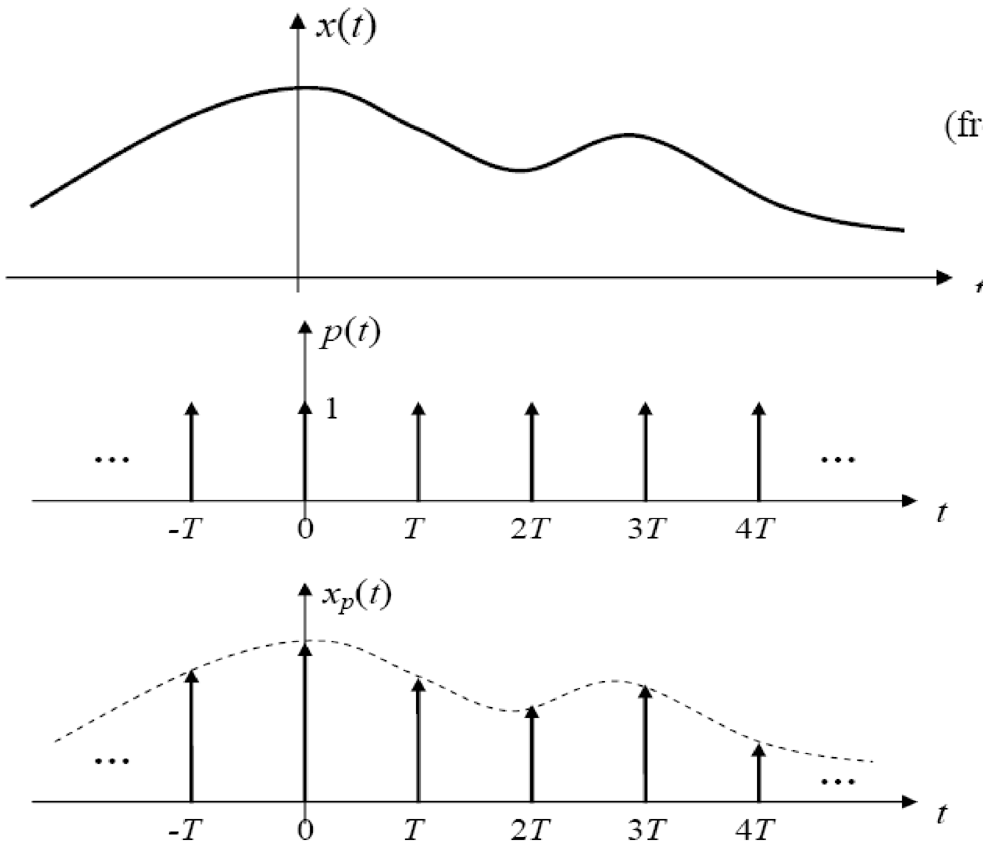
. Os conceitos de sinais contínuos no tempo <u>devem ser adaptados</u> para um domínio discreto

. Discretizar um sinal = amostrar o sinal
(utilizando-se um dado período entre amostras ou frequência de amostragem)

Conceitos básicos de amostragem (revisão no Exp.2)

- A discretização dos dados limita a máxima frequência observável
- Existe uma relação entre o intervalo entre amostras e a frequência máxima do sinal, dada pelo critério de Nyquist:
- $f_{max} < fa/2$

Como discretizar um sinal contínuo?



$$\omega_S = \frac{2\pi}{T}$$

(freq. de amostragem)

APÓS AMOSTRAGEM DE UM SINAL s(t) , OBTEM-SE UMA SEQUÊNCIA DISCRETA DE SINAIS:

$S(K) = (S_0, S_1, S_2, \ldots\ldots S_{N-1})$;
ONDE **N** É O N^{O} DE AMOSTRAS

"…. Computador trabalha com amostras do sinal (ou seja, sinais discretos….)"

