08/04/80 Atingibilidade, Controlabilidade e Observabilidade

Imaginemos um sistema dinâmico de ordem n, isto é, n variáveis de estado, definido num intervalo de tempo (T_1, T_2) e que obedece às equações

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$$
$$y(t) = g[x(t), u(t), t] \quad \text{saída}$$

O vetor de controle $u(t)$ é de dimensão m.

Suponhamos que para cada $t \in$ ao intervalo (T_1, T_2) existe um subconjunto U_t de R_m (fechado, limitado e convexo ou todo R_m) e designemos por: Ω a coleção dos U_t, i.é,

$$\Omega = \{ U_t \subset R_m \mid t \in (t_1, t_2) \}$$

U_t é dito vínculo sobre o controle no instante t e Ω de vínculo global sobre o controle.

Definimos agora por U o conjunto de todas as funções (seccionalmente contínuas) $u(t)$ definidas em (T_1, T_2), com valores em R_m e tais que

$$u(t) \in U_t \quad \text{para todo } t \in (T_1, T_2)$$

U é o conjunto de controles admissíveis e satisfaz o vínculo Ω.

Qualquer $u(t) \in U$ é chamado controle admissível

Seja agora $t_0 \in (T_1, T_2)$ e $x_0 \in R_n$. Então para u em U existe e é única uma solução do sistema dinâmico ($\dot{x} = f$)

$$x(\tau) = \varphi(\tau, u_{(t_0,\tau]}, x_0)$$

que satisfaz a condição inicial

$$x(t_0) = x_0$$

$\varphi(\tau, u_{(t_0,\tau)}, x_0)$ é dita função de transição do sistema

a) Conjunto dos Estados Atingíveis.

Consideremos um sistema dinâmico com função de transição $\varphi(t, u_{(t_0,t]}, x_0)$ e com conjunto de controles admissíveis $\bar{U}$.

Def. : O estado x_1 é dito atingível, ou acessível, a partir do estado x_0, em t_0, em relação a $\bar{U}$ se existir um elemento u_1 de $\bar{U}$ tal que

$$\varphi(t_1; u_1(t_0,t_1], x_0) = x_1$$

para algum t_1 finito com $t_1 \geq t_0$.

Def. : Se $A(t, x_0, t_0, \bar{U})$ representa um subconjunto de R_n constituído ~~pelos~~ por todos os estados x_1 atingíveis a partir de x_0, em t_0, com relação a $\bar{U}$, no instante t, então $A(\ \ )$ é o conjunto dos estados atingíveis em t, a partir de x_0, em t_0, com relação a $\bar{U}$.

Def. : $\bigcup\limits_{t \geq t_0} A(t, x_0, t_0, \bar{U})$ representa o conjunto de todos os estados atingíveis a partir de x_0 em t_0 com relação a $\bar{U}$.

Uma observação importante que deve ser feita a esta altura é que o fato de vincularmos os controles à satisfação do vínculo Ω limita o conjunto dos controles admissíveis e, portanto, limita o conjunto dos estados atingíveis.

Para definir controlabilidade e observabilidade a restrição de satisfazer o vínculo Ω é levantada.

Consideremos um sistema dinâmico

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$$
$$y(t) = g[x(t), u(t), t]$$

com função de transição $\varphi(t; u(t_0,t], x_0)$.

Seja $\mathcal{U}$ o conjunto de todas as funções (seccionalmente contínuas) definidas no intervalo (T_1, T_2) de interesse do problema com valores em R^m. Em outras palavras, os controles admissíveis não são vinculados.

b) Controlabilidade

Def: Se o estado $x_1 = 0$ é atingível a partir de x_0 em t_0, então dizemos que x_0 é controlável em t_0. Em outras palavras, x_0 é controlável em t_0 se existe uma função (sec. contínua) u° tal que

$$\varphi(T; u^\circ(t_0,T], x_0) = 0$$

para algum T finito, $T \geq t_0$.

Def.: Se cada estado x_0 é controlável em cada instante t_0 do intervalo (T_1, T_2) de definição do problema, então dizemos que o sistema é completamente controlável.

c) Observabilidade

Def: O estado x_0 é observável em t_0 se, dado um controle qualquer u, existe um instante t_1, $t_1 \geq t_0$, tal que o conhecimento de $u(t_0,t_1]$ e da saída $y(t_0,t_1] = \hat{g}(x_0; u(t_0,t_1], t_1)$ é suficiente para determinar x_0.

Def. Se cada estado x_0 é observável em todos os t_0 do intervalo (T_1, T_2) de definição do problema, então dizemos que o sistema é completamente observável.

~~Exemplo Demonstrar que o sistema~~

$$\cancel{\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}}$$

$$\cancel{\begin{bmatrix}y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}}$$

Exemplos

a) $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Identificamos $A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$

$n=2$

$\left[B \mid AB \mid A^2B \mid A^{n-1}B\right]=\left[B \mid AB\right]$ a.1) Controlabilidade

$$AB=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+1\\ -2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ -2\end{bmatrix}$$

$\left[B \mid AB\right]=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{bmatrix}$, de ordem 1 e não $n=2$

e o sistema é não controlável

a.2) Observabilidade $(n=2)$

$$\left[C^T \mid A^TC^T \mid A^{T2}C^T \mid \dots \mid A^{T(n-1)}C^T\right]=\left[C^T \mid A^TC^T\right]$$

$$A^TC^T=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}$$

$\left[C^T \mid A^TC^T\right]=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ de ordem $n=2$

sistema é observável.

Para verificarmos essas idéias, consideremos o sistema dado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + u \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 + u \\ -\dot{x}_2 = +2x_1 - u \end{cases}$$

$\oplus$

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -x_1 + x_2$$

ou $$\frac{d}{dt}(x_1 - x_2) = -(x_1 - x_2)$$ (uma var. linear)

o que mostra que a diferença entre as variáveis de estado independe de u e portanto o sistema é não controlável.

Por outro lado, vejamos a observabilidade

$$y = x_1 \Rightarrow \dot{y} = \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 + u$$

que podemos colocar na forma

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = 3y + \dot{y} - u \end{cases}$$

o que mostra que x_1 e x_2 podem ser obtidos a partir de y e de u.

b) Consideremos agora

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$[y] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

isto é, $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

b.1) Controlabilidade

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[B \mid AB] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ de ordem $n = 2$

Sistema é controlável

b2) Observabilidade

$$A^T C^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+1 \\ -2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[C^T \,\vdots\, A^T C^T \right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$ de ordem 1 e não $n=2$.

Sistema não observável

Para verificarmos este item b.2

$$c = x_1 + x_2$$
$$\dot{c} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = (-3x_1 - 2x_2 + u) + (x_1)$$

ou $\begin{cases} c = x_1 + x_2 \\ \dot{c} = -2(x_1 + x_2) + u \end{cases}$

o que mostra que apenas a soma $x_1 + x_2$ pode ser obtida.

Controlabilidade · sistemas não autonomos

Cap. 2. Conceitos Básicos
(Máximos e Mínimos; Minimização de Integ

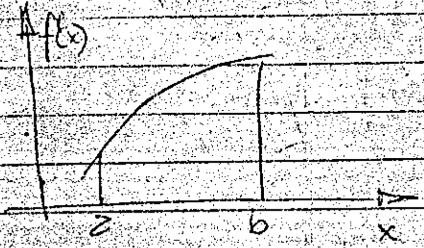
2.1. Idéias Gerais

Preocupar-nos-emos primeiramente com máximos e mínimos de funções de uma, duas ou n variáveis. Em seguida, introduziremos alguns conceitos do cálculo variacional para conseguirmos deduzir máximos e mínimos de integrais definidas.

2.2. Mínimo de funções:

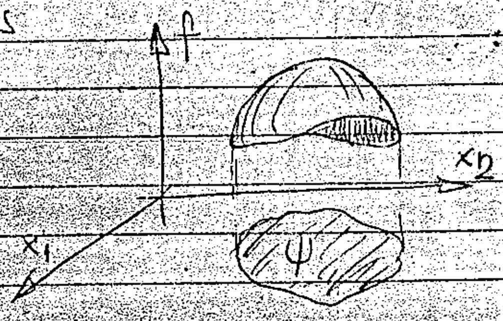
Dada a função $I(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f$ definida em $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$

Exs.
① f(x) a uma variável



$\phi(x) = (x-a)(x-b) \leq 0$

② f(x) a duas variáveis

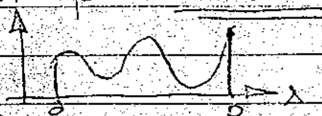


Def. 1: O ponto $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ é dito de mínimo absoluto se para Δx arbitrário, tem-se

$$\Delta f(x^*) = f(x^* + \Delta x) - f(x^*) \geq 0$$

Def. 2. Nas condições acima, se $\Delta x = dx$ (infinitesimal) o ponto x^* é dito de mínimo relativo.

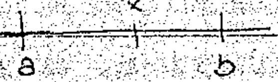
Ex:



2.2 Funções de uma variável

$IP = IP(x)$ onde x é escalar, definida em

$$\psi = (x-a)(x-b) \leq 0$$



Ponto interior

Cond. Necessária (só existe critério p/ mínimo relativo)

se existir x^* ele deve ser tal que

$$\Delta IP(x^*) = IP(x^* + dx) - IP(x^*) \geq 0$$

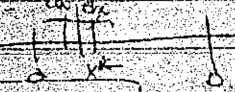
desenvolvendo IP em torno de x^* em série de Taylor:

$$\Delta IP(x^*) = \cancel{IP(x^*)} + \frac{dIP(x^*)}{dx}dx + \frac{d^2IP(x^*)}{dx^2}dx^2 + O(dx^3) - \cancel{IP(x^*)}$$

Para dx suficientemente pequeno

$$\Delta IP(x^*) = \left[\frac{dIP(x^*)}{dx}\right] dx > 0$$

Isto é impossível porque dx pode ser positivo ou negativo.



$$\boxed{\frac{dIP(x^*)}{dx} = 0} \quad \text{Cond. necessária}$$

Esta relação permite determinar x^* (ponto estacionário)

Para determinar se x^* é de máximo ou de mínimo, analisamos o termo de 2ª ordem:

$$\Delta IP(x^*) = \left[\frac{d^2IP(x^*)}{dx^2}\right] dx^2 > 0 \qquad \frac{dIP}{dx} = 0$$

Como $dx^2 > 0$

$$\boxed{\frac{d^2IP}{dx^2} > 0} \quad ; \text{ cond. sufic.}$$

Tudo isso vale, na condição de x^* não estar na fronteira, i.é, dx pode ser positivo ou negativo.

<u>Ponto na fronteira</u>: $x^* = a$ ou $x^* = b$

a) $x^* = a$, dx só pode ser positivo

$$\Delta IP(x^*) = \left[\frac{dIP}{dx}(x^*)\right] dx > 0$$

$$\frac{dIP}{dx}(x^*) > 0 \quad ; \text{ cond. suficiente}$$

b) $x^* = b$ $\qquad \frac{dIP(x^*)}{dx} < 0$; cond. suficiente

Ex. $IP = x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Ponto interior: $dIP/dx = 1 - \operatorname{sen} x^* = 0 \Rightarrow x^* = \pi/2$, $\frac{d^2IP}{dx^2} = -\cos x^* = 0$; $d^3IP/dx^3 = \operatorname{sen} x = 1$
Ponto fronteira: $dIP/dx|_{x=0} = 1$; $\frac{dIP}{dx}|_{x=2\pi} = 1 \Rightarrow$ mínimo local em $x = 0$; $IP(0) = 1 \rightarrow$ máximo absoluto; $IP(\pi/2) = \pi/2$ … $2\pi + 1$ é máximo local; π é mínimo absoluto

2.3. <u>Funções de n variáveis</u>

Seja $IP(x) = IP(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definida em

$$\psi(x) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$$

Então a condição de mínimo (relativo) é dada por:

$$\Delta IP(x^*) = \Delta IP(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = IP(x^* + dx) - IP(x^*) > 0$$

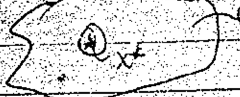
→ Ponto interior (i.é $\psi(x^*) < 0$).

$$\Delta IP(x^*) = \cancel{IP(x^*)} + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial IP}{\partial x_j}(x^*)\right] dx_j + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 IP(x^*)}{\partial x_i \partial x_k}\right] dx_i dx_k +$$
$$+ O(dx^3) - \cancel{IP(x^*)}$$

21

$$\Delta IP(x^*) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial IP}{\partial x_j}\right] dx_j$$

Tomemos uma vizinhança de x^* em ψ e imaginemos que todos os dx se anulem nessa vizinhança, à exceção de dx_k



Seja $dx = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ dx_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ onde k é arbitrário $1 \leq k \leq n$

$$\Delta IP(x^*) = \left[\frac{\partial IP(x^*)}{\partial x_k}\right] dx_k > 0$$

dx_k pode ser positivo ou negativo

$$\boxed{\frac{\partial IP(x^*)}{\partial x_k} = 0 \quad p/\ 1 \leq k \leq n}$$

condição necessária

$$\Delta IP(x^*) = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 IP(x^*)}{\partial x_i \partial x_k}\right] dx_i\, dx_k > 0$$

Em forma matricial

$$\Delta IP(x^*) = \frac{1}{2!} dx^T \left[\nabla^2 IP(x^*)\right] dx > 0$$

Para $dx \neq 0$ a condição suficiente é que $[\nabla^2 IP(x^*)]$ seja definida positiva

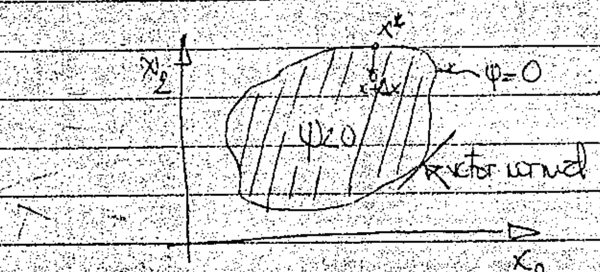
$$\nabla^2 IP(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 IP(x^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 IP}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 IP(x^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 IP(x^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 IP(x^*)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

D. Ponto na Fronteira $[\psi(x^*) = 0]$

x^*: ponto de mínimo

Supondo a existência de x^* tal que $\psi(x^*) = 0$, verifiquemos as condições para tal.

