Capítulo 40(42): Mecânica Quântica

- Número de aulas: **3 aulas**
- Seções do livro texto: *40.1 Partícula em uma Caixa; 40.2 Poço de Potencial; 40.3 Barreira de Potencial e Tunelamento e 40.4 O Oscilador Harmônico (42.1 a 42.6).*
- Exercícios sugeridos: 40.2(42.2), 40.6(42.4), 40.8(42.10), 40.11(42.7), 40.15(42.14), 40.19(42.15), 40.26(42.22), 40.27(42.23), 40.38(42.28), 40.43(42.37), 40.47(42.43), 40.52(42.47).

40.2 Um próton está em uma caixa de largura L. Qual deve ser a largura da caixa para que a energia do nível fundamental seja igual a 5,0 MeV, valor típico da energia de ligação de partículas no interior de um núcleo? Compare o resultado com o tamanho de um núcleo, que é da ordem de 10^{-14} m.

40.6 Lembre que $|\psi|^2\,dx$ é a probabilidade de encontrar uma partícula com uma função de onda normalizada $\psi(x)$ no intervalo entre x e $x + dx$. Considere uma partícula no interior de uma caixa com paredes rígidas em $x = 0$ e $x = L$. Suponha que a partícula esteja no nível fundamental e use ψ_n conforme indicado na Equação (40.13). a) Para que valores de x, caso existam, no intervalo de 0 até L a probabilidade de encontrar a partícula é igual a zero? b) Para que valores de x a probabilidade atinge seu valor máximo? c) Suas respostas dos itens (a) e (b) estão de acordo com a Figura 40.8? Explique.

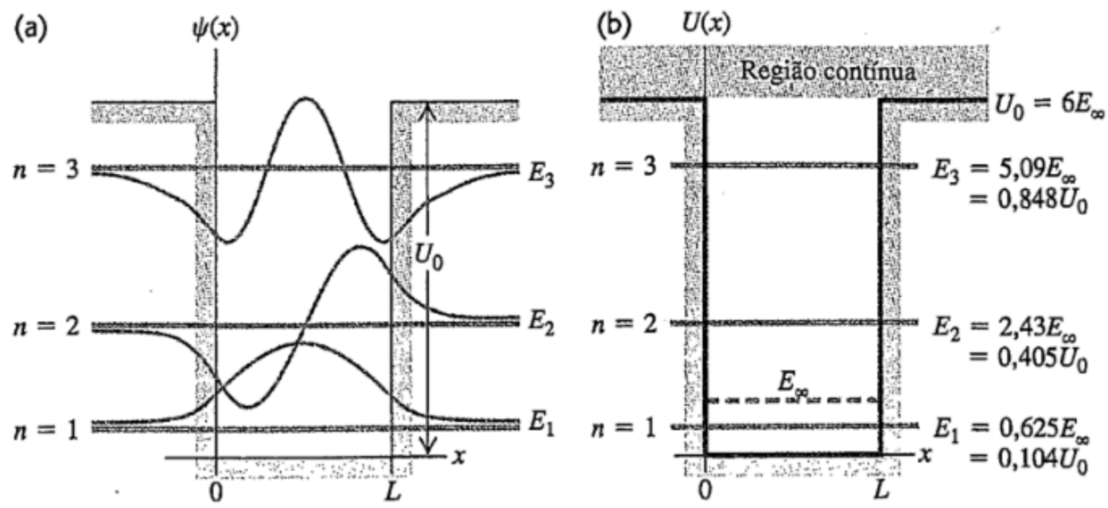

Figura 40.8 (a) Funções de onda para três estados ligados de uma partícula em um poço de potencial finito com profundidade U_0 para o caso $U_0 = 6E_\infty$. As linhas retas horizontais para cada função de onda correspondem a $\psi = 0$. As energias indicadas ao lado das linhas horizontais referem-se a energias dos estados ligados. (b) Diagramas dos níveis de energia para este sistema. As energias são indicadas por múltiplos de E_∞ e por frações de U_0. Todas as energias maiores do que U_0 são possíveis; os estados com $E > U_0$ formam uma região contínua.