Série de Fourier na Forma Trigonométrica

- **s(t)** é uma função contínua e periódica no tempo, logo:

$$s(t) = A(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A(n)\cos(n\omega_o t) + B(n)\sin(n\omega_o t)$$

$$A(0) = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(n\omega_o t)dt$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(n\omega_o t)dt$$

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T}$$

Série de Fourier na Forma Complexa

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)e^{-jn\omega_o t}dt$$

A partir da Série de Fourier na Forma Complexa...

. **s(t)** passa a ser uma **função discreta** e **periódica** no tempo, representada por N amostras e igualmente espaçadas de T_a, temos:

$$S[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T s(t).e^{-jn\omega_o t}dt \approx \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} s(kT_a)e^{-jk\omega_o n T_a}.T_a$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s(kT_a)e^{-jk\frac{2\pi}{N}.n}$$

$T = N.T_a$; T_a = período entre amostras

$$\frac{T}{T_a} = N \qquad \omega_o T_a = 2\pi.\frac{T_a}{T} = 2\pi.\frac{1}{N}$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE SINAIS ELÉTRICOS PERIÓDICOS : aplicar T.D.F

T.D.F. é a principal ferramenta que se utiliza
em processamento digital de sinais

PARA DISCRETIZAR OS SINAIS CONTÍNUOS, É NECESSÁRIO:

1) **OPERAÇÃO DE JANELAMENTO**: SELECIONAR UM INTERVALO DE DURAÇÃO FINITA DO SINAL

2) **OPERAÇÃO DE AMOSTRAGEM**: TOMAR AMOSTRAS DE UM SINAL CONTÍNUO

- A T.D.F. efetua uma representação do sinal no domínio da frequência,
- O sinal é composto por amplitudes em raias espectrais específicas.

Como efetuar a T.D.F. pelo computador:

- *O sinal sob análise, que tem duração infinita, precisa ser amostrado e levado ao computador;*
- *No software, o sinal precisa ser truncado num determinado intervalo. Chamamos esta operação de janelamento (T_d);*
- *Deve-se considerar que o sinal truncado se repete periodicamente.*
- *O intervalo entre amostras dentro da janela é denominado período de amostragem (T_a)(define-se também frequência de amostragem, (f_a)).*

Entendendo o espectro da TDF...

. O sinal do espectro é composto por amplitudes de senos e cossenos apresentadas em raias espectrais.

*. A variável independente da **TDF** é representada por **"k"**, denominada índice (ou **raia**) **espectral** (**k** varia de **0 a (N/2) -1**))*

*. **A resolução espectral (f_d)** é o intervalo entre duas raias consecutivas; ou seja, **k = 1** corresponde a 1 x f_d;*

