MAP 2321 - Técnicas em Teoria de Controle

Equações diferenciais lineares[1]
Exponencial de uma matriz

Depto. Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
São Paulo – SP

[1] R. Brockett.

Teorema

Seja $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com coeficientes **contínuos** em $[t_0, t_1]$ e considere a seguinte sequencia de **funções matriciais** $\{M_k\}_{k\geq 0}$ definidas recursivamente por

$$M_k(t) = I + \int_{t_0}^{t} A(s)M_{k-1}(s)ds \quad \text{com} \quad M_0 = I.$$

Então

- $\{M_k\}_{k\geq 0}$ **converge** uniformemente.
- Se $\Phi = \lim_{k\to\infty} M_k$, então $\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$ com $\Phi(t_0, t_0) = I$.
- Em **particular**, $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ é solução de
$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad \text{em } [t_0, t_1] \tag{1}$$
com valor inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

⋆ Na prova do teorema usamos o **M-teste** de Weierstrass. Link

⋆ A função matricial $\Phi(t, t_0)$ é chamada **matriz de transição** do sistema (1).

⋆ $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma **aproximação** sucessiva para $\Phi(t, t_0)$.

Pelo M-teste de Weierstrass obtemos que a sequencia $\{M_k\}_k$ converge uniformemente para um **limite** Φ dado por[2]

$$\begin{aligned}\Phi(t,t_0) &= I + \int_{t_0}^{t} A(s_1)ds_1 + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\int_{t_0}^{s_1} A(s_2)ds_2 ds_1 + \ldots \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\int_{t_0}^{s_1} A(s_2)\ldots\int_{t_0}^{s_{k-1}} A(s_k)ds_k\ldots ds_2 ds_1 + \ldots\end{aligned}$$

Corolário[a]

[a] A exponencial da matriz A é a matriz de transição do sistema (1).

Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é constante temos que

$$\begin{aligned}\Phi(t,t_0) &= I + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{A^k(t-t_0)^k}{k!} + \ldots \\ &= e^{A(t-t_0)}.\end{aligned}$$

[2] Esta série é chamada de *Peano-Baker*.

Modelo de Malthus

Suponha que a **densidade populacional** x de uma espécie varie **proporcionalmente** à sua densidade atual sem interferências e com recurso ilimitado. Isto é

$$\dot{x}(t) = k\,x(t).^{a}$$

[a] É a versão unidimensional de (1) com $A(t) \equiv k$ constante.

Aqui podemos usar **separação de variáveis** para obter

$$\frac{dx}{dt} = k\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = k\,dt.$$

Integrando ambos os lados da equação[3] temos que

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^{t} k\,ds \quad \Rightarrow \quad \ln|x(t)| - \ln|x(t_0)| = k\,(t - t_0)$$

Portanto, se k é constante e x é **não** negativo, encontramos

$$\ln x(t) - \ln x(t_0) = k\,(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{k(t-t_0)}x_0$$

onde x_0 é a **densidade inicial** $x(t_0) = x_0$.

[3] Cuidado com o abuso de notação **:-|**

Um exemplo não autônomo

Suponha agora que k varie com o tempo. Considere

$$\dot{x}(t) = t\,x(t).^{a}$$

[a] É a versão unidimensional de (1) com $A(t) = t$.

Usamos **separação de variáveis** outra vez

$$\frac{dx}{dt} = t\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = t\,dt.$$

Integrando ambos os lados da equação

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^{t} s\,ds \quad \Rightarrow \quad \ln|x(t)| - \ln|x(t_0)| = \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}$$

Portanto, se k é constante e x é **não** negativo, encontramos

$$\ln x(t) - \ln x(t_0) = \frac{(t-t_0)(t+t_0)}{2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{\frac{(t-t_0)(t+t_0)}{2}} x_0$$

onde x_0 é a **densidade inicial** $x(t_0) = x_0$.