Caso Particular



Nem sempre o vetor normal a uma superfície existe.

$$\nabla\psi(x) = \left[\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right]$$

Para $x \in \psi(x) = 0$, $\nabla\psi(x)$ é um vetor normal a $\psi(x)$.

Para x^* ser ponto de mínimo

$$IP(x^* + \Delta x) - IP(x^*) > 0 \qquad (1)$$

Devido ao vínculo

$$\psi(x^* + \Delta x) \leq 0 \qquad (2)$$

Notemos que Δx pode ser tanto ao longo da fronteira como para o interior da região.

Imaginemos 2 casos:

1º caso) Δx para o interior

$$\psi(x^* + \Delta x) < 0$$

Então qualquer que seja Δx existe $k < 0$ tal que

$$\psi(x^* + \Delta x) = k$$

Desenvolvendo em série de Taylor

$$\psi(x^* + \Delta x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Delta x_i + o(2) + \underbrace{\cancel{\psi(x^*)}}_{0} = k$$

Se pelo menos um dos $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x^*) \neq 0$, então

$$\boxed{\Delta x_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\partial \psi / \partial x_j}{\partial \psi / \partial x_i} \Delta x_j + \frac{k}{\partial \psi / \partial x_i}} \quad (3)$$

Note-se que Δx_j e k são arbitrários

De (1) $\Rightarrow \Delta IP(x^*) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial IP}{\partial x_j} \Delta x_j + o(\ell)$

Substituindo Δx_i de (3) em (2)

$$\Delta IP(x^*) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left[\frac{\partial IP}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial IP / \partial x_i}{\partial \psi / \partial x_i} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right] \Delta x_j + \left(\frac{\partial IP / \partial x_i}{\partial \psi / \partial x_i} \right) k + o(\ell) \geq 0 \quad (4)$$

Tomando $\Delta x_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $j \neq i$

$$k \left(\frac{\partial IP / \partial x_i}{\partial \psi / \partial x_i} \right) \geq 0$$

e como $k < 0$, $\left(\frac{\partial IP / \partial x_i}{\partial \psi / \partial x_i} \right) < 0$

~~Para~~ Chamemos $\frac{\partial IP / \partial x_i}{\partial \psi / \partial x_i} = \alpha$, $\alpha < 0$

Para k suficientemente pequeno como os Δx_j são arbitrários impomos

$$\frac{\partial IP}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial IP / \partial x_i}{\partial \psi / \partial x_i} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0 \quad (5)$$

$j = 1, \ldots, n$; $j \neq i$

Temos $n-1$ relações em (5). A n-ésima é a condição de vínculo $(\psi(x^*) = 0)$

$$\frac{\partial IP}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \qquad j = 1, \ldots, n \quad j \neq i \quad \Rightarrow \nabla IP(x^*) \,/\!/\, \nabla \psi(x^*)$$

2º caso) Δx na fronteira $(\psi(x^*+\Delta x) = 0)$

Δx na fronteira $\Rightarrow \lambda = 0$ e portanto recaímos na expressão (5).

Exercícios

1. $L = u_1^2 + 4u_2^2$

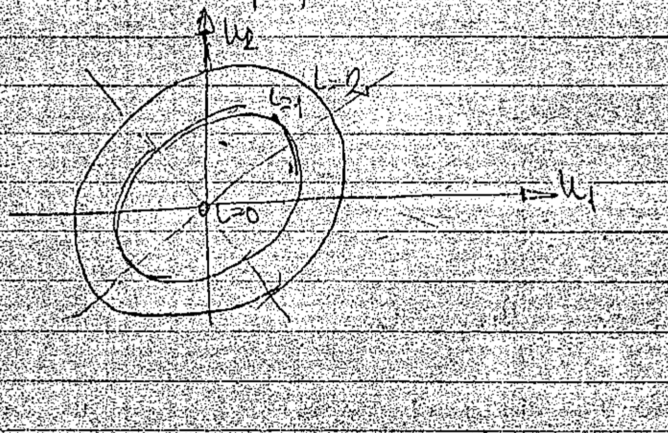
CN $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial u_1} = 2u_1 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial u_2} = 8u_2 \end{cases}$ (0,0) é um pto estacionário

CS $\left\{ du^T \nabla^2 L \, du > 0 \right.$

$du = \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix}$

$$\nabla^2 L = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_1 \partial u_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$\nabla^2 L$ é def. positiva $\Rightarrow$ (0,0) é ponto de mínimo



$8u_1u_2 - 16u_2^3$ (3.5)

$u_1 = \frac{3u_2^2}{2}$ $u_1 = \frac{u_2^2}{2}$

2) $L(u_1,u_2) = u_1^2 - 4u_1u_2^2 + 3u_2^4 = (u_1 - u_2^2)(u_1 - 3u_2^2)$

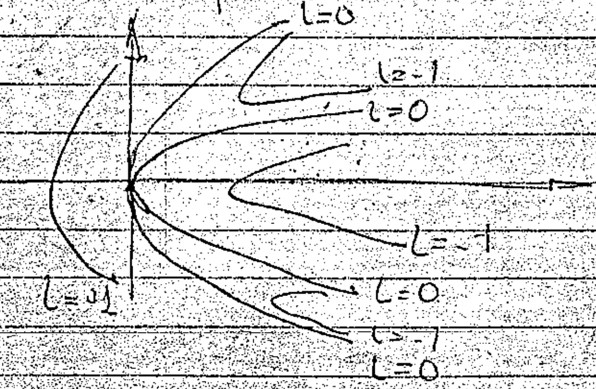
$$CN \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u_1} = 0 = 2u_1 - 4u_2^2 \\ \frac{\partial L}{\partial u_2} = 0 = -8u_1u_2 + 12u_2^3 \end{cases} \quad (0,0) \text{ é estacionário}$$

$$\nabla^2 L = \begin{bmatrix} 2 & -8u_2 \\ -8u_2 & 36u_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 L(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{semidefinida positiva}$$

$$du^T \left[\nabla^2 L(0,0)\right] du = 2(du_1)^2 \quad \text{galho!}$$

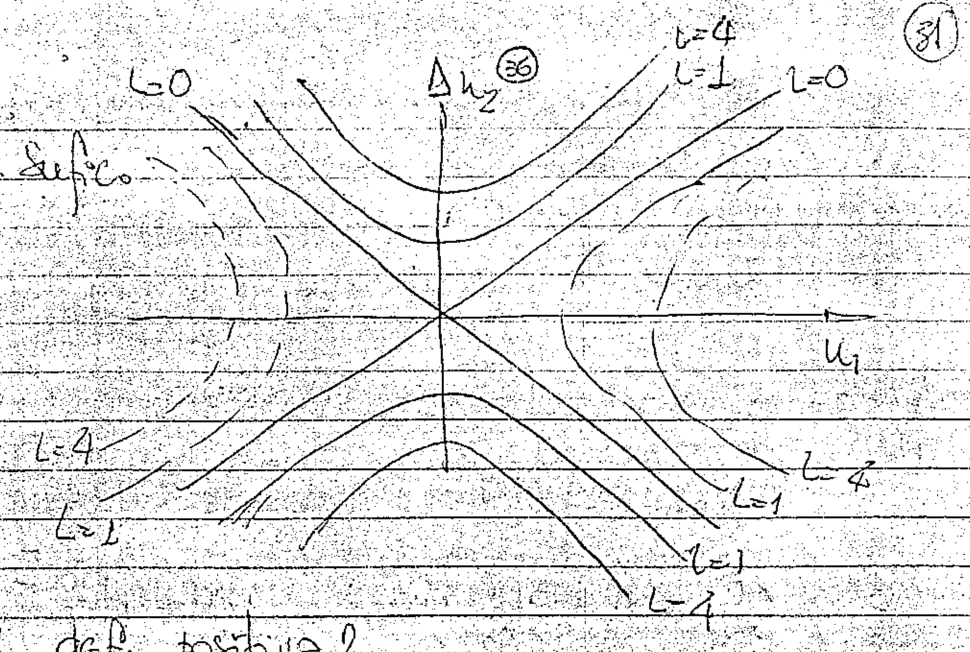
(0,0) não é ponto de mínimo, é ponto singular



3) $L = 4u_2^2 + 2u_1u_2 - u_1^2$

$$CN \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow 2u_2 - 2u_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow 8u_2 + 2u_1 = 0 \end{cases} \quad (0,0) \text{ é ponto estacionário}$$

Cond. Sufic.



$\nabla^2 L$ def. positiva?

$$\nabla^2 L = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow (0,0) \text{ não é pto mínimo}$$

$(\lambda+2)(\lambda-8)-4=0 \quad \lambda^2-6\lambda-20=0$

$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{116}}{2}$

$\nabla^2 L$ também não é def. negativa (2º determinante tbém <0) $\Rightarrow (0,0)$ não é ponto de máximo

$(0,0)$ é ponto de sela.

4.5. CASO DA EXISTÊNCIA DE VÍNCULOS DE IGUALDADE

Consideremos o caso em que, definido um $IP(x) = IP(x_1, x_2, \dots, x_n)$ deseja-se determinar x^* tal que $IP(x^*)$ seja mínimo, desde que obedecidas as seguintes condições:

$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$
$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

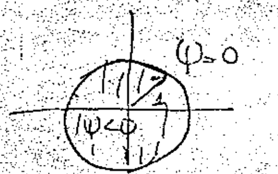
$\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

com $m < n$ (senão $m = n \Rightarrow x$ é conhecido.)

37 31A

4.) $IP = x_1^2 - x_2^2/4 \quad ; \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1$

$\psi = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$



a) Ponto interior

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial IP}{\partial x_1} &= 2x_1 = 0 \\ \frac{\partial IP}{\partial x_2} &= -\frac{x_2}{2} = 0 \end{aligned}\right] \Rightarrow (0,0) \text{ é estacionário}$$

$$\nabla^2 IP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Det. 1º $= 2$
2º $= -1$

(0,0) é ponto singular (de sela)

b) Ponto na Fronteira:

$$\frac{\partial IP}{\partial x_1} = + k \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \Rightarrow 2x_1 = k\,2x_1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial IP}{\partial x_2} = k \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \Rightarrow -\frac{x_2}{2} = k\,2\,x_2 \quad (2)$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

Solução possível:

$$x_1^* = 0 \quad ; \quad x_2^* = \pm 1 \quad ; \quad k = -4$$

Cond. necessária na fronteira é satisfeita. Como não se estabelecem cond. suficiente por simples teste

$(x_1^*, x_2^*) = (0, \pm 1)$ são pontos de mínimo com

$IP = -\frac{1}{4}$

Uma condição necessária para mínimo é que IP seja estacionário, isto é:

$$dIP = \frac{\partial IP}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial IP}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial IP}{\partial x_n} dx_n = 0$$

~~Agora os dx_1 e dx_2 não são arbitr~~

Note que agora, $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ não são arbitrários já que eles devem respeitar os vínculos de igualdade, i.e.,

$$d\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$d\varphi_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$\vdots$$

$$d\varphi_m = \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} dx_n = 0$$

Particularizemos para o caso de $n=2$ e $m=1$, isto é:

$$IP = IP(x_1, x_2) \qquad , \qquad \varphi = \varphi(x_1, x_2) = 0$$

$$dIP = \frac{\partial IP}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial IP}{\partial x_2} dx_2 \qquad (1)$$

$$d\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 = 0 \qquad (2)$$

Para achar valores que satisfazem (1) e (2), admitamos $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \neq 0$ e de (2):

$$dx_1 = -\frac{\partial \varphi / \partial x_2}{\partial \varphi / \partial x_1} dx_2$$

e, em (1), resulta

$$dIP = \left[\frac{\partial IP}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi / \partial x_2}{\partial \varphi / \partial x_1} + \frac{\partial IP}{\partial x_2} \right] dx_2$$

∂x_2 pode agora ser considerado arbitrário e satisfazer a relação acima implica fazer

$$\frac{\partial IP}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial IP}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$$

Esta equação e mais $\varphi(x_1, x_2) = 0$ fornecem a solução (x_1^*, x_2^*) que satisfazem as conds. necessárias para mínimo local.