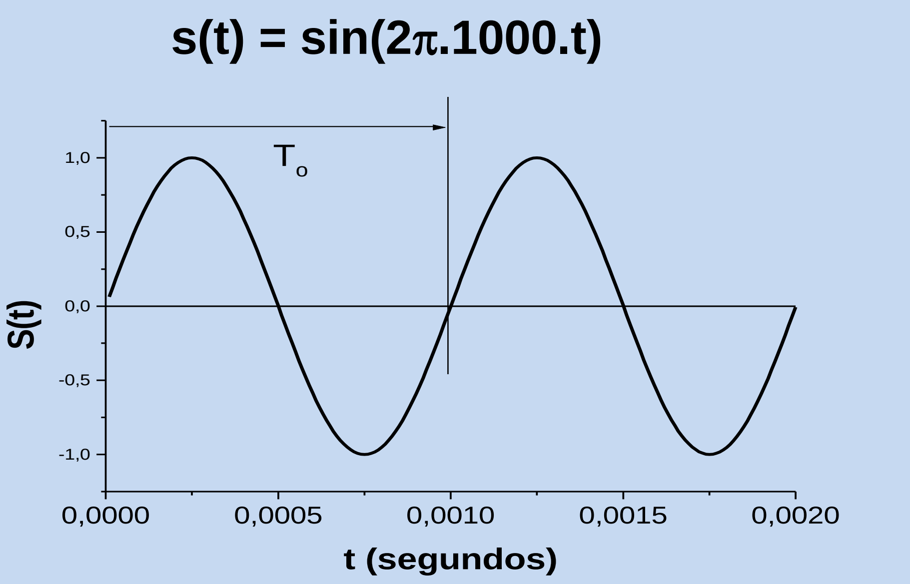
***K = 2** corresponde a 2 x f_d...*

*. O **<u>número</u>** de raias espectrais estará limitado pela **f_a/2***

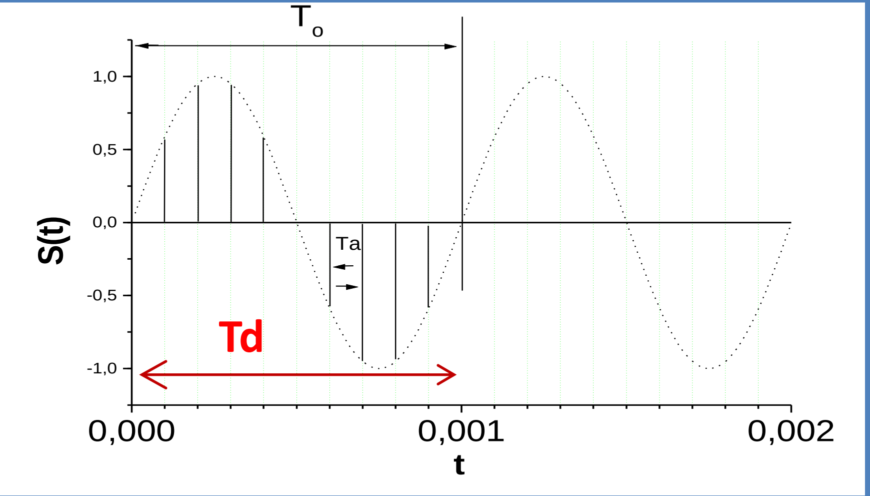
*. A raia espectral correspondente ao valor **N/2** corresponderia à frequência **f_a/2**;*

. Lembre-se: ***f_d*** *é a **<u>frequência do janelamento</u>*** *(T_d = 1/f_d).*

Exemplo:
Efetuar a TDF do sinal s(t) indicado



Truncando o sinal com T_d=T_o e pegando 10 amostras neste intervalo, temos f_a = 10 kHz:



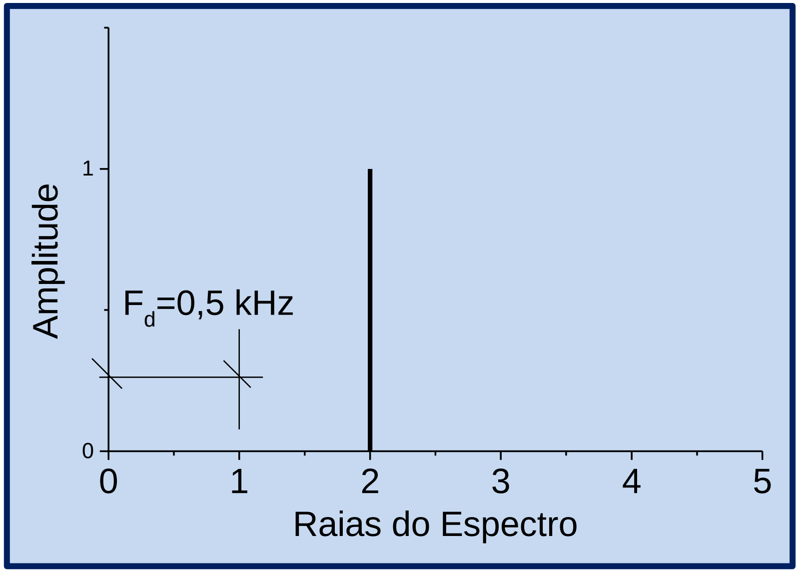
O espectro da TDF será:

