MAT0234 Medida e integração
IME-USP segundo semestre 2020
Medida Exterior

Com as definições que temos até agora, aparecem dois problemas:
1. dizemos que a medida de Lebesgue em [0,1] é definida sobre os Borelianos, e que $\mu([a,b]) = (b-a)$. Também temos em $\mathbb{R}^2$, $\mu[a,b]\times[c,d]$, etc. Como calcular μ sobre um Boreliano dado? Este cálculo é sempre possível?
2. Ou também, se definirmos uma medida λ sobre uma família de conjuntos $\mathcal{F}$, por exemplo uma álgebra (não necessariamente σ-álgebra), será possível estendé-la para a σ-álgebra gerada ou outra? Sempre? Sob quais condições? Esta extensão será única?
Por outras palavras: até onde a definição de λ sobre uma família de conjuntos "prende"a definição em outros conjuntos?
Por último, podemos ter uma medida definida numa σ álgebra, mas queremos estendé-la para outra σ álgebra. Por exemplo, se ν estiver definida numa σ álgebra (por exemplo, os Borelianos) queremos tornar mensuráveis todos os subconjuntos de um boreliano B com $\nu(B)=0$.

Por esta razão, dada uma função de conjunto λ a valores reais, definiremos a **medida exterior** associada denotada por λ^*. Ela não será necessariamente uma medida, porque não precisará ser aditiva (nem portanto σ aditiva).

Um exemplo: suponhamos que queremos estimar a área (=medida) de um semicírculo **S** de raio r. Mas nós só conhecemos a área de polígonos regulares. Vamos aproximar **S** por polígonos regulares. Como fazemos? Podemos determinar polígonos que contém **S** e polígonos que estão contidos em **S**. Sejam polígonos regulares $P_n, Q_n, P_n \supset \mathbf{S} \supset Q_n$ e fazemos crescer o número de lados. P_n são polígonos externos (onde o apótema é o raio r), e Q_n são polígonos internos (onde o raio do polígono é o raio r). À medida que o número de lados cresce, as áreas dos P_n diminuem. Por outro lado, com os polígonos circunscriptos, acontece o contrário: à medida que o número de lados cresce, as áreas dos Q_n crescem. E as áreas de P_n e Q_n se aproximam. Observemos que a área de S será o **ínfimo** das áreas dos P_n, e o **supremo** das áreas dos Q_n. O uso dos polígonos internos já tinha sido feito por Eudoxo (aprox 400 a. c.), com o chamado Método de Exaustão.
Outro exemplo: quando calculamos a área do semicírculo pela integral de Riemann, fazemos uma soma inferior e uma soma superior. Nos dois casos estimamos a área pela soma de áreas de retângulos. Na soma superior temos uma união de retângulos que contém **S** e na inferior uma união de retângulos contidos em **S**.

Ou seja, a partir da definição das áreas de polígonos regulares, conseguimos dar o valor da área de conjuntos mais complexos. Daí, o valor das áreas dos polígonos regulares FIXA o valor da área de conjuntos mais complexos, *estendendo* a definição de área. Relacionemos com a área de conjuntos em $\mathbb{R}^2$ definida por Integral de Riemann. A(D)=$\int\int_D 1dxdy$ quando ela existir.

Teremos a **área superior** que corresponde a tomar o ínfimo das áreas das uniões de retângulos que cobrem D. (Isto corresponde à integral superior da Integral de Riemann para a função 1). Ou seja, a partir das áreas dos retângulos e de suas uniões, calculamos as áreas de conjuntos mais gerais.
De modo análogo, para a "medida"λ faremos o seguinte: definiremos a λ^* sobre $\wp(X)$, a partir de λ. E depois restringiremos a alguns conjuntos . Esta λ^* será chamada de **medida exterior**. Mas não necessariamente será uma medida.
Definição: $\lambda^* : \wp(X) \to [0, +\infty]$ é uma **medida exterior** se ela verificar:

1. $\lambda^*(\emptyset) = 0$.

2. Se $A \subset B$ temos $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$. (monotonicidade)

3. $\lambda^*(\cup_1^{+\infty} A_j) \leq \sum_1^{+\infty} \lambda^*(A_j)$. (σ-sub-aditividade)

Ou seja, ela não é σ-aditiva nem aditiva necessariamente.