- Veja que $\frac{(t-t_0)(t+t_0)}{2} = \int_{t_0}^{t} s\,ds$.

Os resultados abaixo nos **auxiliam** no cálculo das matrizes de transição[4] $e^{A(t-t_0)}$.

Teorema

Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{então} \quad e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Se $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é qualquer matriz invertível, então

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P. \qquad (\star)$$

- Note que a afirmação $(\star)$ nos permite usar **mudanças** de bases para calcular a exponencial de uma matriz. Em particular podemos usar a **forma canônica de Jordan** Link.

[4] Aquelas associadas a sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes!

Prova. A primeira afirmação segue do fato

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Já a segunda é obtida da seguinte maneira

$$\begin{aligned} e^{P^{-1}AP} &= I + P^{-1}AP + \frac{1}{2!}(P^{-1}AP)^2 + ... + \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k + ... \\ &= I + P^{-1}AP + \frac{1}{2!}P^{-1}APP^{-1}AP + ... + \frac{1}{k!}P^{-1}APP^{-1}AP...P^{-1}AP + ... \\ &= I + P^{-1}AP + \frac{1}{2!}P^{-1}A^2P + ... + \frac{1}{k!}P^{-1}A^kP + ... \\ &= P^{-1}\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^k}{k!} + ...\right)P \\ &= P^{-1}e^AP. \end{aligned}$$

$\square$

Molas em paralelo

A equação do **sistema mecânico** ao lado é

$$m\ddot{x} + k_e x = F$$

onde m é a **massa** do corpo, F uma força externa e k_e a **constante elástica** dada por $k_e = k_1 + k_2$.

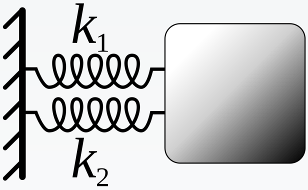


Figura: Duas molas em paralelo.

Definindo as variáveis de **estado** $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = \dot{x}(t)$ obtemos

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) = x_2(t) \quad \text{e} \quad \dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = \frac{1}{m}(F - k_e x_1)$$

que nos dá

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_e/m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} F$$

Seja $b = k_e/m > 0$. Então temos que a matriz de transição do sistema é

$$\Phi(t,t_0) = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}(t-t_0)} = I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}(t-t_0) + \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}\frac{(t-t_0)^2}{2!}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b^2 & 0 \end{pmatrix}\frac{(t-t_0)^3}{3!} + \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}\frac{(t-t_0)^4}{4!} + \begin{pmatrix} 0 & b^2 \\ -b^3 & 0 \end{pmatrix}\frac{(t-t_0)^5}{5!}$$
$$+ \begin{pmatrix} -b^3 & 0 \\ 0 & -b^3 \end{pmatrix}\frac{(t-t_0)^6}{6!} + \begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ -b^4 & 0 \end{pmatrix}\frac{(t-t_0)^7}{7!} + \ldots$$

Daí

$$\Phi(t,t_0) =$$
$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{b}^2}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{\sqrt{b}^4}{4!}(t-t_0)^4 - \frac{\sqrt{b}^6}{6!}(t-t_0)^6 + \ldots & \frac{1}{\sqrt{b}}\left[\sqrt{b}(t-t_0) - \frac{\sqrt{b}^3}{3!}(t-t_0)^3 + \frac{\sqrt{b}^5}{5!}(t-t_0)^5 - \ldots\right] \\ -\sqrt{b}\left[\sqrt{b}(t-t_0) - \frac{\sqrt{b}^3}{3!}(t-t_0)^3 + \frac{\sqrt{b}^5}{5!}(t-t_0)^5 - \ldots\right] & 1 - \frac{\sqrt{b}^2}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{\sqrt{b}^4}{4!}(t-t_0)^4 - \frac{\sqrt{b}^6}{6!}(t-t_0)^6 + \ldots \end{pmatrix}$$

ie.

$$\Phi(t,t_0) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k_e/m}(t-t_0)) & \frac{1}{\sqrt{k_e/m}}\sin(\sqrt{k_e/m}(t-t_0)) \\ -\sqrt{k_e/m}\sin(\sqrt{k_e/m}(t-t_0)) & \cos(\sqrt{k_e/m}(t-t_0)) \end{pmatrix}.$$

Exemplo

Também podemos usar a **forma canônica** de Jordan para calcular Φ.