$$f_d = f_o = 1\ \text{kHz}$$

Caso a escolha do período de

JANELAMENTO = 2 ms

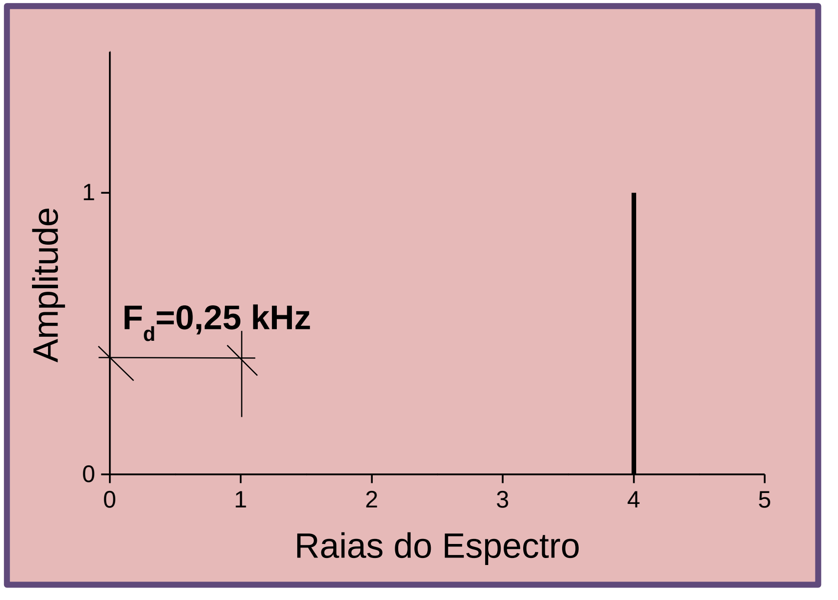
Ou seja: ($T_d = 2 \times T_o$) $\rightarrow f_d = 0{,}5$ kHz



Caso a escolha do período de

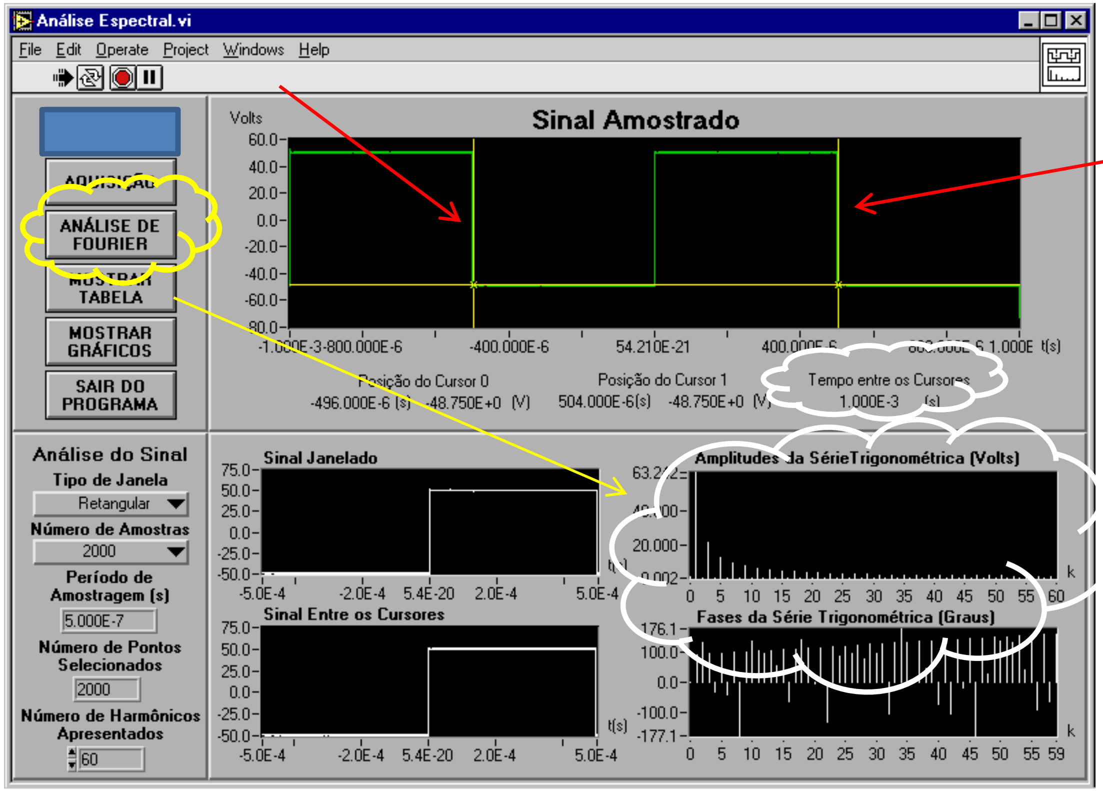
JANELAMENTO = 4 ms;