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 2, 3\ldots) \tag{40.13}$$

(partícula em uma caixa)

40.8 a) Mostre que $\psi = A\operatorname{sen}kx$ é uma solução para a Equação (40.3) se $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. b) Explique por que essa é uma função de onda aceitável para uma partícula em uma caixa com paredes rígidas em $x = 0$ e $x = L$ apenas se k for um número inteiro múltiplo de π/L.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \tag{40.3}$$

(partícula em uma caixa)

40.11 Um elétron está em uma caixa de largura igual a $3{,}0 \times 10^{-10}$ m. Qual é o comprimento de onda de De Broglie e qual é o módulo do momento linear do elétron quando ele está no a) nível $n = 1$? b) nível $n = 2$? c) nível $n = 3$? Em cada caso, como o comprimento de onda se compara com a largura da caixa?

40.15 Um elétron está confinado em um poço quadrado de profundidade $U_0 = 6E_\infty$. Qual é a largura do poço se o seu estado fundamental de energia é 2,0 eV?

40.19 Um próton está confinado em um poço quadrado de largura de 4,0 fm = $4{,}0 \times 10^{-15}$ m. A profundidade do poço é igual a seis vezes o valor da energia do nível fundamental E_∞ do poço infinito correspondente. Se o próton faz uma transição do nível com energia E_1 para o nível com energia E_3 absorvendo um fóton, qual o comprimento de onda do fóton?

40.26 Decaimento alfa. Em um modelo simples de núcleo radioativo, uma partícula alfa ($m = 6{,}64 \times 10^{-27}$ kg) está presa em uma barreira quadrada com altura igual a 30,0 MeV e largura de 2,0 fm. a) Qual é a probabilidade do tunelamento se a partícula alfa colide com a barreira com uma energia cinética 1,0 MeV abaixo do topo da barreira (Figura 40.25)? b) Qual é a probabilidade do tunelamento se a energia cinética da partícula alfa está a 10,0 MeV abaixo do topo da barreira?

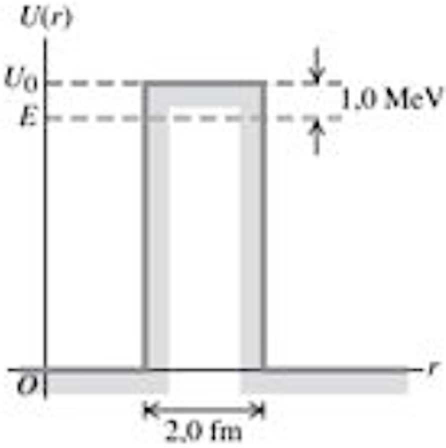

Figura 40.25 Exercício 40.26.

40.27 Um bloco de madeira com massa igual a 0,250 kg oscila na extremidade de uma mola cuja constante é igual a 110 N/m. Calcule a energia do nível fundamental e a diferença de energia entre dois níveis adjacentes. Expresse sua resposta em joules e em elétrons-volt. Os efeitos quânticos são importantes?

40.38 Uma partícula está no nível fundamental em uma caixa que se estende desde $x = 0$ até $x = L$. a) Qual é a probabilidade de se encontrar a partícula na região entre 0 e $L/4$? Calcule esse valor integrando $|\psi(x)|^2 dx$, onde ψ é normalizada, desde $x = 0$ até $x = L/4$. b) Qual é a probabilidade de se encontrar a partícula na região entre $x = L/4$ e $x = L/2$? c) Como se comparam os resultados dos itens (a) e (b)? Explique. d) Some as probabilidades calculadas nos itens (a) e (b). e) Os resultados encontrados nos itens (a), (b) e (d) estão de acordo com a Figura 40.5b? Explique.

