Numa rotação com número de rotação racional p/q, todos os pontos têm período q já que

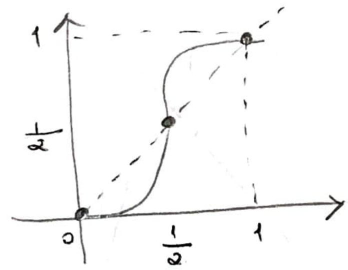
$$R(x) = x + \frac{p}{q} \mod 1 \Rightarrow R^2(x) = x + \frac{2p}{q} \mod 1 \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow R^q(x) = x + p \mod 1 = x \mod 1$$

Entretanto podemos ter um homeomorfismo com número de rotação racional que nem todo ponto é periódico

Por exemplo a aplicação norte sul (um repulsor e um atrator)

↳ Se S = círculo = $[0,1]$ com 0 e 1 identificados, o polo norte vai ser o ponto $1/2$ e vamos supor que ele é repulsor e o polo sul seria o 0 = 1 que seria atrator.



Consideremos uma $f: S^1 \to S^1$ cujo gráfico é semelhante ao desenhado acima

O $1/2$ e o 0 são pontos fixos, ou seja, o polo norte e o polo sul são pontos fixos

A imagem de qualquer ponto x no intervalo $(1/2, 1)$ é maior do que x. Isso quer dizer que se x está em $(\frac{1}{2}, 1)$ então $x, f(x), f^2(x) \dots$ é uma sequência crescente. De fato, essa sequência tende a 1. Isso quer dizer que os pontos se afastam de $\frac{1}{2}$ = polo norte e tendem a 1 = polo sul

Para o intervalo $(0, 1/2)$ acontece a mesma coisa. Se x está nele, a sequência $x, f(x), f^2(x), \dots$ é decrescente e tende a zero.

(Uma maneira de representar isso é fazendo o diagrama da esquerda)

O diagrama da esquerda representa o comportamento mesmo quando você itera a f. No caso os pontos se afastam de N e se aproximam de S.

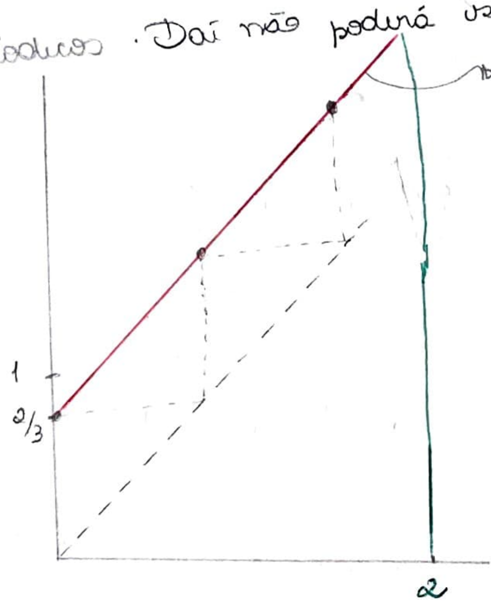
Isso implicaria que o número de rotação de f é 0. Mas f não é uma rotação, de fato ela tem vários pontos que não são fixos (todos exceto os polos) e não pode ser conjugado a uma rotação também.

Vamos construir com número de rotação arbitrário.

Vejamos 1º o caso que $\rho(f) = \frac{2}{3}$ já que é mais fácil de desenhar e os demais casos são análogos.