ou seja: ($T_d = 4 \times T_o$) $\rightarrow f_d = 0{,}25$ kHz



CONCLUSÃO: Quanto > for o n^0 de períodos, > será a resolução espectral

O procedimento para efetuar a TDF pelo computador é sempre o mesmo:



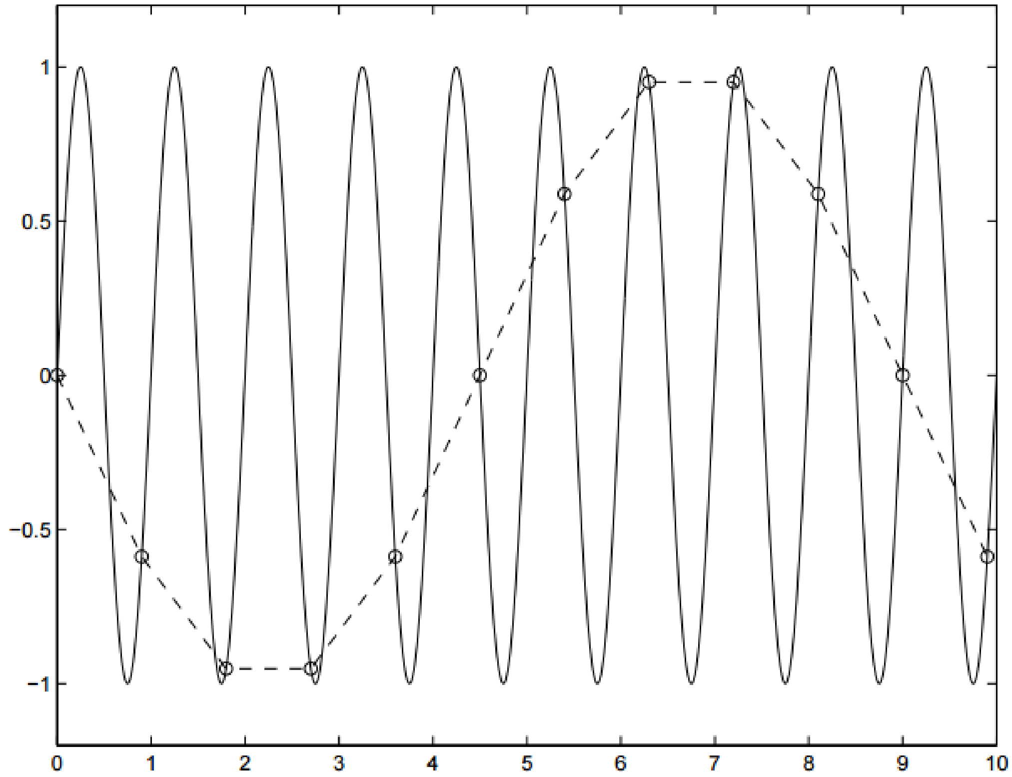
1) Ao janelar o sinal (truncá-lo), define-se a resolução espectral no domínio da frequência (fd);

2) Ao truncar o sinal, define-se quantas amostras do sinal serão usadas para calcular os coeficientes da TDF.