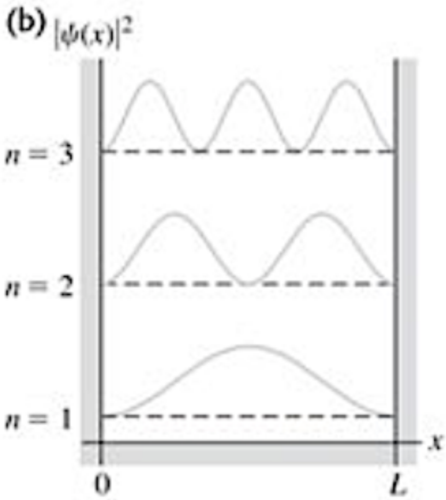

Figura 40.5 Gráficos de (a) $\psi(x)$ e (b) $|\psi(x)|^2$ para as três primeiras funções de onda ($n = 1, 2, 3$) para a partícula em uma caixa. A linha horizontal tracejada representa a função $\psi(x) = 0$ e $|\psi(x)|^2 = 0$ para cada um dos três níveis. O valor de $|\psi(x)|^2dx$ em cada ponto é proporcional à probabilidade de encontrar a partícula em um intervalo dx pequeno em torno do ponto.

40.43 Um estudante universitário propôs a seguinte expressão para a função de onda de uma partícula livre de massa m (uma partícula para a qual a função energia potencial $U(x)$ é igual a zero):

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{+\kappa x}, & x < 0 \\ e^{-\kappa x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

onde κ é uma constante positiva. a) Faça um gráfico da função de onda proposta. b) Mostre que a função de onda proposta satisfaz a equação de Schrödinger para $x < 0$ se a energia for dada por $E = -\hbar^2\kappa^2/2m$, ou seja, quando a energia da partícula for *negativa*. c) Mostre que a função de onda proposta também satisfaz a equação de Schrödinger para $x \geq 0$ com a mesma energia do item (b). d) Explique por que, embora ela preencha essas condições, ela *não* é uma solução aceitável para a equação de Schrödinger de uma partícula livre. (*Sugestão*: qual é o comportamento da função no ponto $x = 0$?) Sabemos que é impossível uma partícula livre (aquela cuja energia potencial $U(x) = 0$) possuir energia negativa.

40.47 Uma partícula de massa m e energia total E tunela através de uma barreira de potencial quadrado com altura U_0 e largura L. Quando o coeficiente de transmissão não é muito menor do que 1, ele é dado por

$$T = \left[1 + \frac{(U_0 \operatorname{senh} \kappa L)^2}{4E(U_0 - E)}\right]^{-1}$$

onde o seno hiperbólico de κL é definido pela relação senh $L = (e^{\kappa L} - e^{-\kappa L})/2$. a) Mostre que, quando $\kappa L >> 1$, a expressão de T tende ao resultado indicado Equação (40.21). b) Explique por que a restrição do item (a), $\kappa L >> 1$, implica ou que a barreira é relativamente larga ou que a energia E é relativamente pequena em comparação com U_0. c) Mostre que a energia cinética incidente E da partícula tende a se igualar à altura da barreira U_0 quando T tende a $[1 + (kL/2)^2]^{-1}$, onde $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ é o número de onda da partícula incidente. (*Sugestão*: quando $|z| << 1$, senh $z \approx z$.)

$$T = Ge^{-2\kappa L} \quad \text{onde} \quad G = 16\frac{E}{U_0}\left(1 - \frac{E}{U_0}\right) \quad \text{e} \qquad (40.21)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

(probabilidade de tunelamento)

40.52 a) Mostre por substituição direta na equação de Schrödinger para o oscilador harmônico em uma dimensão que a função de onda $\psi_1(x) = A_1 x e^{-\alpha^2 x^2/2}$, onde $\alpha^2 = m\omega/\hbar$, é uma solução com energia correspondente ao nível $n = 1$ na Equação (40.22). b) Encontre a constante de normalização A_1. (c) Mostre que a densidade de probabilidade apresenta um mínimo em $x = 0$ e um máximo em $x = \pm 1/\alpha$, correspondentes aos pontos clássicos de inversão para o estado fundamental $n = 0$.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}k'x^2\psi = E\psi \qquad (40.22)$$

(equação de Schrödinger para o oscilador harmônico)