Faremos como dizemos acima: Damos inicialmente uma "medida"λ numa família $\mathcal{F}$ ou álgebra de conjuntos, e a partir desta definimos a medida exterior. Como será este processo?
Antes, uma definição para tirar as aspas da palavra "medida".
Definição: Uma **pré-medida** λ é uma função $\lambda : \mathcal{F} :\to [0, +\infty]$, onde $\mathcal{F}$ é uma álgebra, que verifica:

1. $\lambda(\emptyset) = 0$
2. se A_j *e* $\cup_1^{+\infty} A_j \in \mathcal{F}$ então $\lambda(\cup_1^{+\infty} A_j) = \sum_1^{+\infty} \lambda(A_j)$ se os A_j forem disjuntos 2 a 2.
   Observação: este é o caso da pré-medida de Lebesgue, em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $[0, 1]; [0, 1] \times [0, 1]$, etc.

Para fixarmos as ideias podemos pensar na medida de Lebesgue definida somente sobre a álgebra das uniões finitas dos intervalos (a,b] e o $\emptyset$, sendo X=[0,1]. Outro exemplo seria a medida de Lebesgue em [0,1]x[0,1], com as uniões finitas de retângulos semi-abertos, etc.
Primeiro: $\lambda^*(F) = \lambda(F)$, se $F \in \mathcal{F}$.
Continuando, dado um conjunto D em $\wp([0, 1])$ podemos cobrí-lo D por uniões de conjuntos $A_j = (a_j, b_j]$ da família (chamados de **elementares**) . No caso da pré-medida de Lebesgue em [0,1] estes elementares serão os intervalos (a,b].
Segundo: Para respeitar a **monotonicidade**, no caso da medida de Lebesgue em [0,1] teremos que *se* $D \subset \cup_1^{+\infty} (a_j, b_j]$ então $\lambda^*(D)$ deverá ser $\leq \sum_1^{+\infty} \lambda((a_j, b_j])$.
Isto deve ocorrer para qualquer família de intervalos semi-abertos cuja união cobre D.
Assim, para satisfazer esta desigualdade com todas essas famílias, definimos no caso da medida de Lebesgue em [0,1], $\lambda^*(D) = \inf\{\sum_1^{+\infty} \lambda((a_j, b_j]),\ com\ D \subset \cup_1^{+\infty}(a_j, b_j]\}$.
Observação: não é difícil comprovar que a medida exterior de Lebesgue pode ser obtida tomando como conjuntos elementares os intervalos abertos (a_j, b_j) ou os fechados $[a_j, b_j]$. E análogamente com os retângulos em $\mathbb{R}^2$.

Caso Geral

Primeiro: $\lambda^*(F) = \lambda(F)$, se $F \in \mathcal{F}$. Dado um conjunto D em $\wp(X)$ cobrimos D por uniões de conjuntos A_j da família (chamados de elementares) .
Segundo: Para respeitar a monotonicidade, deverá ser $\lambda^*(D) \leq \sum_1^{+\infty} \lambda^*(A_j)$.
Em particular, $\lambda^*(D)$ deverá ser $\leq \sum_1^{+\infty} \lambda(A_j)$ se os $A_j \in \mathcal{F}$.
Isto deve ocorrer para qualquer família A_j cuja união cobre D.
Assim, para satisfazer esta desigualdade com **todas** essas famílias, definimos
$\lambda^*(D) = \inf\{\sum_1^{+\infty} \lambda(A_j),\ com\ D \subset \cup_1^{+\infty} A_j\}$.

Vamos refrasear um dos problemas enunciados acima: Cómo estender uma pré-medida de uma álgebra para uma σ-álgebra?

Definição: Dada $\lambda : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ uma pré-medida , definimos a **medida exterior associada** $\lambda^* : \wp(X) \to [0, +\infty]$ por $\lambda^*(D) = \inf\{\sum_1^{+\infty} \lambda(A_j),\ com\ D \subset \cup_1^{+\infty} A_j,\ A_j \in \mathcal{F}\}$
(Observação Para podermos definir uma medida exterior, não é necessário que $\mathcal{F}$ seja uma álgebra. Basta que seja uma família de conjuntos que contém X e $\emptyset$). Mas ficaremos com $\mathcal{F}$ álgebra.

