MAT 0234 - Medida e Integração

IME-USP. Segundo semestre de 2020

Aula 5: conceito e propriedades de Medida (continuação)
Propriedades da medida:

1. Se $A \subset B$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$
   Porque $B = A \cup (B - A)$ onde A, B-A são conjuntos disjuntos. Logo $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$

2. Se $A \subset B$ então $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$
   Segue da igualdade $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$.

3. μ é finitamente aditiva, ou seja, se $\{A_j\}_1^n \subset \mathcal{A}$, disjuntos 2 a 2, temos $\mu(\cup_{j=1}^n) = \sum_1^n \mu(A_j)$. Com efeito, basta considerar a sequência $\{A_j\} \subset \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, com $A_{n+k} = \emptyset \; \forall \; k \in \mathbb{N}$ e usar a σ-aditividade.

4. Se $\{A_j\}_1^{+\infty}$ sequência não decrescente de conjuntos então $\mu(\cup_1^{+\infty} A_j) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_j)$.
   Dem: temos que usar a σ-aditividade. Formaremos uma sequência de conjuntos disjuntos cuja união é $\cup_1^{+\infty} A_j$.
   Seja $B_1 = A_1$ e $B_{j+1} = A_{j+1} - A_j$. Logo $\cup_1^{+\infty} A_j = \cup_1^{+\infty} B_j$.
   Os B_j são disjuntos 2 a 2 e portanto $\mu(\cup_1^n A_j) = \mu(\cup_1^n B_j) = \sum_1^n \mu(B_j)$. Como $\{A_j\}_1^{+\infty}$ sequência não decrescente, $\mu(B_{j+1}) = \mu(A_{j+1}) - \mu(A_j)$.
   Assim $\sum_1^n \mu(B_j) = \sum_2^n \mu(A_j - \mu(A_{j-1}) + \mu(A_1) = \mu(A_n)$.
   Logo $\mu(\cup_1^{+\infty} A_j) = \mu(\cup_1^{+\infty} B_j) = \lim_{n\to +\infty} \mu(A_n)$.$\square$

5. Se $\{E_j\}_1^{+\infty}$ sequência não crescente de conjuntos e $\mu(E_1) \neq +\infty$ então $\mu(\cap_1^{+\infty} E_j) = \lim_{n \to +\infty} \mu(E_j)$.
   Dem: em primeiro lugar, usaremos a propriedade anterior. Formaremos uma sequência não decrescente de conjuntos. Eles são $F_j = E_1 - E_j$; . Então $\mu(F_j) = \mu(E_1) - \mu(E_j)$ (A).
   Também $\cup_1^{+\infty} F_j = E_1 - \cap_1^{+\infty} E_j$ e portanto, $\mu(\cup_1^{+\infty} F_j) = \mu(E_1) - \mu(\cap_1^{+\infty} E_j) = \mu(E_1) - \mu(\cap_1^{+\infty} E_j)$ (B).
   De A e B segue que $\mu(E_1) - \mu(\cap_1^{+\infty} E_j) = \mu(\cup_1^{+\infty} F_j) = \lim \mu(F_j) = \mu(E_1) - \lim \mu(E_j)$.
   E como $\mu(E_1) \neq +\infty$ segue que $\mu(\cap_1^{+\infty} E_j) = \lim \mu(E_j)$.$\square$
   Observação: basta ter algum j com $\mu(E_j) \neq +\infty$.

Definição: seja $\mu : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ uma medida. Dizemos que uma Propriedade P(x), para $x \in X$, verifica-se em **quase todo ponto (qtp)** se P(x) for verdadeira exceto num conjunto de medida zero. Ou seja $\mu(\{x \in X;\ P(x)\ \ falsa\}) = 0$.
Exemplos: P(x)= "f(x)>0"; P(x)= "f(x)=g(x)", etc.
Exercícios:

1. Seja $\mu : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to [0, +\infty]$ a medida de Lebesgue. Mostre que $\mu(r) = 0$ se $r \in \mathbb{R}$.

2. Se μ como acima, mostre que $\mu(\cup_1^{+\infty} \{a_n\}) = 0$ se $a_n \in \mathbb{R}$.

3. segue do exercício anterior que $\mu(\mathbb{Q}) = 0$. Ou seja, temos um denso de medida zero.

4. Seja $\mu : ([0, 1], \mathcal{B}) \to [0, +\infty]$ a medida de Lebesgue. Mostre que a medida do conjunto dos Irracionais em [0,1] é 1. Ou seja que um conjunto pode ter medida total e não conter aberto algum.

5. Se $\mu(E_1) = +\infty$, o resultado do Ex. 5 pode ser falso .
   Com efeito, seja $E_j = [j, +\infty)$. Então $\cap_1^{+\infty} E_j = \emptyset$ mas $\mu(E_j) = +\infty \; \forall \; j \in \mathbb{N}$.

Definição: se $(X, \mathcal{A})$ for um espaço mensurável e μ for uma medida nesse espaço, a tripla $(X, \mathcal{A}, \mu)$ chama-se um **espaço de medida**.