1 Um conjunto não mensurável para a medida de Lebesgue

Exemplo de Vitali (1905) Seja $\mu : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to \bar{R}^+$ tal que:

1. $\mu((a,b)) = b - a$
2. μ é invariante por translações, ou seja, $\mu(E + a) = \mu(E)$.
3. μ é σ-finita.

Então, pelo Axioma da Escolha, existe um conjunto não mensurável.
Seja, em $\mathbb{R}$, a relação de equivalência dada por

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Definimos a mesma relação em $[0, 1]$.
Formamos o conjunto E escolhendo, pelo Axioma da Escolha, um ponto para cada classe de equivalência, no [0,1]. (Por quê podemos escolher dentro do [0,1]?)
Tomamos $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ e enumeramos este conjunto como $\mathbb{Q}_1 = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Definimos os conjuntos $E_n = E + r_n = \{e + r_n \mid e \in E\}$

Lema 1. *Se $m \neq n$ então $E_n \cap E_m = \emptyset$.*

Demonstração. Com efeito, se $x \in E_n \cap E_m$, então $x = a + r_n = a + r_m$ com $a \in E$, logo $r_n = r_m$ e, então $n = m$. □

Lema 2. $[0, 1] \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Demonstração. Seja $x \in [0, 1]$. Então existe $a \in E$ e $r_m \in \mathbb{Q}_1$ com $x = a + r_m$, com $a \in [0, 1]$. Logo, $x \in E_m$.
□

Assim, temos $[0, 1] \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n \subset [-1, 2]$.
Suponhamos agora que E é mensurável. Logo E_n é mensurável. Como E_n são dois a dois disjuntos, pela σ-aditividade:

$$\mu([0, 1]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu([-1, 2])$$

Ou seja:

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq 3$$

pela definição de μ nos intervalos.
Mas μ é invariante por translações, logo, $\mu(E_n) = \mu(E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\mu(E)$ existisse, teríamos:

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E) \leq 3$$

Como $1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E) \Rightarrow \mu(E) > 0$; mas como $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E) \leq 3 \Rightarrow \mu(E) = 0$.
Logo não existe $\mu(E)$, isto é, E é não mensurável.
Portanto, a σ-álgebra $\mathcal{A}$ é estritamente menor do que $\wp(X)$.

Exercício. E é enumerável?