Este desenvolvimento pode ser entendido como o MÉTODO DE LAGRANGE para 2 variáveis. O método se apoia no seguinte Teorema:

Suponha que a) $IP(x_1, x_2)$ e $\varphi(x_1, x_2)$ tem diferenciais totais numa vizinhança da curva $\varphi(x_1,x_2)$ e

b) pelo menos uma das derivadas $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ é não nula em qquer ponto de $\varphi(x_1, x_2)$

Então (Cond. Necessária) se a função $IP = IP(x_1, x_2)$ possue um extremo (máximo ou mínimo) local, na curva $\varphi(x_1, x_2)$, num ponto (x_1^*, x_2^*) da curva, existirá uma constante λ tal que a função

$$\boxed{\tilde{IP}(x_1, x_2) = IP(x_1, x_2) + \lambda \varphi(x_1, x_2)}$$

no ponto (x_1^*, x_2^*) satisfará as relações

$$\frac{\partial \tilde{IP}}{\partial x}(x_1^*, x_2^*) = 0 \;;\; \frac{\partial \tilde{IP}}{\partial y}(x_1^*, x_2^*) = 0 \;;\; \varphi(x_1^*, x_2^*) = 0$$

Procedimento: Dados IP e φ, constroe-se $\tilde{IP}(x_1, x_2)$. Com as conds. da tese determina-se x_1^*, x_2^* e λ.

Cond. Suficiente: $\nabla^2 \tilde{IP} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{IP}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \tilde{IP}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{IP}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \tilde{IP}}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}\right|_{x_1^*, x_2^*}$ def. positiva

Estendendo para n variáveis, seja $\mathbb{P} = \mathbb{P}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e sejam $\psi_i = \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$; $i = 1, \dots, m$, $m < n$ os vínculos

Definindo

$$\tilde{\mathbb{P}}(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots \lambda_m) = \mathbb{P}(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \psi_i(x_1, \dots, x_n)$$

as conds. necessárias para mínimo são

$$\frac{\partial \tilde{\mathbb{P}}}{\partial x_1} = 0 \; ; \; \frac{\partial \tilde{\mathbb{P}}}{\partial x_2} = 0 \; ; \; \dots \; ; \; \frac{\partial \tilde{\mathbb{P}}}{\partial x_n} = 0 \quad (n \text{ eqs.})$$

$$\psi_1(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0 \; ; \; \psi_2(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0 \; ; \; \dots \; ; \; \psi_m(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0 \quad (m \text{ eqs.})$$

Temos $m + n$ equações para as m incógnitas λ_i e n incógnitas x_i^*

Os λ são chamados multiplicadores de Lagrange

Ex. (Bryson)

minimizar $\mathbb{P} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$

sujeito ao vínculo $\quad \psi(x,y) = x + my - c$

a, b, c, m são constantes

$$\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P} + \lambda \psi$$

$$\tilde{\mathbb{P}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + \lambda(x + my - c)$$

Conds. necessárias

$$\frac{\partial \tilde{\mathbb{P}}}{\partial x} = 0 \; , \; \frac{\partial \tilde{\mathbb{P}}}{\partial y} = 0 \; , \; \psi(x,y) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial \tilde{IP}}{\partial x} = \frac{x}{a^2} + \lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{IP}}{\partial y} = \frac{y}{b^2} + \lambda m = 0 \qquad (2)$$

$$x + my - c = 0 \qquad (3)$$

$$x = c - my \quad ; \quad \begin{cases} \frac{c - my}{a^2} + \lambda = 0 \\ \frac{y}{b^2} + \lambda m = 0 \Rightarrow y = -b^2 m \lambda \end{cases}$$

$$\frac{c + b^2 m^2 \lambda}{a^2} + \lambda = 0 \Rightarrow c = -(\lambda a^2 + b^2 m^2 \lambda)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{-c}{b^2 m^2 - a^2}}$$

$$x^* = + \frac{a^2 c}{b^2 m^2 + a^2} \quad \text{ou}, \quad x^* = \frac{a^2 c}{a^2 + b^2 m^2}$$

$$y^* = -b^2 m \lambda = \frac{mcb^2}{a^2 + b^2 m^2}$$

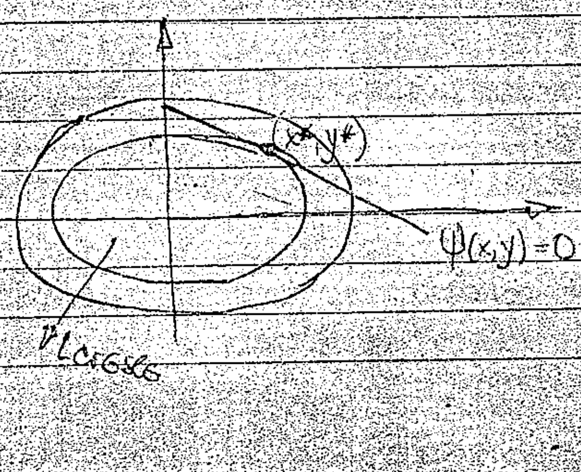
Cond. Suficiente $\rightarrow$ $\nabla^2 \tilde{IP}$ é definida positiva

$$\frac{\partial^2 \tilde{IP}}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \qquad \frac{\partial^2 \tilde{IP}}{\partial y^2} = \frac{1}{b^2}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{IP}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \tilde{IP}}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\nabla^2 L = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{bmatrix} \quad \text{def. positiva}$$

(x^*, y^*) é ponto de mínimo.



Uma visão rápida sobre métodos para solução de problemas de otimização de parâmetros

classificação usual (Luenberger)

Programação linear
Programação não-linear < problemas sem vínculos / problemas com vínculos

1. Programação linear

Permite formular uma vasta gama de problemas com pequeno esforço

característicos:

Função objetivo linear nas incógnitas
vínculos são também lineares nas incógnitas

Nesse caso, se o mínimo existe, deve ocorrer na fronteira já que a curvatura de Φ é nula em todo ponto.

Forma padrão

Minimizar $\Phi = b^T y$

sujeito a $A^T y + c \leq 0$

$\left.\begin{array}{l} y - (n \times 1) \\ c - (m \times 1),\ m \geq n \end{array}\right] \rightarrow A\ (m \times n)$

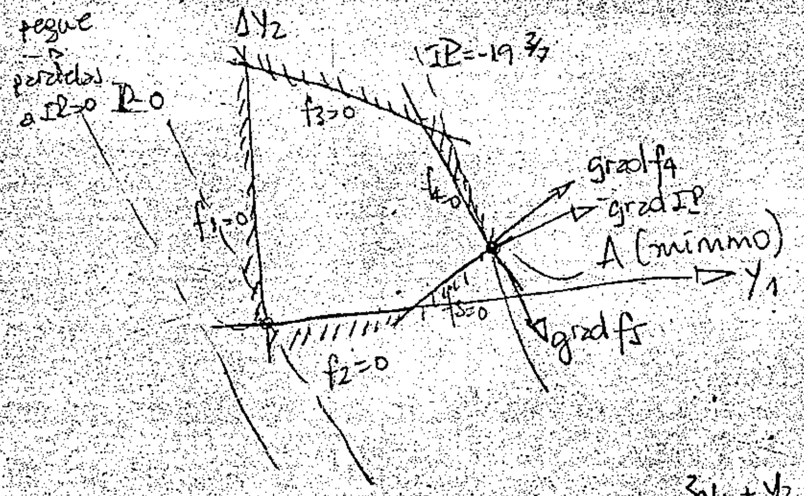
Se A é de posto n e b^T é não colinear com qualquer das linhas de A^T ou qualquer combinações lineares negativas de n+1 linhas de A^T, o mínimo, se existir, ocorre num ponto determinado pela satisfação simultânea de n dos vínculos $A^T y + c = 0$

TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Ex.: $IP = -5y_1 - y_2$

$f_1 = -y_1 \leq 0$; $f_2 = -y_2 \leq 0$; $f_3 = y_1 + y_2 - 6 \leq 0$

$f_4 = 3y_1 + y_2 - 12 \leq 0$; $f_5 = y_1 - 2y_2 - 2 \leq 0$



Mínimo ocorre em A ⇒ $\left.\begin{array}{l} 3y_1 + y_2 - 12 = 0 \\ y_1 - 2y_2 - 2 = 0 \end{array}\right]$ $y_1 = 3\,5/7$; $y_2 = 6/7$

$IP_{min} = -19\,3/7$

Grad IP pode ser expresso como combinação linear negativa de $\overset{=2}{n}$ linhas de A mas não $n-1\,(=1)$.

A implicação do TFPL para solução numérica de problemas de programação linear é clara: pegue n vínculos e trate-os como ~~desigualdades~~. Acha-se uma solução que pode ser ótima ou não-ótima. Se for não-ótima, jogue fora um dos vínculos e substitua por outro; repita o processo admitindo que a nova solução seja possível e melhor. Como o número de possibilidades é finito, o processo deve convergir para a combinação ótima.

Este é o MÉTODO SIMPLEX

PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR

1. Problemas sem vínculos

Principal interesse: redução de um problema com vínculos a um problema sem vínculos (substituição ou multiplicadores de Lagrange)

~~tratamento~~

Filosofia: para quê considerar vinculação?

Caracterização:

Função objetivo não linear nas incógnitas

Métodos básicos

- Gradientes
- Direções conjugadas
- Quasi-Newton

aumento da velocidade de convergência

Método do Gradiente de 1ª ordem

- Método de busca direta
- Melhora estimativa de u até atingir $\partial H/\partial u = 0$

- Método de 1ª ordem
  - bom nos passos iniciais
  - oscila no final

- Método do Grad. 2ª ordem

- Funções de penalidade

3. Problemas com vínculos (45) 35D

Caracterização

Minimizar $f(x)$

sujeito a $h_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$

$g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, r$

Métodos básicos

- Direções viáveis
- Projeção do gradiente
- Método de Newton
- Gradiente reduzido

As Condições de Kuhn-Tucker

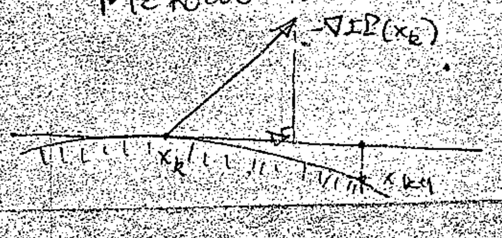
x^* que satisfaz $h(x^*) = 0$, $g(x^*) \leq 0$ é regular nos vínculos se $\nabla h_i(x^*)$; $\nabla g_j(x^*)$ são linearm/independentes

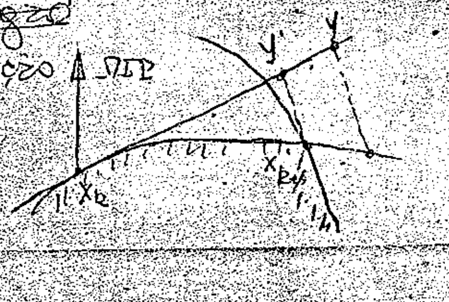
Se x^* é mínimo relativo para
minimizar $IP(x)$
sujeito a $h(x) = 0$, $g(x) \leq 0$
e x^* é regular, então existe λ e μ, $\mu \geq 0$ t.q.

$$\nabla IP(x^*) + \lambda \nabla h(x^*) + \mu \nabla g(x^*) = 0$$

$$\mu g(x^*) = 0$$

~~Idéia~~
Método da Projeção do Gradiente ~~Conjugado~~





Cap. 2

Minimização de Integrais Definidas

História - Prob. Dido > Mecânica Analítica > Cálculo Variacional

Seja o caso de se querer minimizar:

$$IP = \int_{t_i}^{t_f} f(x,\dot{x},t)\,dt$$

onde, por enquanto!,

t_i e t_f são dados e fixos

$x(t_i)$ e $x(t_f)$ são fixos

Entendamos primeiramente o que significa o problema dado:

a) $IP = IP(f(x,\dot{x},t))$ é um funcional, isto é, dadas as funções ~~f(x,ẋ,t)~~ $x(t)$, IP é aplicado sobre as funções e leva a um valor escalar, na reta real, depois de integrar a função entre t_i e t_f.

b) Devemos agora comparar funções $x(t)$ para verificar qual delas leva ao menor valor de IP, isto é:

$$IP^* = \min_{x(t)} \int_{t_i}^{t_f} f(x,\dot{x},t)$$

Para estabelecer as condições para existência de um $x^*(t)$, vamos seguir um procedimento similar à teoria de máximos e mínimos, considerando que agora temos funções do tempo como candidatas, ao invés de um valor isolado.