Veja que polinômio característico de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

é $p(\lambda) = \lambda^2 + b$ cujas **raízes** complexas são

$$\pm i\sqrt{b}.$$

Então

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{b}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{b} \\ -\sqrt{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e assim, pelo teorema anterior temos

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}(t-t_0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{b}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{b} \\ -\sqrt{b} & 0 \end{pmatrix}(t-t_0)} \begin{pmatrix} \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que[5]

$$e^{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}} = e^{\alpha} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\Phi(t,t_0) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{b}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{b} \\ -\sqrt{b} & 0 \end{pmatrix}(t-t_0)} \begin{pmatrix} \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{b}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\sqrt{b}(t-t_0) & \sin\sqrt{b}(t-t_0) \\ -\sin\sqrt{b}(t-t_0) & \cos\sqrt{b}(t-t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k_e/m}(t-t_0)) & \frac{1}{\sqrt{k_e/m}} \sin(\sqrt{k_e/m}(t-t_0)) \\ -\sqrt{k_e/m}\sin(\sqrt{k_e/m}(t-t_0)) & \cos(\sqrt{k_e/m}(t-t_0)) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

[5] Veja exercício (5).

A matriz de transição Φ

A seguir discutiremos algumas **propriedades** da matriz de transição Φ. Para tanto recordamos que o **traço** de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a soma dos elementos de sua diagonal

$$\mathrm{tr}A = \sum_{k=1}^{n} A_{kk}.$$

Teorema de Abel-Jacobi-Liouville

Seja Φ a matriz de transição de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Então

$$\det \Phi(t, t_0) = exp\left[\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\, A(s)\, ds\right].$$

- ⋆ Note que o teorema acima nos garante que Φ é **não singular**[6] para todo t real em seu domínio de definição já que a função exponencial é uma função positiva exceto no **infinito**.
- ⋆ Lembre-se que $|\det A|$ pode ser interpretado como o **volume** do paralelepípedo gerado pelas colunas de A. Esta fórmula avalia como o volume do sólido definido por Φ **evolui** com o tempo.

[6] Dizemos que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é não singular se $\det A \neq 0$. Logo, A é **invertível**, ie. existe $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Proof. Recordamos que se C_{ij} é o cofator[7] do elemento Φ_{ij} então para qualquer j

$$\det \Phi = \sum_{i=1}^{n} C_{ij}\Phi_{ij}.$$

Como Φ_{ij} não aparece na expressão do cofator temos que

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}} \det \Phi = C_{ij}.$$

Pela regra da cadeia que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\det \Phi(t,t_0) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}}\det \Phi(t,t_0)\right]\frac{d}{dt}\Phi_{ij}(t,t_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\frac{d}{dt}\Phi_{ij}(t,t_0) = \mathrm{tr}(C'(t,t_0)\dot{\Phi}(t,t_0)) \end{aligned}$$

onde $C'(t,t_0)$ é a transposta da matriz de cofatores de $\Phi(t,t_0)$.

