Aula 4 - Convergência em probabilidade

Vanderlei da Costa Bueno

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo, SP. Brasil

Setembro de 2020

Convergência em probabilidade

1.Definição.
Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória definidas em um mesmo espaço de probabilidade.

Considere a sequência de números $(P(|X_n - X| > \varepsilon))_{n\geq 1}$.

Se $\lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$, dizemos que X_n **converge em probabilidade** para X e denotamos por $X_n \to^P X$.

Observação 1.
Observe que convergência em probabilidade não é concernente à convergência pontual de $X_n(\omega)$ para $X(\omega)$. A interpretação é que, para valores grandes de n, as variáveis aleatórias X_n e X são aproximadamente iguais com probabilidade 1.

Observação 2
O limite em probabilidade é único: Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X, Y variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade, tais que $X_n \to^P X$ e $X_n \to^P Y$.

Convergência em probabilidade

Observe que

$$|X - Y| = |X - X_n + X_n - Y| \leq |X_n - X| + ||X_n - Y|$$

e, portanto,

$$\{|X - Y| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|X_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Temos que

$$P(|X - Y| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - X| > \frac{\varepsilon}{2})$$

Convergência em probabilidade

Então, $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X - Y| > \varepsilon) = \lim_{n \uparrow \infty} P(|X - Y| > \varepsilon) \leq$$

$$\lim_{n \uparrow \infty} P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + \lim_{n \uparrow \infty} P(|X_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}) = 0.$$

Portanto $\forall \varepsilon > 0$ temos $P(|X - Y| > \varepsilon) = 0$ e $P(X = Y) = 1$.

Exemplo 1.
Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas (i.i.d) com Distribuição Exponencial Padrão.

Defina as variáveis aleatórias $Y_n = \frac{X_n}{\ln n}$ de maneira que

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(|\frac{X_n}{\ln n}| > \varepsilon) = P(X_n > (\ln n)^{\varepsilon}) = e^{-(\ln n)^{\varepsilon}} = \frac{1}{n^{\varepsilon}}.$$

Portanto $\lim_{n\uparrow\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$ e $Y_n \to^{P} 0$.

Contudo
$\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon}} = \infty$ se $\varepsilon \leq 1$.

Como o Y_n são independentes, concluímos que pelo Lema de Borel Cantelli que

$$P(\limsup\{|Y_n| > \varepsilon\}) = 1$$

$$\text{e } Y_n \to^{P} 0 \text{ mas } Y_n \nrightarrow^{qc} 0.$$

Teorema 1.
Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória tal que $X_n \to^{qc} X$. Então $X_n \to^{P} X$.

Prova
Se $X_n \to^{qc} X$, então

$$P(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \{\omega \ \mid \ |X_k(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \ \ \forall m \geq 1 \leftrightarrow$$

$$P(\lim_{n\uparrow\infty} \bigcup_{k\geq n} \{\omega \ \mid \ |X_k(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \ \ \forall m \geq 1 \leftrightarrow$$

$$\lim_{n\uparrow\infty} P(\bigcup_{k\geq n} \{\omega \ \mid \ |X_k(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \ \ \forall m \geq 1.$$

Convergência em probabilidade

Como

$$0 \leq P(|X_n - X| > \frac{1}{m}) \leq P(\bigcup_{k \geq n} \{w \mid |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}), \ \ \forall m \geq 1$$

temos $\lim_{n \uparrow \infty} P(|X_n - X| > \frac{1}{m}) = 0 \ \ \forall m \geq 1$

e, portanto, $X_n \to^{P} X$.

Convergência em probabilidade

No exemplo 1 observamos que a condição suficiente do teorema não vale. Pode-se provar que se $X_n \to^{P} X$, existe uma subsequência de $(X_n)_{n\geq 1}$, digamos $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $X_{n_k} \to^{qc} X$. Para provar tal fato usaremos o seguinte lema:

Lema 1. Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória. Se $P(|X_n - X| \geq \varepsilon_n) \leq \delta_n$ para alguma sequência não negativa $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ com $\lim_{n\uparrow\infty} \varepsilon_n = 0$ e alguma sequência $(\delta_n)_{n\geq 1}$, com $\Sigma_{n=1}^{\infty}\delta_n < \infty$, então, $X_n \to^{qc} X$.

