MAT0130 - Equações Diferenciais I

1a. Lista de Exercícios - 08/09/2020

(1) Verifique que as funçoes $y_1(x) = \cos(\ln x)$ e $y_2(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$, definidas para $x > 0$, são soluçoes da equaçao $x^2y'' + xy' + y = 0$.

(2) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, mostre que $y(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)f(t)\,dt$ é soluçao do problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$.

(3) Uma pessoa P, começando na origem, move-se no sentido positivo do eixo x, puxando um peso ao longo da curva C, chamada de **tatriz**, conforme mostra a figura 1. O peso, inicialmente localizado sobre o eixo y em $(0, s)$, é puxado por uma corda de comprimento constante s, a qual é mantida esticada durante todo o movimento.Determine uma uma equação diferencial para a trajetória do peso. Suponha que a corda seja sempre tangente a C.

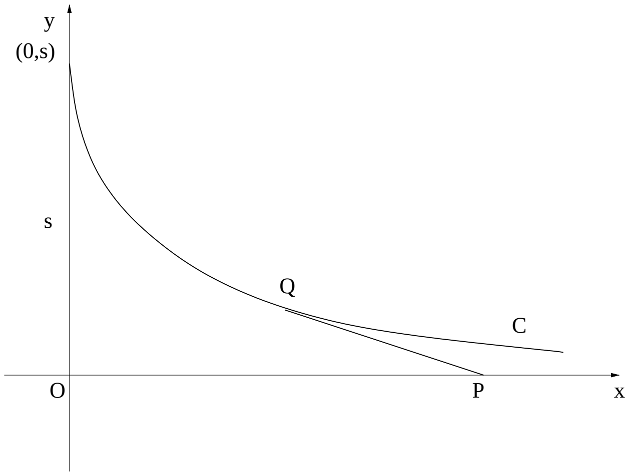

FIGURE 1. Tratriz.

(4) Conforme ilustrado na figura (5), raios de luz atingem uma curva plana C de maneira que todos os raios paralelos ao eixo x sejam refletidos para um único ponto F. Supondo que o ângulo α de incidência seja igual ao ângulo de reflexão, determine uma equação diferencial que descreva o formato da curva C.

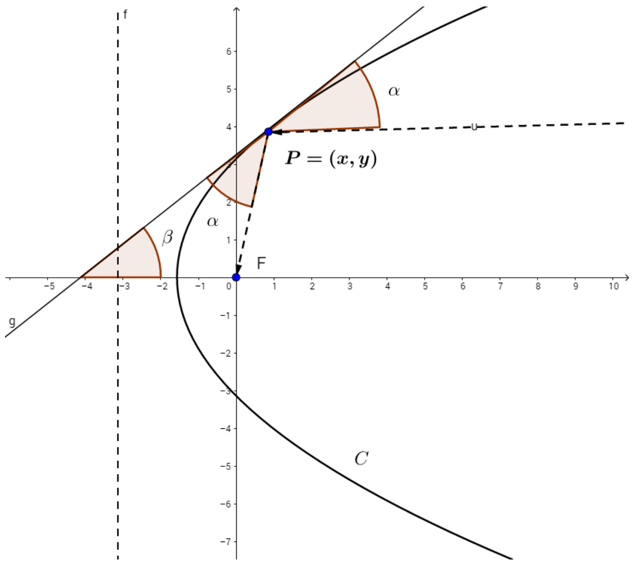

FIGURE 2. Espelho parabólico.

(5) Suponha que água está saindo de um tanque por um buraco circular em sua base de área A_h. Quando a água vaza pelo buraco, o atrito e a contração da corrente de água nas proximidades do buraco reduzem o volume de água que está vazando do tanque por segundo para $cA_h\sqrt{2gh}$, onde c $(0 < c < 1)$ é uma constante empírica. Determine uma equação diferencial para a altura da água h no instante t para um tanque cúbico, como na figura 3. O raio do buraco é de 2 cm.

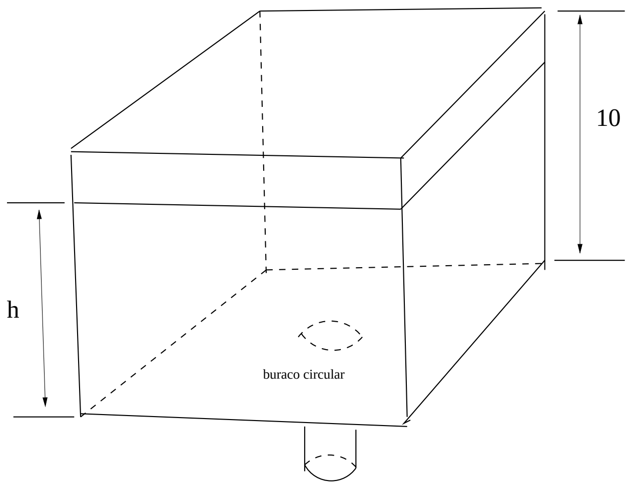

FIGURE 3. Caixa de água.

(6) (Equações homogêneas) Se $f(t, x)$ é homogênea de grau 0 (isto é, $f(\alpha t, \alpha x) = f(t, x)$, para todo $\alpha > 0$), mostre que a substituição $x = tu$ transforma a equação $\dot{x} = f(t, x)$ numa do tipo considerada no problema anterior.