3) Define-se com isso a frequência de amostragem e o número de raias espectrais que serão calculadas pela TDF.

Erro de Rebatimento

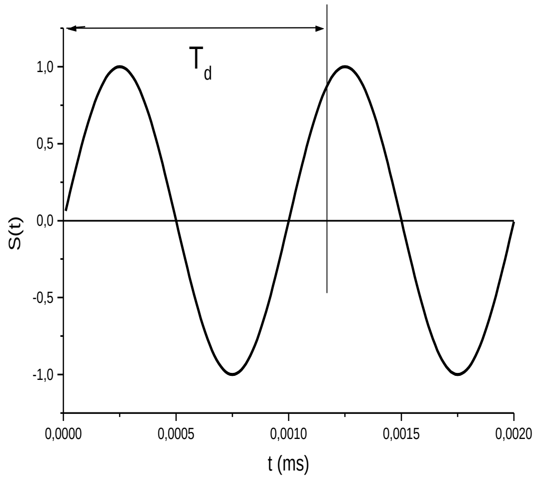
OCORRE → SUBAMOSTRAGEM DO SINAL

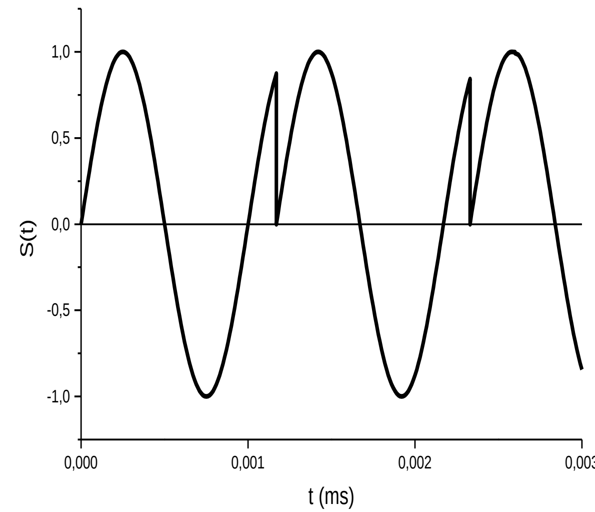


enquanto $f_{amostragem} > 2 \times f_{max}$ do sinal,
a informação poderá ser recuperada a partir das suas amostras