Prova

Nas notas do professor

Convergência em probabilidade

Teorema 2
Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória tal que $X_n \to^P X$. Então existe uma subsequência de $(X_n)_{n\geq 1}$, digamos $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $X_{n_k} \to^{qc} X$.

Prova
Por hipótese $\lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$ Portanto

$$\forall k > 0, \quad \exists n_0(k) \in \mathbb{N} \ \mid \ se \ \ n \geq n_0(k) \to P(|X_n - X| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k},$$

em particular $P(|X_{n_k} - X| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$.

Assim, para provar o teorema tomamos $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, $\delta_k = \frac{1}{2^k}$ e aplicamos o Lema 1.13.

Exemplo 2
Seja $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Seja $Y_n = \min\{X_1, ..., X_n\}$. Então $Y_n \rightarrow^P 0$ pois

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(\min\{X_1, ..., X_n\} > \varepsilon) = P(X_1 > \varepsilon, ..., X_n > \varepsilon) =$$

$$\prod_{i=1}^{n} P(X_i > \varepsilon) = \prod_{i=1}^{n} (1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Operações com limites

P1 - Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias, X uma variável aleatória tal que $X_n \to^P X$ e g uma função real contínua. Então $g(X_n) \to^P g(X)$.

Prova

Para a prova, usaremos o fato provado : Se X é uma variável aleatória, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe k tal que $P(|X| > k) < \varepsilon$. Se g é contínua, então

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0, \quad | \quad se \quad |x - y| < \delta(\varepsilon) \quad \to \quad |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Convergência em probabilidade

Em um intervalo fechado, g é uniformemente contínua e δ não depende de ε. Portanto

$$\{|g(X_n) - g(X)| < \varepsilon\} \supset \{|X_n - X| < \delta\} \cap \{|X| \leq k\}$$

e

$$\{|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \delta\} \cup \{|X| > k\}$$

e

$$P(|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \delta) + P(|X| > k) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

P2 - Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ sequências de variáveis aleatórias, X e Y variáveis aleatórias tais que $X_n \to^P X$ e $Y_n \to^P Y$. Então $X_n \pm Y_n \to^P X \pm Y$.

Prova
Da desigualdade modular (triangular) temos

$$|(X_n \pm Y_n) - (X \pm Y)| = |(X_n - X) \pm (Y_n - Y)| \leq |X_n - X| + |Y_n - Y|$$

de forma que

$$\{|(X_n \pm Y_n) - (X \pm Y)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

e

$$P(|(X_n \pm Y_n) - (X \pm Y)| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}) \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

P3 - Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ sequências de variáveis aleatórias, X e Y variáveis aleatórias tais que $X_n \to^P X$ e $Y_n \to^P Y$. Então $X_n.Y_n \to^P X.Y$.

Prova
A prova terá três partes:

A- Se a e b são constantes tais que $X_n \to^P a$ e $Y_n \to^P b$, então $X_n.Y_n \to^P a.b$, pois

$$\frac{X_n.Y_n = (X_n + Y_n)^2 - (X_n - Y_n)^2}{4} \to^P \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = a.b.$$

B- Se $X_n \to^P X$ e Y é uma variável aleatória, então $X_n.Y \to^P X.Y$.

Relembro o resultado do exercício 1.5 da aula 2: Seja Y uma variável aleatória, então

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k > 0 \ \mid \ P(|Y| > k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto $P(|X_n.Y - X.Y| > \varepsilon) =$

$$P(\{|X_n.Y - X.Y| > \varepsilon\} \cap \{|Y| > k\}) +$$

$$P(\{|X_nY - X.Y| > \varepsilon\} \cap \{|Y| \leq k\}) \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + P(\{|X_n - X|.|Y| > \varepsilon)\} \cap \{|Y| \leq k\} \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para n grande.

C- Como $X_n - X \to^P 0$ $Y_n - Y \to^P 0$, temos pela parte (A) que $(X_n - X).(Y_n - Y) \to^P 0$.

Contudo

$$X_n.Y_n - X.Y_n - X_n.Y + X.Y = (X_n - X).(Y_n - Y) \to^P 0.$$

Como $X.Y_n \to^P X.Y$ e $X_n.Y \to^P X.Y$ temos o resultado que

$$X_n.Y_n \to^P X.Y.$$