Proposição 1: se λ^* é como acima, então ela é uma medida exterior.
Demonstração: direta.
Por esta razão chamamos λ^* de **medida exterior associada** à λ.
Observe que uma medida exterior tem a desvantagem de ser sub-aditiva e a vantagem de estar definida em $\wp(X)$. Voltemos ao nosso problema inicial, que é determinar uma medida que estenda λ, sobre uma σ-álgebra. Não nos satisfazemos com a σ-subaditividade. Procuramos σ-aditividade. Por isso devemos restringir, às vezes, a definição de λ^* para uma família de conjuntos menor do que $\wp(X)$.
Definiremos o que é um conjunto mensurável *do ponto de vista da medida exterior* para satisfazer a σ-aditividade.
Para motivar a definição, notemos em primeiro lugar, que mínimamente devemos ter aditividade para o conjunto total X

$$\lambda^*(X) = \lambda^*(E) + \lambda^*(E^c)$$

Isto constitui uma primeira restrição: nem todo conjunto de $\wp(X)$ precisa verificar esta igualdade. Descartaremos os conjuntos E que não verificam esta igualdade.
E esta igualdade aditiva precisa se verificar de modo mais geral, ou seja se $A \in X$ então

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E^c \cap A)$$

Isto foi observado por Caratheodory (1918) que definiu:
Definição: Seja λ^* uma medida exterior em X. Então um conjunto $E \in X$ é **mensurável para** λ^* se $\forall\, A \subset X$ temos

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E^c \cap A)$$

Ou seja, E e E^c cortam A adequadamente (aditivamente) para qualquer A.
Com esta definição ele demonstrou o seguinte Teorema:
Teorema de Caratheodory: Seja λ^* uma medida exterior em X, e seja $(\mathcal{M})$ a família dos conjuntos mensuráveis de X. Então:

1. $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra;

2. λ^* restrita a $\mathcal{M}$ é uma medida completa.

Ver nota histórica no livro de Folland.

1. Exercício : se $E \subset X$; *e* $\mu^*(E) = 0$, então E é mensurável para μ^*.

Proposição 2: Se definirmos $\lambda^*(D) = \inf\{\sum_1^{+\infty} \lambda(A_j)\ com\ D \subset \cup_1^{+\infty} A_j,\ A_j \in \mathcal{A}\}$ a partir da pré-medida λ, temos que

1. $\lambda^*(E) = \lambda(E)$; $\forall\ E \in$ na álgebra. (ou seja, λ^* estende λ).

2. Todo E da álgebra é mensurável para λ^* , ou seja que $\lambda^*(A) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E^c \cap A)$ para qualquer $A \subset X$.

Teorema de Extensão: Seja λ uma pré-medida numa álgebra $\mathcal{A}$ como acima e λ^* a medida exterior associada. Seja $\mathcal{M}$ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$. Então:

1. existe uma medida $\bar{\lambda} : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ dada por $\bar{\lambda} = \lambda^*$ restrita a $\mathcal{M}$

2. se ν for outra medida que estende λ, então $\nu(E) \leq \bar{\lambda}(E)\ \forall\ E \in \mathcal{M}$, e são iguais se $\bar{\lambda}(E) < (+\infty)$

3. se λ for σ-finita, a extensão é única.
   Definição: uma medida ou pré-medida μ é σ-**finita** se $X = \cup_1^{+\infty} (E_j)$ com $\mu(E_j) < (+\infty)\ \forall\ j$. Ou seja que o conjunto total é união enumerável de conjuntos de medida ou pré-medida finita.

Resumindo: dada uma pré-medida estendemos a uma medida exterior. Daí pegamos os conjuntos mensuráveis para a medida exterior. Eles constituem uma σ-álgebra. Restringimos a medida exterior a esta σ-álgebra e obtemos uma medida. A medida de um conjunto é dada pelo ínfimo das medidas sobre os conjuntos elementares.