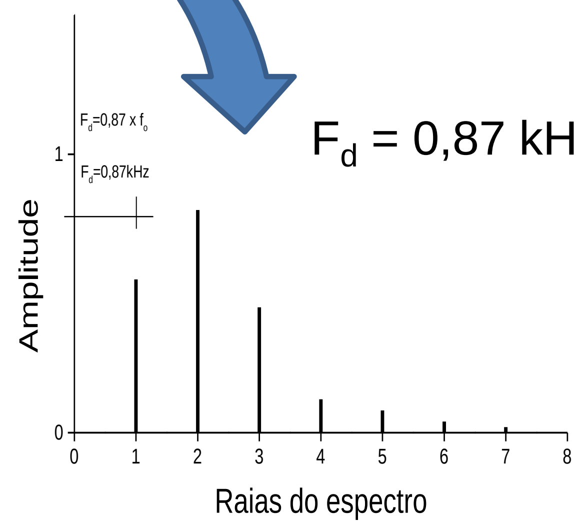
Efeito de vazamento

OCORRE → JANELAMENTO ≠ Nº EXATO DE PERÍODOS



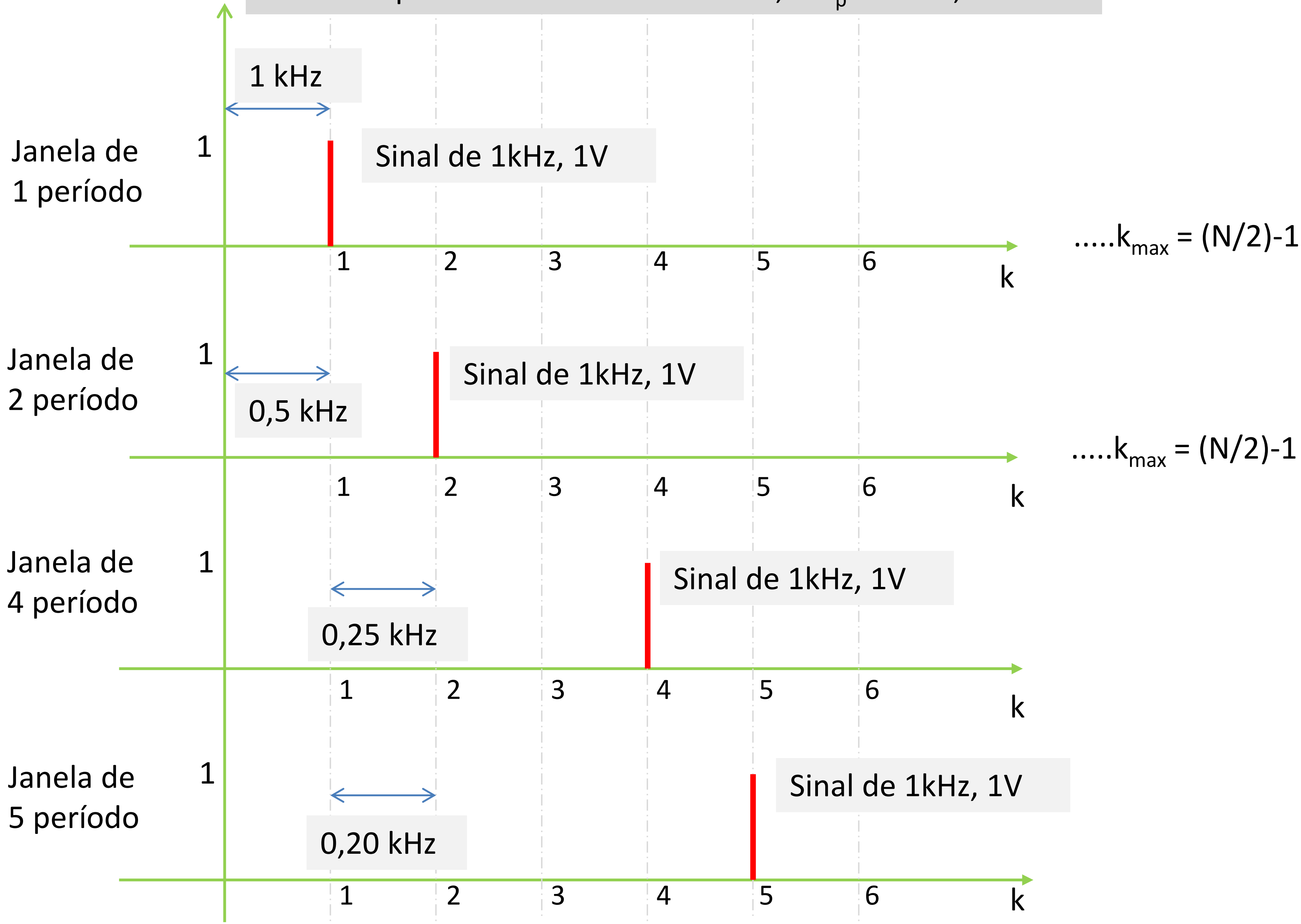


$F_d = 0,87$ kHz



Alargamento do espectro original devido ao alto conteúdo harmônico contido nas transições abruptas

Análise espectral de um sinal senoidal, 1 V_p e 1 kHz; N >>10



Sinal a ser amostrado com fa = 10 kHz é composto pelas seguintes frequências:7 kHz e 8 kHz