Supondo a existência de um $x^*(t)$ devemos comparar a correspondente IP^* com as IP resultantes de $x(t)$ na vizinhança de $x^*(t)$.

Para se ter condições de desenvolvimento formal, admitiremos que:

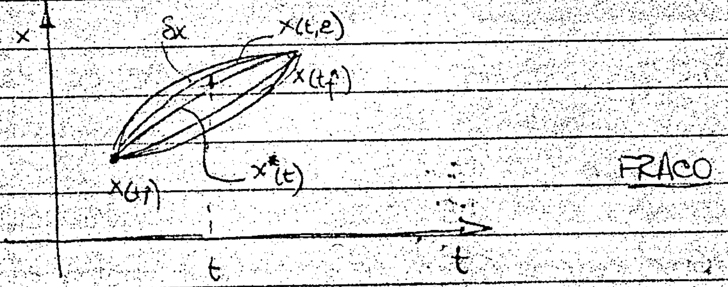
$\therefore$ $x(t,\varepsilon)$ - função na vizinhança de $x^*(t)$

por exemplo: $x(t,\varepsilon) = x^*(t) + \varepsilon z(t)$

$x(t,\varepsilon)$ pertence à seguinte classe de funções:

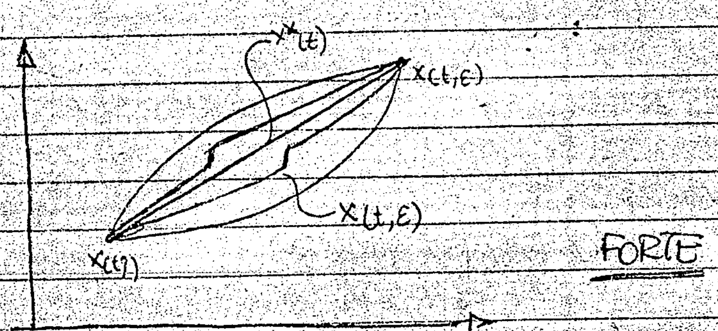
1. $|x(t,\varepsilon) - x^*(t)| \leq \varepsilon$

2. $|\dot{x}(t,\varepsilon) - \dot{x}^*(t)| \leq \varepsilon$ (curvatura próxima a $x^*(t)$)



Quando as $x(t,\varepsilon)$, ~~obedece~~ funções de comparação, obedecem às condições 1. e 2., o mínimo obtido é dito um mínimo fraco (extremo fraco)

No caso das $x(t,\varepsilon)$ obedecerem apenas à condição 1, o mínimo obtido é dito um mínimo forte. Nesse caso, é levantada a restrição sobre as derivadas cond. 2.



O conceito de variação

Consideremos funções da classe que fornece um mínimo fraco, isto é, as $x(t,\varepsilon)$ funções de comparação, obedecem

48

às condições 1. e 2.

Funções desta classe possuem expansão em série (~~sobre~~ ε), em torno de $\varepsilon = 0$. Pode-se então escrever:

$$x(t,\varepsilon) = x(t,0) + \left.\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \sigma(\varepsilon^2)$$

Desde que o termo de 1ª ordem prevaleça na equação acima, supondo $\left.\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \neq 0$, este termo recebe uma designação especial.

Define-se variação de $x(t)$, num certo instante de tempo, como

$$\delta x(t) = \left.\frac{\partial x(t)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon$$

Observe que se $x = x(t,\varepsilon)$, $dx = \partial x/\partial t|_{\varepsilon=0}\, dt + \partial x/\partial \varepsilon|_{\varepsilon=0}$ $= \dot{x}(t)\,dt + \delta x(t)$, dx é a diferencial total. Note que a variação $\delta x(t)$ é uma função do tempo.

Para um ε suficientemente pequeno podemos desprezar os termos de 2ª ordem e:

$$x(t,\varepsilon) - x(t) \cong \delta x(t)$$

Comparemos agora as derivadas $\dot{x}(t,\varepsilon)$ e $\dot{x}(t)$.
Expandindo $\dot{x}(t,\varepsilon)$ em torno de $\varepsilon = 0$:

$$\dot{x}(t,\varepsilon) = \dot{x}(t,0) + \left.\frac{\partial \dot{x}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \sigma(\varepsilon^2)$$

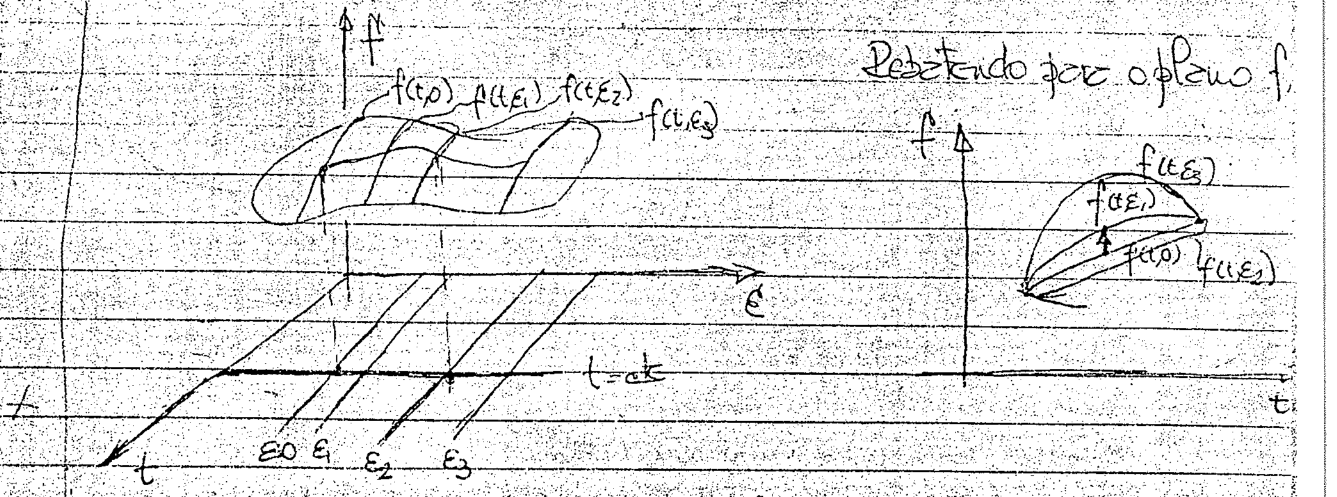
Para ε suficientemente pequeno:

$$\delta \dot{x}(t) = \left.\frac{\partial \dot{x}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon$$

Como ε não depende de t, fica claro que

$$\boxed{\delta \dot{x} = \frac{d}{dt}(\delta x)}$$

Uma observação importante quanto às funções de comparação pode ser vista na figura abaixo



Notar que as distâncias que estamos medindo não estão no plano f,t.

Vejamos agora a variação da função f do integrando de IP.

Expandindo $f(x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon), t)$ em torno de $\varepsilon = 0$

$$f(x(t,\varepsilon),\dot{x}(t,\varepsilon),t) = f(x(t,0),\dot{x}(t,0),t) + \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \varepsilon \right]}_{\delta f} + O(\varepsilon)$$

$$\delta f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \right] \cdot \varepsilon$$

Para ε suficientemente pequeno

$$\boxed{\delta f \cong f(x(t,\varepsilon),\dot{x}(t,\varepsilon),t) - f(x(t),\dot{x}(t),t)}$$

Equação de Euler - Lagrange

$\cancel{IP = \int_{t_i}^{t_f} f\,dt}$

Consideremos agora o seguinte problema:

$$IP = \int_{t_i}^{t_f} f(x, \dot{x}, t)\, dt$$

com $t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)$ fixos ←

Para se ter condições de aplicação da definição, substituimos $x(t,\varepsilon)$ em IP, e seja:

$$IP(\varepsilon) = \int_{t_i}^{t_f} f(x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon), t)\, dt$$

Portanto, se $x^*(t) = x(t,0)$ corresponder ao mínimo de IP, deve-se necessariamente ter que $IP(\varepsilon)$ tem seu mínimo para $\varepsilon = 0$, i.e.

$$\boxed{IP(\varepsilon) - IP(0) \geq 0}$$

Desenvolvendo $IP(\varepsilon)$ em série de Taylor (Mc Laurin)

$$IP(\varepsilon) = IP(0) + \underbrace{\left.\frac{\partial IP}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon}_{\delta IP} + O(2)$$

Nesse caso como IP é apenas função de ε a variação δIP coincide com a diferencial de 1ª ordem dIP.

Desprezando termos de 2ª ordem, a condição necessária é $\cancel{\delta IP = IP(\varepsilon) - IP(0) \geq 0}$ para extremo é que

$$\delta IP = 0$$

Mas, como t_i e t_f não dependem de ε,

$$\delta IP = \delta\left[\int_{t_i}^{t_f} f(x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon), t)\, dt\right] = \int_{t_i}^{t_f} \delta f(x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon), t)\, dt = 0$$

Vejamos agora a função f.

$$\delta f = \left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon\right]$$

Como $\left.\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon = \delta x$, $\left.\frac{\partial \dot{x}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon = \delta \dot{x}$, temos

$$\delta f = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\varepsilon=0} \delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{\varepsilon=0} \delta \dot{x}$$

ou $\delta f(x,\dot{x},t) = \left[\frac{\partial f(x(t),\dot{x}(t),t)}{\partial x}\right]\delta x + \left[\frac{\partial f(x(t),\dot{x}(t),t)}{\partial \dot{x}}\right]\delta \dot{x}$

ou ainda

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}$$

Substituindo em δIP:

$$\delta IP = \int_{t_i}^{t_f}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}\right]dt$$

Usando $\delta \dot{x} = \frac{d}{dt}(\delta x)$

$$\delta IP = \int_{t_i}^{t_f}\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\,dt + \int_{t_i}^{t_f}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}(\delta \dot{x})\,dt$$

Integrando o 2º termo por partes

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}(\delta \dot{x})\,dt = \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\right\}dt$$

$$\delta IP = \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x\,dt$$

Pelo fato de $x(t_i)$ e $x(t_f)$ serem fixos, $\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0$
(todas as curvas de comparação $x(t,\varepsilon)$ passam por $x(t_i)$, $x(t_f)$)

$$\delta IP = \int_{t_i}^{t_f}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x\,dt = 0$$

A única maneira de anular a integral é ter o integrando nulo. Com isso, garante-se

(52)

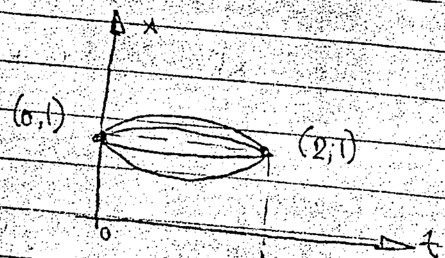
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0} \quad E.E.L.$$

Equação de Euler Lagrange

Exemplos:

$$IP = \int_{t_i}^{t_f} f(x,\dot{x},t)\,dt$$

1.
$$\begin{cases} IP = \int_0^2 (\dot{x}^2 - 1)^2\,dt \\ x(0) = 1 \\ x(2) = 1 \end{cases}$$



$$f(x,\dot{x},t) = f(\dot{x}) = (\dot{x}^2 - 1)^2 dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 2(\dot{x}^2 - 1) \cdot 2\dot{x} = 4\dot{x}(\dot{x}^2 - 1)$$

$$\frac{d}{dt}\left[4\dot{x}(\dot{x}^2 - 1)\right] = 0 \Rightarrow 4\dot{x}(\dot{x}^2 - 1) = \text{Const.}$$

$$4\dot{x} = \text{cte}$$

$$\dot{x}^2 - 1 = \text{cte} \Rightarrow$$

Logo $\dot{x}$ = constante e $\dot{x} = a \Rightarrow$

$$x = at + b$$

$x(0) = 1 \Rightarrow 1 = a\,0 + b$

$x(2) = 1 \Rightarrow 1 = a\,2 + b$

$$b = 1 \quad ; \quad a = 0$$

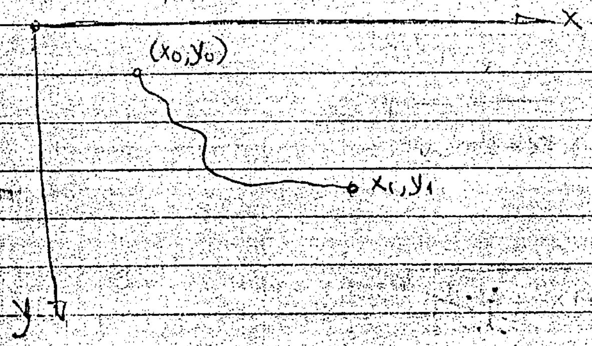
$x(t) = 1$ = const. ; $\dot{x}(t) = 0$ (zero)

$$IP = \int_0^2 (0^2 - 1)^2\,dt = \int_0^2 1\,dt = 2$$

$$\boxed{IP = 2}$$

2. Problema da braquistócrona (curva de tempo mínimo)

Deseja-se determinar a trajetória que uma partícula de massa m percorre num plano vertical, do ponto (x_0, y_0) até o ponto (x_1, y_1), com g constante e sem atrito, de modo que o tempo de percurso seja mínimo



$x_1 > x_0$; $y_1 > y_0$

Este problema foi estudado por Galileu e formalmente proposto por John Bernoulli em 1696. Foi estudado também por Newton, Jacob Bernoulli e Leibnitz, entre outros.