[7] $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ onde M_{ij} é o determinante da **matriz menor** obtida através da exclusão da i-ésima linha e j-ésima coluna de Φ. Link

Como $\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\det\Phi(t,t_0) = \operatorname{tr}(C'(t,t_0)A(t)\Phi(t,t_0)) = \operatorname{tr}(\Phi(t,t_0)C'(t,t_0)A(t))$$

já que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Além disso, **sabemos** que[8] se C é a matriz de **cofatores** de uma matriz A, então

$$C'A = AC' = \det(A)I.$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\det\Phi(t,t_0) &= \operatorname{tr}(\Phi(t,t_0)C'(t,t_0)A(t)) = \operatorname{tr}(\det(\Phi(t,t_0))A(t)) \\ &= \det\Phi(t,t_0)\operatorname{tr}(A(t)). \end{aligned}$$

Por separação de variáveis temos

$$\frac{d\det\Phi}{\det\Phi} = \operatorname{tr}(A(t))\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\det\Phi(t_0,t_0)}^{\det\Phi(t,t_0)} \frac{d\det\Phi}{\det\Phi} = \int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}(A(t))\,ds \quad \Rightarrow$$

$$\ln|\det\Phi(t,t_0)| - \ln|\det I| = \int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}(A(s))\,ds \quad \Rightarrow \quad \det\Phi(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}(A(s))\,ds}.$$

□

[8] Veja seção 2.2.3 de Reginaldo J. Santos. Matrizes, Vetores e Geometria Analítica. (2013). Link

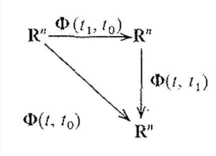
A matriz de transição Φ

Regra de composição

A matriz de transição Φ satisfaz

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0)$$

sempre que $t \geq t_1 \geq t_0$.



Prova. Use a **unicidade** de solução para obter tal relação. □

Considere um sistema de controle **não linear**

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t, u) \tag{2}$$

e $\Phi(t, x_0, t_0)$ solução para certas condições iniciais x_0 e controles u. **Suponha** Φ e f regulares de maneira que seja possível **expandir** f pela fórmula de **Taylor** sobre a solução $\Phi(t, x_0, t_0)$ com condição inicial x_0 para alguma escolha de $u_0(t)$. Então

$$\begin{aligned} f(\Phi(t, x_0, t_0) + \Delta x(t), t, u_0(t) + \Delta u(t)) &= f(\Phi(t, x_0, t_0), t, u_0(t)) \\ &+ A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t) + \texttt{termos de ordem maior} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(t, x_0, t_0), t, u_0(t)) \\ B(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}(\Phi(t, x_0, t_0), t, u_0(t)) \end{aligned}.$$

Equação linearizada

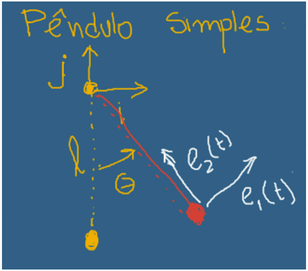
Chamamos $\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)v(t)$ a equação linearizada de (2) sobre Φ.

Pêndulo Simples

O pêndulo simples possui a seguinte equação **não-linear**

$$l\ddot{\theta} + g \sin\theta = u \tag{3}$$

onde l é o comprimento da haste, g a aceleração da gravidade, u o controle e θ o **ângulo** com o eixo vertical **j**.



- Veja sua dedução deste modelo no seguinte link Link. Veja também Link.

Determina-se a equação de **estado** não-linear tomando $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -(g \sin x_1)/l + u/l \end{pmatrix}.$$

Assim, a equação **linearizada** sobre a solução trivial $x_1(t) = x_2(t) = 0$ e $u = 0$ é

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/l \end{pmatrix} v \tag{4}$$

já que

$$\nabla_{x_1 x_2} f_1(0,0,0) = (0,1), \quad \partial_u f_1(0,0,0) = 0,$$
$$\nabla_{x_1 x_2} f_2(0,0,0) = (g/l, 0) \quad \text{e} \quad \partial_u f_2(0,0,0) = 1/l.$$

1.

a) Sejam A e $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que se $AB = BA$, então

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

É a **reciproca** verdadeira?

b) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertível. Mostre que

$$e^{(-A)} = \left(e^A\right)^{-1}.$$

c) Prove que

$$e^{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}} = e^{\alpha} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}. \tag{5}$$

1.

d) Dizemos que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é **nilpotente** se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$. Veja que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são matrizes nilpotentes. Em seguida **calcule** sua exponencial.

e) Calcule $e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}$.

f) Encontre a matriz de **transição** $\Phi(t, t_0)$ do sistema abaixo

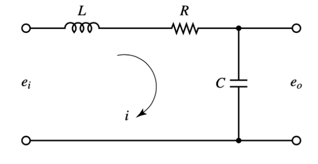
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Analise $\lim_{t\to+\infty} \Phi(t, t_0)$ com relação aos valores de a, b e c.

2. Circuito LCR

O circuito abaixo consiste de uma indutância, uma resistência e um capacitor.[a]

[a] Recordarmos que $v_L = L\frac{di}{dt}$, $v_R = Ri$ e $v_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$.



a) Use a lei da tensão de **Kirchhoff** para deduzir a seguinte equação para o sistema

$$\ddot{e}_0 + \frac{R}{L}\dot{e}_0 + \frac{1}{LC}e_0 = \frac{1}{LC}e_i.$$

b) Assuma que e_i é a tensão de entrada e e_0 a de saída. Determine o sistema de controle do circuito.

c) Calcule[9] a matriz de **transição** deste sistema assumindo L, C e R positivas .

[9] *Sugestão:* Use a forma canônica de Jordan.

3. Um sistema não-autônomo

Determine a matriz de transição $\Phi(t,0)$ para o sistema não-autônomo

$$\dot{x}(t) = f(t)A\,x(t)$$

para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ constante e f contínua.

4. Seja $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ constante e considere o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$.

Suponha que se

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ então } e^{At}x(0) = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -3e^{-3t} \end{pmatrix}$$

e se

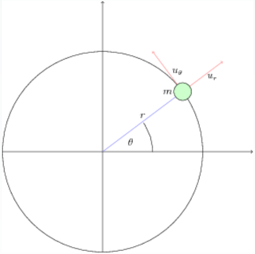
$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ então } e^{At}x(0) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}.$$

Encontre a matriz de transição Φ bem como a matriz A.

5. Um satélite simples

Uma **partícula** de massa unitária está sob ação de um campo de aceleração **central** newtoniano. Além disso temos dois controles independentes, um na direção **radial** e outro na direção **tangencial** $u_r e_r$ e $u_\theta e_\theta$ respectivamente.[a]

[a] $e_r, e_\theta \subset \mathbb{R}^2$ formam um referencial móvel unitário.



a) Use a **Lei** de Newton para justificar a equação abaixo como um modelo para a dinâmica do **problema** acima descrito.

$$\ddot{\mathbf{r}} = (-k/r^2 + u_r)e_r + u_\theta e_\theta$$

b) Use coordenadas **polares** para re-escrever o modelo na maneira a seguir

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - k/r^2 + u_r \\ r\ddot{\theta} &= -2\dot{r}\dot{\theta} + u_\theta \end{aligned} \tag{6}$$

c) Suponha $u_r = u_\theta = 0$. **Determine** os valores de k para os quais as órbitas **circulares** $r(t) = \sigma$ e $\theta(t) = \omega t$ sejam soluções do sistema (6).

d) Defina as seguintes variáveis de estado

$$x_1 = r - \sigma, \quad x_2 = \dot{r}, \quad x_3 = \sigma(\theta - \omega t) \quad \text{e} \quad x_4 = \sigma(\dot{\theta} - \omega).$$

Verifique que a equação linearizada do sistema (6) sobre as órbitas circulares é

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

se tomamos $\sigma = 1$.

e) Calcule

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}(t-t_0)}.$$

Note que esta é a matriz de **transição** do sistema linear obtido pela linearização do modelo **satélite simples** com controle nulo e sobre órbitas circulares.