No caso, a gente vai criar uma função que tem um ponto de período 3 (e número de rotação $2/3$) e que tem outros pontos que não são periódicos. Daí não poderá ser conjugado a uma rotação

$g(x) = x + \frac{2}{3}$ → exemplo mais fácil que nós temos com número de rotação $\frac{2}{3}$



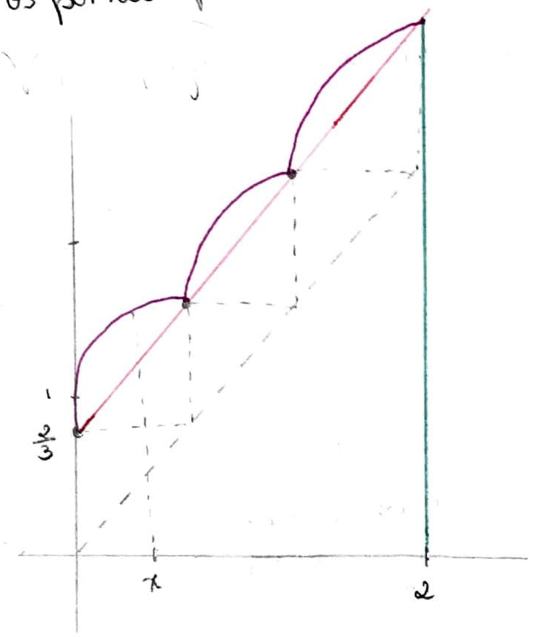
No caso, o vermelho é o gráfico de $f(x) = x + 2/3$. Em pontilhado tem a diagonal $y=x$. e tem a órbita do zero que são os pontos marcados.

Temos $f(0) = 2/3$, $f^2(0) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

$f^3(0) = f(4/3) = 2$, $f^4(0) = 2 + \frac{2}{3}$

Então só precisamos construir um gráfico de uma função que preserva essa órbita mas não preserva outros.

No caso um gráfico semelhante a reta vermelha trocando os segmentos que unem a órbita do zero irá funcionar já que não terá mais os pontos periódicos



Para formalizar esta construção temos uma dificuldade:

- Precisamos projetar a f que construímos, ou seja, f tem que ser levantamento de alguém. Por exemplo, a f desenhada está no intervalo $[0,2]$ então não serviria para ser nossa f.

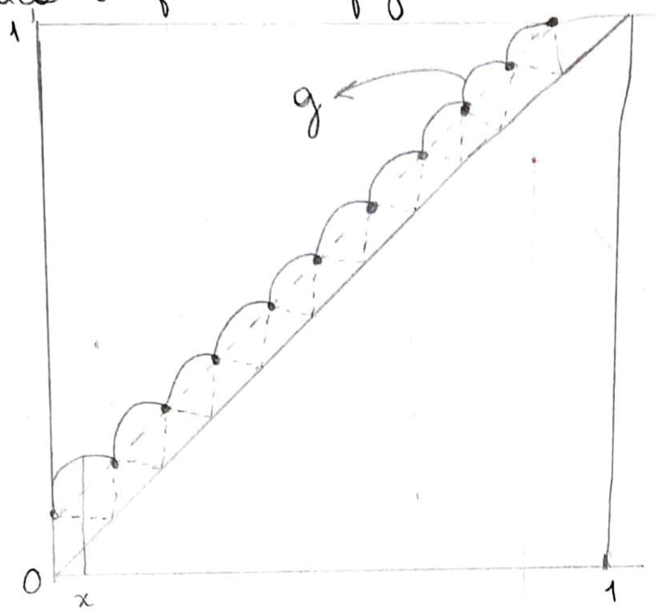
Para resolver o problema fazemos o seguinte procedimento:

Fazemos a construção anterior para números de rotação $\frac{1}{q}$ já que neste caso conseguimos construir inteiramente no $[0,1]$, não teríamos o problema de projetar

Em seguida usamos o fato de que se f é homeomorfismo com número de rotação R então f^p terá número de rotação pR.

Assim, se construímos um homeomorfismo com número de rotação $\frac{1}{q}$ ao fazermos a iteração p vezes teremos um homeomorfismo com número de rotação p/q e da mesma forma nem todos os seus pontos serão periódicos de período 7.

No caso em que número de rotação é $\frac{1}{11}$, podemos fazer uma construção conforme a figura abaixo



$\rho(g) = \frac{1}{11}$

Considerando $f = g^3$ teremos que $\rho(f) = \frac{3}{11}$ e f não teria todos os pontos periódicos não sendo semi-conjugado a uma rotação.