Nossa primeira idéia seria talvez fazer:

$$IP = \int_0^{t_f} 1\, dt = t_f$$

o que não faz sentido com a teoria até aqui desenvolvido.

No entanto observemos que:

$$IP = \int_0^{t_f} = \int_0^{\ell} \frac{dt}{ds}\, ds$$

onde ℓ é o comprimento da curva e ds o arco infinitesimal.

Lembremos que

$v = \frac{ds}{dt}$ — velocidade do ponto

e que o sistema é conservativo, isto é, $E_{din} + E_{pot} = \text{const}$

$\therefore E_{cin} = \frac{1}{2} mv^2$

$E_{pot} = mgy$

$$E_{total} = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} mv^2 + mgy = \text{const}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{\alpha - 2mgy}{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{\alpha - 2mgy}{m}}$$

Por outro lado

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Temos, então, para IP

$$IP = \int_0^l \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\frac{\alpha + 2mgy}{m}}} dx = IP(f(y, y'))$$

e o que se pretende é minimizar IP

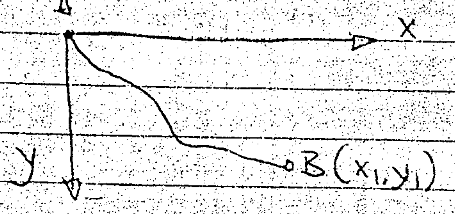
Não vamos demonstrar, mas a solução deste problema é uma cicloide

$$x = a - b(\phi \pm \operatorname{sen}\phi)$$
$$y = b(1 - \cos\phi)$$

onde a e b são escolhidos de forma a que a cicloide passe por (x_0, y_0) e (x_1, y_1)

Problema da Braquistócrona - Solução

Façamos o ponto de partida $A=(x_0,y_0)$ origem do sistema e $B=(x_1,y_1)$ posição final



Como α, energia total do sistema, constante tal que

$$\alpha = 4mgy \; 0 \quad (\alpha \text{ é arbitrário})$$

Isto nos simplifica o problema que pode ser escrito,

$$IP = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx$$

ou

$$IP = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

$$y(0)=0 \quad e \quad y(x_1)=y_1 \text{ dado}$$

Como $f = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$ não depende explicitamente de x existe uma integral primeira da equação de Euler-Lagrange

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{const}$$

ou

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{2}\frac{2y'}{\sqrt{y(y'^2+1)}} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$$

$$\boxed{\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} = C} \Rightarrow \frac{y'^2-1-y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C \Rightarrow y(1+y'^2) = C_1$$

Façamos $y' = \cot g\, z$

substituindo acima

$$y = \frac{C_1}{1+y'^2} = \frac{C_1}{1+\cot g^2 z} = C_1 \operatorname{sen}^2 z$$

$$y = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2z)$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \operatorname{sen} z \cos z\, dz}{\cot g\, z} = 2C_1 \operatorname{sen}^2 z\, dz = C_1(1-\cos 2z)\, dz$$

$$\frac{dx}{dz} = C_1(1-\cos 2z) \Rightarrow x = C_1\left(z - \frac{\operatorname{sen} 2z}{2}\right) + C_2$$

$$x = \frac{C_1}{2}(2z - \operatorname{sen} 2z) + C_2$$

Solução geral da EDEL

$$x - C_2 = \frac{C_1}{2}(2z - \operatorname{sen} 2z)$$

$$y = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2z)$$

Fazendo $2z = \phi$

$$x - C_2 = \frac{C_1}{2}(\phi - \operatorname{sen}\phi)$$

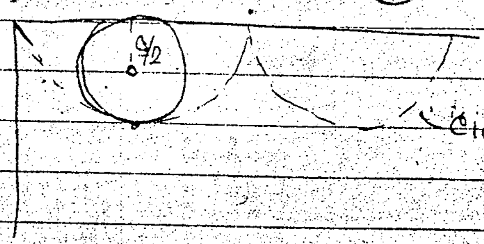
$$y = \frac{C_1}{2}(1-\cos\phi)$$

Impondo $y=0$ para $x=0 \Rightarrow C_2 = 0$

$$x = \frac{C_1}{2}(\phi - \operatorname{sen}\phi)$$

$$y = \frac{C_1}{2}(1-\cos\phi)$$

15B



cicloide

15A

Voltemos à nossa equação de Euler - Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Multiplicando por $\dot{x}$

$$\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) - \dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\underbrace{\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) + \ddot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}} - \dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} - \ddot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) - \dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} - \ddot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0 \qquad (1)$$

Por outro lado:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\ddot{x}$$

$$\dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \ddot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{df}{dt} - \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) vem:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - f\right) = -\frac{\partial f}{\partial t}$$

Se f não depende explicitamente de t, então ~~ex~~

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - f\right) = 0$$

e existe uma integral primeira da equação de Euler dada por:

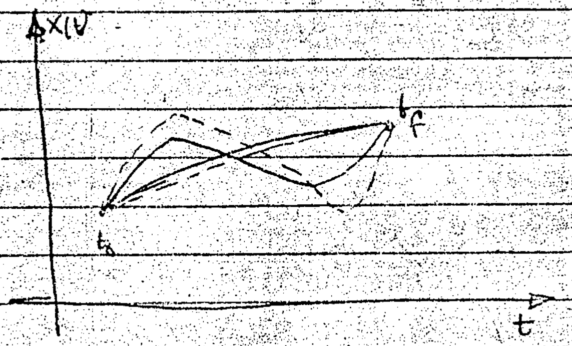
$$\boxed{\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - f = \text{const}}$$

CONDIÇÕES DE QUINA DE WEIERSTRASS - ERDMAN

Até agora partimos da hipótese que o extremante, isto é, a função $x(t)$ que satisfaz a equação de Euler-Lagrange e sua derivada em relação ao tempo, são contínuas ao longo do intervalo.

A continuidade em $x(t)$ parece perfeitamente razoável, mas a continuidade de $\dot{x}(t)$ não. Podemos imaginar $\dot{x}(t)$ variando descontinuamente ao longo de t_0, t_f por meio de arcos nos quais vale a equação de Euler, ligados em pontos onde há descontinuidade da $\dot{x}$.

Estes pontos de descontinuidade da $\underline{\underline{\dot{x}}}$ chamam-se quinas do arco extremante.



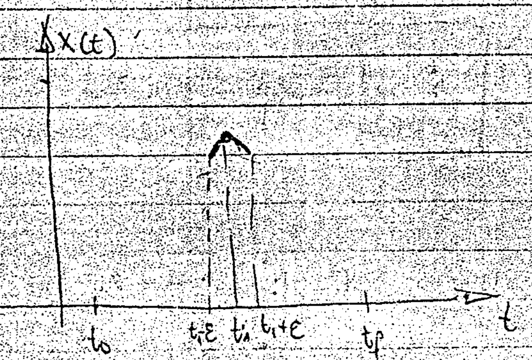
Tomemos as equações já obtidas:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - f\right) = -\frac{\partial f}{\partial t}$$

Estas relações continuam válidas ao longo de $x(t)$.

Imaginemos que a quina ocorra entre t_0 e t_f, no instante $t = t_1$



Tomemos uma vizinhança ε de t_1 e integremos as equações acima entre $t_1-\varepsilon$ e $t_1+\varepsilon$

$$\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial f}{\partial x}\right)dt=0 \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1+\varepsilon}=\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1-\varepsilon}+\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x}dx$$

$$\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon}\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}-f\right)+\frac{\partial f}{\partial t}\right]dt=0 \Rightarrow \left.\left(\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}-f\right)\right|_{t_1+\varepsilon}=\left.\left(\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}-f\right)\right|_{t_1-\varepsilon}-\int_{t_1+\varepsilon}^{t_1+\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial t}dt$$

Admitindo que f e suas derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial t}$ sejam limitadas, embora descontínuas

$$\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x}dx \to 0 \quad \text{para } \varepsilon\to 0$$

$$\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial t}dt \to 0 \quad \text{para } \varepsilon\to 0$$

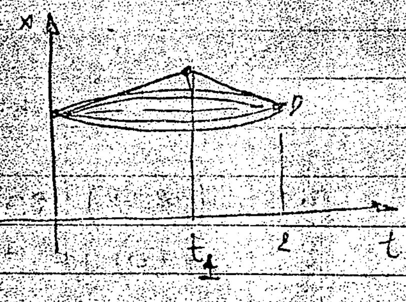
Fazendo $t_1+\varepsilon \to t_1^+$ quando $\varepsilon\to 0$ e $t_1-\varepsilon\to t_1^-$ quando $\varepsilon\to 0$, obtemos as seguintes condições:

$$\boxed{\begin{gathered}\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1^-}=\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1^+}\\ \left.\left(\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}-f\right)\right|_{t_1^-}=\left.\left(\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}-f\right)\right|_{t_1^+}\end{gathered}}$$

As equações acima são chamadas condições de quina de Weierstrass - Erdman e são condições necessárias a serem respeitadas.

Exemplo: Voltemos ao exemplo já desenvolvido

$$\begin{cases} I[x]=\int_0^2(\dot{x}^2-1)^2dt \\ x(0)=x(2)=1\end{cases}$$



$$IP = \int_0^{t_1^-} (\dot{x}^2 - 1)^2 dt + \int_{t_1^+}^{\ell} (\dot{x}^2-1)^2 dt$$

$$CN \begin{cases} \left[\dot{x}\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}} - f\right]_{t_1^-} = \left[\qquad\right]_{t_1^+} & ① \\ \left[\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right]_{t_1^-} = \left[\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right]_{t_1^+} & ② \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[(\dot{x}^2-1)^2\right] = 2(\dot{x}^2-1) \cdot 2\dot{x} = 4\dot{x}(\dot{x}^2-1)$$

① $\left[(\dot{x}^2-1)^2 - 4\dot{x}^2(\dot{x}^2-1)\right]_{t_1^-} = \left[(\dot{x}^2-1)^2 - 4\dot{x}^2(\dot{x}^2-1)\right]_{t_1^+}$

② $\left[4\dot{x}(\dot{x}^2-1)\right]_{t_1^-} = \left[4\dot{x}(\dot{x}^2-1)\right]_{t_1^+}$

① $\dot{x}_-^4 - 2\dot{x}_-^2 + \cancel{1} - 4\dot{x}_-^4 + 4\dot{x}_-^2 = \dot{x}_+^4 - 2\dot{x}_+^2 + \cancel{1} - 4\dot{x}_+^4 + 4\dot{x}_+^2$

$-3\dot{x}_-^4 + 2\dot{x}_-^2 = -3\dot{x}_+^4 + 2\dot{x}_+^2$

$$3(\dot{x}_+^4 - \dot{x}_-^4) - 2(\dot{x}_+^2 - \dot{x}_-^2) = 0 \qquad ①$$

② $4\dot{x}_-^3 - 4\dot{x}_- = 4\dot{x}_+^3 - 4\dot{x}_+$

$$(\dot{x}_+^3 - \dot{x}_-^3) - (\dot{x}_+ - \dot{x}_-) = 0 \qquad ②$$

Chamando $\dot{x}_+ = a \quad ; \quad \dot{x}_- = b$

① $3(a^4-b^4) - 2(a^2-b^2) = 0$

② $(a^3-b^3) - (a-b) = 0$

① $(a^2-b^2)(3a^2+3b^2-2) = 0 \qquad$ I

② $(a-b)(a^2+ab+b^2-1) = 0 \qquad$ II

a. $b = a$ satisfaz I e II $\Rightarrow \dot{x}_+ = \dot{x}_-$, sol. contínua já obtida

b. $b = -a$ satisfaz I

$b^2 + ab + a^2 - 1 = 0$ II $\Rightarrow \cancel{a^2} - \cancel{a^2} + a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1$