(7) Determine todas as soluções das seguintes equações:
   (a) $\dot{x} = te^t$
   (b) $\dot{x} = t\log(t^2 - 1)$
   (c) $\dot{x} = x^2 - 4$
   (d) $\dot{x} = \sec x$
   (e) $\dot{x} = -(t + 1)x/t$

(f) $\dot{x} = t^3(x+1)^{-2}$
(g) $\dot{x} = (x+t)/t$
(h) $\dot{x} = (x - \sqrt{x^2+t^2})/t$
(i) $\dot{x} = \frac{3x^2-t^2}{2tx}$
(j) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x+y}{y-2x}$
(k) $(x - \sqrt{xy})\frac{dy}{dx} = y$
(l) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x+1}$

(8) Resolva cada um dos problemas de valor inicial
(a) $2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0$, $y(1) = 1$
(b) $3x^2 + 4xy + (2y+2x^2)\frac{dy}{dx} = 0$, $y(0) = 1$
(c) $3xy + y^2 + (x^2+xy)\frac{dy}{dx} = 0$, $y(2) = 1$
(d) $t^2(1+y^2) + 2y\frac{dy}{dt} = 0$, $y(0) = 1$
(e) $\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y+t^2y}$, $y(2) = 3$
(f) $\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2+4t+2}{2(y-1)}$, $y(0) = -1$
(g) $\frac{dy}{dt} = k(a-y)(b-y)$, $y(0) = 0 \quad (k, a, b > 0)$
(h) $\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{\sqrt{t^2+y^2}}{t}$, $y(1) = 0$

(9) Determine a constante a de modo que a equação dada seja exata e resolva a equação resultante:
(a) $x + ye^{2xy} + axe^{2xy}\frac{dy}{dx} = 0$
(b) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{(ax+1)}{y^3}\frac{dy}{dx} = 0.$

(10) Determine todas as funções $f(x)$ tais que a equação diferencial

$$y^2 \operatorname{sen} x + yf(x)\frac{dy}{dx} = 0$$

seja exata. Resolva a equação para essas funções f.

(11) Mostre que se $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)/M$ só depende de y, então a equação $M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$ admite um fator integrante que só depende de y. Formule (e prove) uma condição suficiente para que o fator integrante dependa apenas de x.

(12) Determine um fator integrante e resolva:
(a) $(x^2+y^2) + (x^3+3xy^2+2xy)\frac{dy}{dx} = 0$
(b) $(3y^2 - x^2 + 1) + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$
(c) $(3xy - 4y) + (2x^2 - 4x)\frac{dy}{dx} = 0$
(d) $(xy^2 + 2) + 3x^2y\frac{dy}{dx} = 0.$

(13) (a) Uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x)y^n$$

é denominada uma *equação de Bernoulli*. Aqui, n é uma constante real e f e g são funções contínuas num intervalo (a,b). Mostre que a mudança $z = y^{1-n}$ transforma uma equação de Bernoulli numa equação linear .

(b) Resolva as seguintes equações:
(i) $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$
(ii) $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = y^{\frac{1}{2}}$
(iii) $\frac{dp}{dt} = \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p.$

(14) (a) Uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) + f_2(x)y + f_3(x)y^2 \quad (*)$$

é denominada uma *equação de Riccati*. Suponha que y_p é uma solução particular de (*). Prove que a mudança $y = y_p + \frac{1}{v}$ transforma (*) na equação linear

$$\frac{dv}{dx} = -\left(f_2(x) + 2f_3(x)y_p(x)\right)v + f_3(x).$$

(b) Ache a solução geral de cada uma das seguintes equações:
(i) $y' = xy^2$
(ii) $y' = \frac{2x+3y}{y-3x}$
(iii) $y' + y = y^2$
(iv) $y' = x^2y + 2$
(v) $y = y + \cos x$
(vi) $y' = \frac{x+1}{y^2+1}$
(vii) $y' = \frac{3xy+2}{x^2+1}$
(viii) $y' = \frac{x^2+2y+1}{3y-2x-1}$
(ix) $y' + xy = xy^3$.

(15) (a) Dado $y_0 \in \mathbb{R}$, resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' + \frac{2y}{x} = 4x \\ y(1) = y_0 \end{cases}$.
(b) Esboce o gráfico de algumas soluçoes encontradas no item (a).
c Para que valores de y_0 o problema de valor inicial $\begin{cases} xy' + 2y = 4x^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ tem soluçao?

(16) Mostre que os problemas de valor inicial abaixo têm infinitas soluçoes.
(a) $\begin{cases} y' = 5(y-1)^{\frac{4}{5}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$,
(b) $\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}(3x^2+1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

(17) (a) Mostre que toda soluçao de $x^2y' + 2xy = 1$, com $x > 0$, tende a zero quando $x \to +\infty$.
(b) Encontre uma soluçao da equaçao acima satisfazendo $y(2) = 2y(1)$.

(18) (a) Mostre que toda soluçao de $x^2y' + 2xy = 0$, com $x > 0$, tende a zero quando $x \to +\infty$.
(b) Encontre uma soluçao da equaçao acima satisfazendo $y(2) = 2y(1)$.