O Conjunto de Borel

Sejam $I = [0,1]$ e $\mathbb{Q}$ o conjunto dos racionais. Seja $A = I \cap \mathbb{Q}$. Enumeramos os racionais de A por r_n. Definimos $I_n = (r_n - \frac{1}{2^{n+2}}, r_n + \frac{1}{2^{n+2}})$ e $B = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$. Logo $\mu(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$
Seja $C = B^c$. Logo

1. $\mu(C) \geq \frac{1}{2}$. Logo ele é não enumerável.
2. C é fechado (porque o complementar é aberto).
3. C não contém nenhum intervalo aberto porque todo intervalo contém racionais. Ou seja ele é um conjunto nunca denso (ou magro, ou raro).
4. Isto é um exemplo de um fechado de medida positiva que não contém aberto algum.
5. Observe que com uma construção similar pode obter outro conjunto com medida 1-ε, para $0 < \varepsilon < 1$.

O Conjunto de Cantor

1. O Conjunto de Cantor ou Conjunto Ternário de Cantor C em [0,1] é construído da seguinte forma:
   1. retiramos do [0,1] o terço do meio aberto, isto é, o intervalo aberto (1/3, 2/3). Ficamos assim com $T_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
   2. retiramos dos dois intervalos de T_1 os terços do meio abertos (1/9,2/9) e (7/9,8/9). Ficamos assim com $T_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.
   E assim sucessivamente.

2. Seja $(T_n)_{n \geq 0}$ definida indutivamente por $T_0 = [0,1]$ e, para $n \geq 1$, T_n o conjunto obtido na n-ésima etapa da construção do Conjunto de Cantor C, i.e. T_n é a reunião dos intervalos fechados que sobram após a remoção dos terços médios dos intervalos de T_{n-1}. Os T_n formam uma sequência decrescente de conjuntos, e definimos $C = \cap_1^{+\infty} T_n$.

3. Seja C o conjunto ternário de Cantor. Mostre que:
   (a) $m(C) = 0$;
   (b) C é compacto;
   (c) C é não-vazio;
   (d) C é nunca denso (i.e. seu fecho tem interior vazio);
   (e) C é totalmente desconexo (i.e. os únicos subconjuntos conexos de C são pontos);
   (f) C não tem pontos isolados.

(g) Mostre que, $\forall n \in \mathbb{N}$, T_n é o conjunto dos pontos cuja representação normalizada na base 3 (ver embaixo) é da forma $0.x_1 \cdots x_n \cdots$ com $x_i \in \{0,2\}$ para $1 \leq i \leq n$. Ou seja, C é o subconjunto de [0,1] em cujo desenvolvimento na base 3 não aparece o dígito 1.

Representação Normalizada Quando representamos números numa base dada 10, 2, 16, etc, há alguns que admitem duas representações. POr exemplo 1 em base 10 pode ser dado por 1,0 ou por 0,999.... A Representação Normalizada visa escolher para cada um destes números uma única representação.

(a) Todo $x \in [0,1]$ admite uma representação na base 3 da forma $0.x_1x_2\cdots$, i.e. existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \{0,1,2\}$ tal que $x = \sum_1^\infty x_n 3^{-n}$. Tal representação diz-se *finita* ou *eventualmente nula* se existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ para todo $n > N$; caso contrário, diz-se que a representação é *infinita*.
Observe que para alguns números a representação pode não ser única, por exemplo com o número 1/3 que pode ser representado como 0,02222... e também como 0,1. Para evitar ambigüidades no que se segue, devemos escolher uma única representação para cada número. Ela denomina-se de Representação Normalizada. Tem-se:

   i. $x \in [0,1]$ admite uma representação finita $x = 0.x_1x_2\cdots$ na base 3 $\iff \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, k \in \{0,\ldots,3^n-1\}$ tais que $x = k3^{-n}$.

   ii. todo $x \in]0,1]$ admite única representação infinita na base 3 $x = 0.x_1x_2\cdots$.

(b) Com a notação da questão anterior, associemos a cada $x \in [0,1]$ uma representação na base 3, $x = 0.x_1x_2\cdots$, da seguinte forma:

   i. se x não admitir representação finita, associemos a x a única representação possível;

   ii. se x admitir representação finita $0.x_1\cdots x_N 0\cdots$, com $x_N \neq 0$ e $x_n = 0$ para $n > N$: se $x_N = 2$, associemos a x a referida representação; se x_N for 1, associemos a x a representação infinita, i.e. $0.x_1\cdots x_{N-1}0222\cdots$.

Chamemos tais representações de *normalizadas*.

Função de Cantor

(a) Pelo item anterior, fica bem definida a aplicação $f : C \to [0,1]$ tal que, se a representação normalizada de x na base 3 for $0.x_1x_2\cdots$, então $f(x) \in [0,1]$ tem representação na base 2 dada por $0.y_1y_2\cdots$, onde $(\forall n \in \mathbb{N})\, y_n = x_n/2$. Então f é sobrejetora; portanto, $Card(C) = c$. Além disso, f é não decrescente porque, dados $x, y \in [0,1]$ com $x < y$, então $f(x) = f(y) \iff$ o intervalo (x,y) está incluído num dos intervalos que se removeu em alguma etapa da construção do conjunto de Cantor.

(b) Com a notação do item anterior, defina $\phi : [0,1] \to [0,1]$ por $\phi|_C = f$ e, em cada intervalo (x,y) que se removeu em alguma etapa da construção do conjunto de Cantor, ϕ é constante e igual a $f(x) = f(y)$. ϕ chama-se *função de Cantor-Lebesgue* Mostre que:

   i. ϕ é não decrescente, contínua e sobrejetora.

   ii. ϕ tem derivada nula ϕ' em qtp.

   iii. $\phi(b) - \phi(a) \neq \int_a^b \phi' d\mu$ a e b não estiverem no mesmo intervalo de U.

iv. Mostre que a função $f : C :\to [0,1]$ definida acima, onde C é o Conjunto de Cantor, é um exemplo de função contínua, não decrescente, sobrejetora de um conjunto com medida de Lebesgue zero cuja imagem é [0,1] (conjunto de medida positiva).

Exercício:

Desenvolvendo $x \in [0,1]$ na base 5, construa o conjunto dos x que não têm o dígito 4 no seu desenvolvimento, e calcule sua medida.

Calcule f(1/3), f(1/9), f(2/3), f(0,02020202020..).