$a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \end{cases}$ ou $|\dot{x}_+| = |\dot{x}_-| = 1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{interessa}}$

c. $3b^2 + 3a^2 - 2 = 0$ satisfaz I

$b^2 + ab + a^2 - 1 = 0$ " II

Solução do sistema $a = b = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

ou $\dot{x}_+ = \dot{x}_- = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ solução contínua, não interessa

Só nos interessa o caso b, i.é, $|\dot{x}_+| = |\dot{x}_-| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \quad \begin{cases} 0 \le t < t_1^- \\ t_1^+ < t \le 2 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \text{const} \Rightarrow 4\dot{x}(\dot{x}^2 - 1) = \text{const}$, $\dot{x} = \text{const.}$

Então
$$x = mt + n \qquad 0 \le t < t_1^-$$
$$x = pt + q \qquad t_1^+ < t \le 2$$

$\dot{x}_- = 1 = -\dot{x}_+ \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ p = -1 \end{cases}$

$x(0) = 1 \Rightarrow n = 1$

$x(2) = 1 \Rightarrow q = 3$

$$x = t + 1 \qquad 0 \le t < t_1^-$$
$$x = -t + 3 \qquad t_1^+ < t \le 2$$

Para determinar t_1

$$\left.\begin{aligned} x(t_1) &= t_1 + 1 \\ x(t_1) &= -t_1 + 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow t_1 = 1$$

$$IP = \int_0^1 + \int_1^2$$

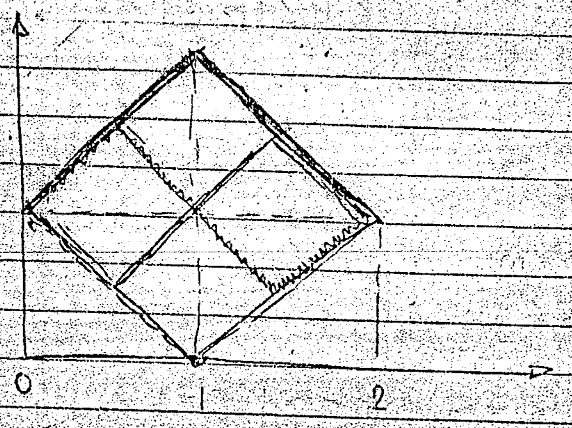
$$\int_0^1 (\dot{x}^2 - 1)\,dt = \int (1-1)^2\,dt = 0$$

$$\int_1^2 (\dot{x}^2 - 1)\,dt = \int (1-1)\,dt = 0$$

$$\boxed{IP = 0}$$

Solução é análoga para $\dot{x}_1 = 1$; $\dot{x}_- = -1$

Solução não é única nesse caso



A VARIAÇÃO SEGUNDA

Retornemos ao nosso problema de minimizar

$$\left[\begin{array}{l} IP = \int_{t_i}^{t_f} f(t,x,\dot{x})\,dt \\ \text{onde} \quad t_i, t_f \quad \text{dados e fixos} \\ \qquad x(t_i), x(t_f) \quad \text{conhecidos} \end{array}\right.$$

Admitamos que $x(t)$ é a solução minimizante e que estamos usando funções fracas de comparação do tipo:

$$x(t,\varepsilon) = x(t) + \varepsilon z(t)$$

Substituindo $x(t,\varepsilon)$ dentro do IP e expandindo em torno de $\varepsilon=0$, resulta

$$\Delta IP = IP(\varepsilon) - IP(0) = \left.\frac{dIP}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \left.\frac{d^2IP}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^3)$$

Impondo a condição de

$$\Delta IP = IP(\varepsilon) - IP(0) \geq 0$$

para variações infinitesimais em torno da solução minimizante em ε, vemos que o termo de 1ª ordem deve se anular

$$\delta IP = \left.\frac{dIP}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon = 0$$

ou seja, $x(t)$ satisfaz a equação de Euler Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Pela condição de ΔIP acima, $x(t)$ só será minimizante se o termo de 2ª ordem em ε for positivo semidefinido

(65)

Isto significa que

$$\left.\frac{d^2 IP}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon^2}{2} = \delta^2 IP \geq 0$$

deve ser satisfeita para todas as variações $\delta x(t)$ se $x(t)$ é solução minimizante. Se a relação acima é satisfeita sem o sinal de igualdade, a solução extremante da equação de Euler-Lagrange $x(t)$, acarretará um mínimo fraco para IP.

$$\delta^2 IP = \left.\frac{d^2 IP}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon$$ é a variação segunda de IP.

Consideremos agora

$$IP(\varepsilon) = \int_{t_i}^{t_f} f[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)]\, dt$$

$$\frac{dIP}{d\varepsilon} = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)] \left.\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)] \frac{\partial \dot{x}}{\partial \varepsilon} \right\} dt$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dIP}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right\} dt$$

Derivando uma segunda vez e avaliando em $\varepsilon = 0$, chega-se a

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2 IP}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)]\, \delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \dot{x}}[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)]\, \delta x \delta \dot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)]\, \delta \dot{x}^2 \right\} dt$$

e usando

$$f_{xx}(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[\quad]$$

$$f_{x\dot{x}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \dot{x}}[\quad]$$

$$f_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}}[\quad]$$

66

1

$$\omega(t,\delta x,\delta \dot{x}) = \frac{1}{2}\left[f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta \dot{x}^2 + 2 f_{x\dot{x}}\,\delta x\,\delta \dot{x} + f_{xx}\,\delta x^2\right]$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega}{\partial \delta \dot{x}} - \frac{\partial \omega}{\partial \delta x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \delta x} = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\cancel{2} f_{x\dot{x}}\,\delta \dot{x} + \cancel{2} f_{xx}\,\delta x\right]$$

$$= f_{x\dot{x}}\,\delta \dot{x} + f_{xx}\,\delta x$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \delta \dot{x}} = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\cancel{2} f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta \dot{x} + \cancel{2} f_{x\dot{x}}\,\delta x\right]$$

$$= f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta \dot{x} + f_{x\dot{x}}\,\delta x$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega}{\partial \delta \dot{x}} = \frac{d}{dt}\left[f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta \dot{x}\right] + \frac{d}{dt}\left[f_{x\dot{x}}\,\delta x\right]$$

$$= \cancel{\delta \dot{x}\frac{d}{dt} f_{x\dot{x}} +}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta \dot{x}\right] + \cancel{\frac{d}{dt}}\,\delta x\,\frac{d}{dt}\left[f_{x\dot{x}}\right] + \delta \dot{x}\, f_{x\dot{x}}$$

Em (1):

$$\frac{d}{dt}\left[f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta \dot{x}\right] + \delta x\,\frac{d}{dt} f_{x\dot{x}} + \cancel{\delta \dot{x}\, f_{x\dot{x}}} - \cancel{f_{x\dot{x}}\,\delta \dot{x}} - f_{xx}\,\delta x = 0$$

(3)

$$\delta x \frac{d}{dt}(f_{\dot x x}\delta\dot v) - \delta v \frac{d}{dt}(f_{\dot x \dot x}\delta\dot v) =$$

$$\frac{d}{dt}\left[f_{\dot x x}(\delta x\delta\dot v - \delta v\delta\dot x)\right] =$$

$$\left[\frac{d}{dt}f_{\dot x x}\right](\delta x\delta\dot v - \delta v\delta\dot x) + f_{\dot x x}\frac{d}{dt}(\delta x\delta\dot v - \delta v\delta\dot x) =$$

$$\left[\frac{d}{dt}f_{\dot x x}\right](\delta x\delta\dot v - \delta v\delta\dot x) + \cancel{f_{\dot x x}\delta\dot x\delta\dot v} + f_{\dot x x}\delta x\frac{d}{dt}\delta\dot v -$$

$$- \cancel{f_{\dot x x}\delta\dot x\delta\dot v} - f_{\dot x x}\delta v\frac{d}{dt}\delta\dot x$$

$$\left[\frac{d}{dt}f_{\dot x x}\right](\delta x\delta\dot v - \delta v\delta\dot x) + f_{\dot x x}\delta x\frac{d}{dt}\delta\dot v - f_{\dot x x}\delta v\frac{d}{dt}\delta\dot x$$

$$\delta x\left[\frac{d}{dt}f_{\dot x x}\right]\delta\dot v + \delta x f_{\dot x x}\frac{d}{dt}\delta\dot v - \left[\left[\frac{d}{dt}f_{\dot x x}\right]\delta\dot x + \delta v f_{\dot x x}\delta\dot x\right]$$

$$= \delta x\frac{d}{dt}(f_{\dot x x}\delta\dot v) - \delta v\frac{d}{dt}(f_{\dot x x}\delta\dot v)$$

(2)

$$\frac{d}{dt}\left[f_{\dot x x}\delta\dot x\right] + \delta x\frac{d}{dt}f_{x\dot x} - f_{xx}\delta x = 0$$

?

$$\frac{d}{dt}\left[f_{\dot x x}\delta\dot v\right] + \frac{d}{dt}f_{x\dot x}\delta v - f_{xx}\delta v = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[f_{\dot x x}\delta\dot v\right] - \left[f_{xx} - \frac{d}{dt}f_{x\dot x}\right]\delta v = 0}$$

(67)

52B

(68)

$$\delta^2 IP = \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} \left[f_{\dot{x}\dot{x}}(t)\,\delta\dot{x}^2 + 2 f_{x\dot{x}}(t)\,\delta x\,\delta\dot{x} + f_{xx}(t)\,\delta x^2 \right] dt$$

Note que $f_{\dot{x}\dot{x}}$, $f_{x\dot{x}}$ e f_{xx} são funções explícitas do tempo pois são avaliadas ao longo da trajetória $x(t)$ que satisfaz a eq. Euler-Lagrange. Além disso, todas as variações admissíveis $\delta x(t)$ devem satisfazer $\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0$ pois as extremidades são fixas.

Podemos também integrar por partes

$$\int_{t_i}^{t_f} f_{\dot{x}\dot{x}}(t)\,\delta\dot{x}^2\,dt = \Big[\underbrace{f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta\dot{x}\,\delta x}_{0}\Big]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \delta x \frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta\dot{x}\right) dt$$

$$\int_{t_i}^{t_f} f_{x\dot{x}}(t)\,2\delta\dot{x}\,\delta x\,dt = \Big[\cancel{f_{x\dot{x}}\,\delta x^2}^{\,0}\Big]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \delta x^2 \frac{d}{dt} f_{x\dot{x}}\,dt$$

e chegamos a: $\frac{d}{dt}\delta x^2 = 2\delta x \frac{d}{dt}\delta x = 2\delta x\,\delta\dot{x}$

$$\delta^2 IP = -\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} \delta x \left[\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta\dot{x}\right) - \left(f_{xx} - \frac{d}{dt} f_{x\dot{x}}\right)\delta x \right] dt$$

Temos, então, para representar a segunda variação

$$\delta^2 IP = \int_{t_i}^{t_f} \omega(t, \delta x, \delta\dot{x})\,dt$$

com $\omega(t,\delta x,\delta\dot{x}) = \frac{1}{2}\left[f_{\dot{x}\dot{x}}(t)\,\delta\dot{x}^2 + 2 f_{x\dot{x}}\,\delta x\,\delta\dot{x} + f_{xx}(t)\,\delta x^2 \right]$

Logo, temos que as variações que minimizam $\delta^2 IP$ satisfazem uma equação do tipo Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\delta\dot{x}}\right) - \frac{\partial\omega}{\partial\delta x} = 0 \quad (*)$$

Problema de determinar o mínimo de $\delta^2 IP$ é chamado "Problema do Mínimo Acessório" e a equação (*), de Euler, é chamada "Equação Diferencial de Jacobi"

69

Chamemos uma solução da equação (*) $\delta v(t)$. Substituindo w na equação (+)

$$\frac{\partial w}{\partial \delta x} = \frac{1}{\cancel{2}}\, \cancel{2} f_{xx}\,\delta x = f_{xx}\,\delta x + f_{x\dot{x}}\,\delta\dot{x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \delta\dot{x}} = \frac{1}{\cancel{2}}\left[f_{\dot{x}\dot{x}}\,\cancel{2}\delta\dot{x} + \cancel{2} f_{x\dot{x}}\,\delta x\right] = f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta\dot{x} + f_{x\dot{x}}\,\delta x$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial \delta\dot{x}} = \frac{d}{dt}\left[f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta\dot{x} + f_{x\dot{x}}\,\delta x\right] = \frac{d}{dt}\left[f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta\dot{x}\right] + \frac{d}{dt} f_{x\dot{x}}\,\delta x$$

