Gabarito do 5º Práticas de demonstrações

Enunciados a demonstrar

1) Se os coeficientes A e C da equação do segundo grau $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (1) têm o mesmo sinal, então a equação representa: uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados OU um ponto OU o conjunto vazio

Demonstração:

Dividindo a equação (1) por AC, obtemos:

$x^2/C + y^2/A + Dx/AC + Ey/AC + F/AC = 0$,

ou seja,

$(x^2 + Dx/A)/C + (y^2 + Ey/C)/A = -F/AC$

Completando os quadrados, temos:

$(x^2 + Dx/A + D^2/4A^2)/C + (y^2 + Ey/C + E^2/4C^2)/A = -F/AC + D^2/4A^2C + E^2/4AC^2$

Isto é,

$((x + D/2A)^2)/C + ((y^2 + E/2C)^2)/A = (C^2D^2 + ACE^2 – 4AFC^2)/4A^2C^3 = M/4A^2C^3$ (2)

onde $M = C^2D^2 + ACE^2 – 4AFC^2$.

Se $M = 0$, a equação (2) representa o ponto $(-D/2A, -E/2C)$, pois A e C têm o mesmo sinal.

Se $M \neq 0$, podemos escrever a equação (2) na forma:

$(x + D/2A)^2/(M/4A^2C^2) + (Y^2 + E/2C)^2/(M/4ACC^2) = 1$ (3)

Como $AC > 0$, a equação (3) representa uma elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados e centro no ponto $(-D/2A, -E/2C)$, se $M > 0$.

Se $M < 0$, a equação (3) representa o conjunto vazio, pos $M/(4A^2C^2) < 0$ e $M/(4ACC^2) < 0$.