Como $\delta v(t)$ satisfaz (*) podemos substituir δx por δv e $\delta\dot{x}$ por $\delta\dot{v}$

$$\frac{d}{dt}\left[f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta\dot{v}\right] + \frac{d}{dt}\left[f_{x\dot{x}}\,\delta x\right] - f_{xx}\,\delta v = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[f_{\dot{x}\dot{x}}(t)\,\delta\dot{v}\right] - \left[f_{xx}(t) - \frac{d}{dt} f_{x\dot{x}}(t)\right]\delta v = 0$$

Tomando $\delta^2 IP = -\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} \delta x\left[\frac{d}{dt}(f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta\dot{x}) - \left(f_{xx} - \frac{d}{dt} f_{x\dot{x}}\right)\delta x\right]dt$

multiplicando ~~por~~ e dividindo por $\delta v(t)$ e observando que

$$\left[f_{xx} - \frac{d}{dt} f_{x\dot{x}}\right]\delta v = \frac{d}{dt}\left[f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta\dot{v}\right]$$

$$\delta^2 IP = \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} \frac{\delta x}{\delta v}\left[\delta x\,\frac{d}{dt}(f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta\dot{v}) - \delta v\,\frac{d}{dt}(f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta\dot{x})\right]dt$$

(?) $$\delta x\,\frac{d}{dt}(f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta\dot{v}) - \delta v\,\frac{d}{dt}(f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta\dot{x}) = \frac{d}{dt}\left[f_{\dot{x}\dot{x}}(\delta x\,\delta\dot{v} - \delta v\,\delta\dot{x})\right]$$

$$\delta^2 IP = \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} \frac{\delta x}{\delta v}\,\frac{d}{dt}\left[f_{\dot{x}\dot{x}}(\delta x\,\delta\dot{v} - \delta v\,\delta\dot{x})\right]dt$$

Integrando por partes

$$\delta^2 IP = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta x^2\,\delta\dot{v}}{\delta v} - \delta x\,\delta\dot{x}\right) f_{\dot{x}\dot{x}}\Big|_{t_i}^{t_f} - \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} f_{\dot{x}\dot{x}}\left[\delta x\,\delta\dot{v} - \delta v\,\delta\dot{x}\right]\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta x}{\delta v}\right)dt$$

Como $\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0$

$$\boxed{\delta^2 IP = \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} f_{\dot{x}\dot{x}}\left[\delta\dot{x} - \frac{\delta x\,\delta\dot{v}}{\delta v}\right]^2 dt}$$

Como queremos $\delta^2 IP > 0$ para $\delta x(t) \neq 0$, vemos que isto ocorre sempre que

$$\boxed{f_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0}$$

desde que o termo entre colchetes não se anule para qualquer variação admissível. Um exame desse termo revela que ele não se pode anular ao longo do intervalo $t_i - t_f$ se $\delta x(t)$ não é igual a $\delta v(t)$, isto é, a variação admissível $\delta x(t)$ $(\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0)$ deve ser tal que $\delta x(t) \neq \delta v(t)$.

Examinemos agora a variação $\delta v(t)$, solução não trivial da equação

$$\frac{d}{dt}[f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta \dot{v}] - \left[f_{xx} - \frac{d}{dt} f_{x\dot{x}}\right]\delta v = 0$$

Esta é uma equação diferencial linear de 2ª ordem em δv. Imaginemos $\delta v_1(t)$ e $\delta v_2(t)$ serem as duas soluções linearmente independentes. Então

$$\delta v(t) = A\,\delta v_1(t) + B\,\delta v_2(t)$$

Como existem duas constantes arbitrárias, a variação δv pode ser anulada no instante t_i, escolhendo A e B de forma que:

$$0 = A\,\delta v_1(t_i) + B\,\delta v_2(t_i)$$

Como as variações δx_f devem se anular em t_i e t_f, a questão de onde $\delta x(t)$ pode ser igual a $\delta v(t)$, anulando o termo entre parênteses, depende de onde o zero seguinte de $\delta v(t)$ depois de t_i está dentro ou fora do intervalo $t_i \leq t \leq t_f$.

Definição de Ponto Conjugado

Um ponto t_1 é dito ser conjugado ao ponto inicial t_i se existe uma solução não trivial $\delta v(t)$ da equação acessória que se anula em t_i e novamente em t_1.

Se o 1º ponto conjugado ocorre após t_f, a relação final para $\delta^2 IP \geq 0$ é satisfeita já que $\delta v(t)$ não se anula outra vez antes de t_f, enquanto $\delta x(t)$ deve se anular em t_f.

Conclui-se então que se o primeiro ponto conjugado ocorre em $t_1 > t_f$, então $\delta^2 IP > 0$ e a solução extremal ~~acontecerá~~ mínimo fraco ~~do~~ IP.

Por outro lado, se o 1º ponto conjugado ocorre dentro do intervalo $t_i - t_f$, isto é, $t_1 < t_f$, então a equação em $\delta^2 IP$ não é válida já que partimos de $\delta v(t) \neq 0$ para poder dividir a equação anterior por δv.

Para este último caso existe o seguinte teorema.

CONDIÇÃO DE PONTO CONJUGADO DE JACOBI

Seja $x^*(t)$ a função que minimiza o nosso IP. Então usando $x^*(t)$ no problema acessório, não existe ponto conjugado a t_i no intervalo $t_i < t < t_f$.

Esta condição funciona como um teste, i.e, obtida uma "solução" $x^*(t)$ devemos verificar se $x^*(t)$ satisfaz o nosso problema acessório para garantir a condição suficiente de mínimo fraco.

Este desenvolvimento mostra a dificuldade de se estabelecer condições de suficiência para o tipo de problema em que estamos interessados, já que tudo isto é referente ao problema mais simples do cálculo variacional que é a minimização de uma integral definida, com extremidades fixas e sem nenhum outro vínculo.

(72)

Exemplo: Consideremos o problema de minimizar

$$IP = \int_0^1 (\dot{x}^2 - a^2x^2)\,dt$$

$$\begin{cases} x(0) = x(1) = 0 \\ a^2 \text{ conhecido} \end{cases}$$

$$f(x,\dot{x},t) = \dot{x}^2 - a^2x^2 = f(x,\dot{x})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 2\ddot{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2a^2x$$

Eq. Euler-Lagrange $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$

$$2\ddot{x} - (-2a^2x) = 0$$

$$\ddot{x} + a^2x = 0 \qquad (1)$$

Solução de (1)

$$x(t) = A \operatorname{sen} at + B \cos at$$

Impondo as condições de contorno:

$$x(0) = A \operatorname{sen} 0 + B \cos 0 = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$x(1) = A \operatorname{sen} a = 0$$

Para a 2ª condição temos

$A = 0$ ou

$\operatorname{sen} a = 0 \Rightarrow a = n\pi t \quad , n = 1, 2, \ldots$

Então se $a = n\pi \Rightarrow x = A \operatorname{sen} n\pi t$

$a \neq n\pi \Rightarrow x = 0$ pois $A = 0$

73

Substituindo $x(t)$ em IP

$x(t) = 0 \Rightarrow IP = \int_0^1 0\, dt = 0$

$x(t) = A\,\text{sen}\, n\pi t$; $\dot{x}(t) = n\pi A \overset{\text{SEN}\, n\pi t}{\text{sen}\, t}$, $a = n\pi$

$$IP = \int_0^1 (n^2\pi^2 A^2 \text{sen}^2 n\pi t - n^2\pi^2 A^2 \text{sen}^2 n\pi t)\, dt$$

$$IP = \int 0\, dt = 0$$

As duas soluções nos fornecem $IP^* = 0$ independente de a.

Consideremos agora a função $x(t) = t(1-t)$

Então $x = (1-t)\cdot t$; $\dot{x}(t) = 1 - 2t$ e substituindo em

$IP = \int_0^1 (\dot{x}^2 - a^2x^2)\, dt$ $\quad IP = \int_0^1 (\dot{x}^2 - a^2x^2)\, dt$

$$IP = \int_0^1 \left[(1-2t)^2 - a^2t^2(1-t)^2\right] dt$$

$$IP = \int_0^1 \left[1 - 2t + 4t^2 - a^2t^2(1 - 2t + t^2)\right] dt$$

$$IP = \int_0^1 \left[1 - 2t + 4t^2 - a^2t^2 + 2a^2t^3 - a^2t^4\right] dt$$

$$IP = \int_0^1 \left[1 - 2t + (4-a^2)t^2 + 2a^2t^3 - a^2t^4\right] dt$$

$$IP = \cancel{\int_0^1} \left[t - t^2 + \frac{(4-a^2)}{3}t^3 + \frac{a^2t^4}{2} - \frac{\cancel{t}a^2t^5}{5}\right]_0^1$$

$$IP = \left[\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{(4-a^2)}{3} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{5}\right]_0^1$$

$$IP = \frac{40 - 10a^2 + 20a^2 - 6a^2}{30}$$

$$IP = \frac{40 - 4a^2}{30}$$

$$IP = \frac{4(10 - a^2)}{30}$$

Note que $x(t) = t(1-t)$ satisfaz às condições de contorno e que para $a^2 > 10$, o IP se torna negativo e e portanto, menor que $IP = 0$, obtido anteriormente.

Para verificar qual a solução correta deste problema devemos examinar a variação segunda.

Como já vimos

$$\delta^2 IP = \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f}\left[f_{\dot{x}\dot{x}}\,\delta\dot{x}^2 + 2 f_{x\dot{x}}\,\delta x\,\delta\dot{x} + f_{xx}\,\delta x^2\right]dt$$

$$f_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\dot{x}^2 - a^2x^2\right)\right] = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[2\dot{x}\right] = 2$$

$$f_{x\dot{x}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[2\dot{x}\right] = 0$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-2a^2x\right] = -2a^2$$

$$\delta^2 IP = \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^1\left[\cancel{2}\delta\dot{x}^2 + 0 - \cancel{2}a^2\delta x^2\right]dt$$

$$\delta^2 IP = \int_0^1\left(\delta\dot{x}^2 - a^2\delta x^2\right)dt$$

Equação acessória $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \omega}{\partial \delta\dot{x}} - \frac{\partial \omega}{\partial \delta x} = 0$

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta x + a^2\delta x = 0$$

Solução geral

$$\delta x(t) = C\,\mathrm{sen}\,at + D\cos at$$

Para verificar se existe ponto conjugado a $t_i = 0$, no intervalo $0 < t < 1$, impomos que $\delta x(t_i) = \delta x(0) = 0$

$$\delta x_{(0)} = C\,\mathrm{sen}\,0 + D\cos 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

Com isso

$$\delta x(t) = C \operatorname{sen} at$$

Lembrando: t_i é ponto conjugado de t_i se existe uma solução não trivial da equação acessória que se anula em t_i e, em seguida, em t_1.

Da solução acima, $\delta x(t)$ se anula novamente em $\operatorname{sen} at_1 = 0 \Rightarrow at_1 = \pi$

$$t_1 = \pi/a$$

Como o intervalo de interesse é $[0,1]$

Então:

- se $a < \pi$, não existe ponto conjugado e as soluções encontradas são soluções minimizantes, isto é:

$x(t) = 0 \qquad a \neq n\pi$

$x(t) = A \operatorname{sen} n\pi t \qquad n = 1, 2, 3 \qquad (a = n\pi, a < \pi)$

- se $a > \pi$, existe ponto conjugado e as soluções encontradas não são minimizantes, isto é:

$x(t) = A \operatorname{sen} n\pi t \qquad n > 3$

$x(t) = t(1-t)$

não são soluções.

EXTENSÃO PARA O CASO DE n VARIÁVEIS

Vamos agora estender o estudo de minimização para o caso do IP como funcional de n variáveis.

O problema agora é então o de minimizar:

$$IP = \int_{t_i}^{t_f} f[t, x_1(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)]\, dt$$

onde $\left.\begin{matrix} t_i, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0} \\ t_f, x_{1f}, x_{2f}, \ldots, x_{nf} \end{matrix}\right\}$ são dados

O procedimento é idêntico ao caso de uma variável. Tomemos funções de comparação

$$x_1(t,\varepsilon), \; x_2(t,\varepsilon), \ldots, x_n(t,\varepsilon)$$

que satisfaçam as condições dadas, isto é, satisfazem $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ e $x_{1f}, x_{2f}, \ldots, x_{nf}$.

Consideremos variações fracas em torno da função minimizante, por exemplo:

$$x_1(t,\varepsilon) = x_1(t) + \varepsilon z_1(t)$$
$$x_2(t,\varepsilon) = x_2(t) + \varepsilon z_2(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n(t,\varepsilon) = x_n(t) + \varepsilon z_n(t)$$

Notamos que dessa forma

$$\delta x_1(t_i) = \delta x_1(t_f) = 0$$
$$\delta x_2(t_i) = \delta x_2(t_f) = 0$$
$$\delta x_n(t_i) = \delta x_n(t_f) = 0$$

Substituímos as $x_i(t,\varepsilon)$ em IP e consideremos a expansão de $IP(\varepsilon)$ em torno de $\varepsilon = 0$:

$$IP(\varepsilon) = IP(0) + \left.\frac{dIP}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2)$$

A condição necessária para mínimo é

$$\delta IP = 0$$

Sendo t_i e t_f fixos, temos

$$\delta IP = \int_{t_i}^{t_f} \delta f \, dt$$

$$\delta IP = 0 = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_1} \delta \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_n} \delta \dot{x}_n \right] dt$$

Trocando a derivada em relação ao tempo com a variação, isto é,

$$\delta \dot{x}_k = \frac{d}{dt} \delta x_k$$

e integrando por partes

$$\delta IP = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 \Big|_{t_i}^{t_f} \xrightarrow{} 0 + \dots + \cancel{\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_n} \delta x_n \Big|_{t_i}^{t_f}} \to 0 - \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \right] \delta x_1 \, dt +$$

$$- \int_{t_i}^{t_f} \delta x_2 \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] dt - \dots - \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_n} - \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \delta x_n \, dt$$

Lembrando que cada x_k deve ser variado independentemente, a única forma de anular as integrais é fazendo:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_n} - \frac{\partial f}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned}}$$

n variáveis $\Rightarrow$

n equações

Condições de Quina

∴ Para estender o caso para n variáveis, multipliquemos a j-ésima eq. de Euler por $\dot{x}_j$ e rearranjemos para obter:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_j \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_j}\dot{x}_j - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_j}\ddot{x}_j = 0$$

Fazendo a mesma coisa para as outras equações e somando

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i\right) = 0$$

Mas

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i\right)$$

e substituindo

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} - f\right) = -\frac{\partial f}{\partial t}$$

Supondo t_1 ponto em que existe a quina, integrando as equações de Euler-Lagrange e a equação acima entre $t_1-\varepsilon$ e $t_1+\varepsilon$, e admitindo que $\frac{\partial f}{\partial t}$ e $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ são finitas em t_1, chegamos a

C.Q.W.E.

$$\boxed{\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_1}\right|_{t_1^+} = \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_1}\right|_{t_1^-} \\ \vdots \\ \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_n}\right|_{t_1^+} = \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_n}\right|_{t_1^-} \end{array}\right\} n \text{ equações} \quad (1) \\ \text{e} \\ \left.\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} - f\right)\right|_{t_1^+} = \left.\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} - f\right)\right|_{t_1^-} \quad (2) \end{array}}$$

1 equação

(1) e (2) fornecem n+1 condições a serem satisfeitas em qualquer quina do arco extremante.

Exemplo: $IP = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} + x_1 x_2 \right) dt$ já resolvido em [illegible]

com $x_1(0) = x_{10}$ $\quad x_1(1) = 0$

$x_2(0) = x_{20}$ $\quad x_2(1) = 0$

C. Quina: $\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t_1^-} = \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t_1^+}$

$\dot{x}_1(t_1^+) = \dot{x}_1(t_1^-)$
$\dot{x}_2(t_1^+) = \dot{x}_1(t_1^-)$ não há quina

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0$$

$i = 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2$; $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_1} = \dot{x}_1$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}\right) = \ddot{x}_1$

$$\ddot{x}_1 - x_2 = 0 \quad (1)$$

$i = 2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$; $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_2} = \dot{x}_2$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_2}\right) = \ddot{x}_2$

$$\ddot{x}_2 - x_1 = 0 \quad (2)$$

Eqs. $\begin{cases} \ddot{x}_1 - x_2 = 0 & (1) \\ \ddot{x}_2 - x_1 = 0 & (2) \end{cases}$

Diferenciando (1) duas vezes: $\ddddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \ddddot{x}_1 - x_1 = 0$

$\ddddot{x}_1 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = A\,\text{senh}\,t + B\cosh t + C\,\text{sen}\,t + D\cos t$

$x_2 = \ddot{x}_1 \Rightarrow x_2 = A\,\text{senh}\,t + B\cosh t - C\,\text{sen}\,t - D\cos t$

Impondo as condições de contorno

$x_1(0) = x_{10} \Rightarrow A\,\text{senh}\,0 + B\cosh 0 + C\,\text{sen}\,0 + D\cos 0 = A.0 + B.1 + C.0 + D.1$

$B + D = x_{10}$

$x_2(0) = x_{20} \Rightarrow A\,\text{senh}\,0 + B\cosh 0 - C\,\text{sen}\,0 - D\cos 0 = A.0 + B.1 - C.0 - D.1$

$B - D = x_{20}$

$$\left[\, B = \frac{x_{10} + x_{20}}{2} \qquad \left[\, D = \frac{x_{10} - x_{20}}{2}\right.\right.$$

$x_{1f} = x_1(1) = 0 \Rightarrow A\,senh\,1 + B\cosh 1 + C\cos 1 + D\,sen\,1 = 0$

$x_{2f} = x_2(1) = 0 \Rightarrow A\,senh\,1 + B\cosh 1 - C\cos 1 - D\,sen\,1 = 0$

Somando $\quad 2A\,senh\,1 = -2B\cosh 1$

$$\boxed{A = -B\,cotgh\,1}$$

Subtraindo $\quad 2C\cos 1 = -2D\,sen\,1$

$$\boxed{C = -D\,cotg\,1}$$

EXISTÊNCIA DE VÍNCULOS DINÂMICOS

Até agora existia liberdade de se escolher as ~~variáveis~~ funções $x_i(t)$ do sistema de modo a se minimizar o I.P. Este tipo de problema aqui descrito é de aplicação restrita. Um caso muito comum em Engenharia é aquele em que existem vínculos dinâmicos que ditam a evolução do sistema.

O problema nessa nova forma pode ser colocado na seguinte ~~forma~~ maneira:

Seja minimizar

$$IP = \int_{t_i}^{t_f} f(x, \dot{x}, t)\, dt$$

com extremidades fixas, isto é:

t_i, $x(t_i)$ dados

t_f, $x(t_f)$ dados.

onde x designa um vetor de $\underline{n}$ variáveis, isto é:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Sujeito aos vínculos: (dinâmicos)

$$\begin{cases} \varphi_1(x,\dot{x},t) = 0 \\ \varphi_2(x,\dot{x},t) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x,\dot{x},t) = 0 \end{cases} \qquad t_i \leq t \leq t_f$$

onde $m < n$, isto é, o número de vínculos é menor que o nº de variáveis. Caso contrário, ou seja, $m = n$, dadas as condições nos extremos t_i e t_f, o problema se resumiria em resolver o sistema de equações diferenciais $\varphi_i(x,\dot{x},t) = 0$.

Para tratar este problema, tomemos $x(t,\varepsilon)$ satisfazendo as condições de mínimo fraco.

Suponhamos $x(t,0) \equiv x(t) = x^*(t)$ seja a solução.

Substituímos $x(t,\varepsilon)$ em IP e em φ. Obtemos:

$$IP(\varepsilon) = \int_{t_i}^{t_f} f[x(t,\varepsilon); \dot{x}(t,\varepsilon), t]\, dt$$

sujeito a $\varphi_i[x(t,\varepsilon); \dot{x}(t,\varepsilon), t] = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$

Designemos $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_m \end{bmatrix}$ e tomemos um vetor de multiplicadores de Lagrange $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_m \end{bmatrix}$

Montemos:

$$\widetilde{IP}(\varepsilon) = \int_{t_i}^{t_f} \{ f[x(t,\varepsilon); \dot{x}(t,\varepsilon), t] + \lambda^T \varphi[x(t,\varepsilon); \dot{x}(t,\varepsilon), t] \}\, dt$$

$$F[x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon), \lambda(t), t] = f[x(t,\varepsilon); \dot{x}(t,\varepsilon), t] + \lambda^T(t)\, \varphi[x(t,\varepsilon); \dot{x}(t,\varepsilon), t]$$

Com $\widetilde{IP}(\varepsilon) = \int_{t_i}^{t_f} F[x(t,\varepsilon); \dot{x}(t,\varepsilon); \lambda(t), t]\, dt$

Note que a introdução dos multiplicadores $\lambda(t)$ nos permite tratar o problema como um problema sem vínculos. Note também que definimos $\lambda(t)$ e não $\lambda(t,\varepsilon)$.

extremal

A condição necessária para se ter um extremal (extremal satisfaz a condição necessária, extremante satisfaz condição necessária e condição suficiente), é que:

$$\delta \tilde{IP}(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\delta \tilde{IP}(\varepsilon) = \delta \int_{t_i}^{t_f} F[x,\dot{x},\lambda,t]\, dt$$

Como os extremos são fixos.

$$\delta \tilde{IP}(\varepsilon) = \int_{t_i}^{t_f} \delta F[x,\dot{x},\lambda,t]\, dt$$

$$\delta F[x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon), \lambda(t), t] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\Big|_{\varepsilon=0} \delta x_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{\varepsilon=0} \delta \dot{x}_i \right]$$

Lembrando que $\delta \dot{x}_i = \dfrac{d}{dt}(\delta x_i)$:

$$\delta \tilde{IP}(\varepsilon) = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt}(\delta x_i) \right] \right\} dt$$

Integrando por partes o segundo termo da integral:

$$\delta \tilde{IP}(\varepsilon) = \underbrace{\cancel{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right]_{t_i}^{t_f}}}_{0} + \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) \delta x_i \right] \right\} dt$$

$$\delta \tilde{IP}(\varepsilon) = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) \right] \delta x_i \right\} dt$$

Observemos que apenas $(n-m)$ dos δx_i são arbitrários, impomos a condição que $\lambda(t)$ seja tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

e $\delta \tilde{IP}(\varepsilon)$ se reduz a

$$\delta \tilde{IP}(\varepsilon) = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \sum_{m+1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) \right] \delta x_i \right\} dt = 0$$

onde agora os $(n-m)$ δx_i restantes são arbitrários. Portanto para que $\delta \tilde{IP}(\varepsilon) = 0$ é necessário que:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \qquad j = m+1, \ldots, n$$

No entanto, os vínculos dinâmicos impõe que:

$$\phi_j(x, \dot{x}, t) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

Obtemos assim $(n+m)$ condições que permitem determinar:

$$\left.\begin{array}{ll} x_i(t) & j = 1, 2, \ldots, n \\ \lambda_j(t) & j = 1, 2, \ldots, m \end{array}\right\} \quad t_i \leq t \leq t_f$$

Condições de Quina

Desde que a forma das equações acima, Euler-Lagrange, são é a mesma obtida anteriormente, as condições de quina também mantem a mesma forma.

Assim, se puder existir uma quina em $t = t_1$, as condições a serem satisfeitas são

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t_1(\varepsilon)} = \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t_1}$$

(n condições)

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n}\right|_{t_1^+} = \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n}\right|_{t_1^-}$$

e

$$\left.\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} - F\right)\right|_{t_1^+} = \left.\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} - F\right)\right|_{t_1^-}$$

Exemplo: $IP = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} + x_1 x_2 \right) dt$

com $x_1(0) = x_{10}$ $\quad x_1(1) = 0$

$x_2(0) = x_{20}$ $\quad x_2(1) = 0$

sujeito ao vínculo

$$\varphi = \dot{x}_2 - x_1 = 0$$

$$F = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} + x_1 x_2 + \lambda(\dot{x}_2 - x_1)$$

1. $\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 - \lambda$, $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = \dot{x}_1$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right) = \ddot{x}_1$

$$\ddot{x}_1 = x_2 - \lambda \quad (1)$$

2. $\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1$; $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} = \dot{x}_2 + \lambda$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right) = \ddot{x}_2 + \dot{\lambda}$

$$\ddot{x}_2 + \dot{\lambda} = x_1 \quad (2)$$

Sistema de equações

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \lambda - x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \dot{\lambda} - x_1 = 0 \\ \dot{x}_2 - x_1 = 0 \quad \leftarrow \text{vínculo} \end{cases}$$

85

De (1) $\rightarrow$ $\lambda = x_2 - \ddot{x}_1$

Em (2) $\ddot{x}_2 - x_1 + \dot{x}_2 - \dddot{x}_1 = 0$

$$\dot{x}_2 = x_1$$
$$\ddot{x}_2 = \dot{x}_1$$
$$\dot{x}_1 - \cancel{x_1} + \cancel{x_1} - \dddot{x}_1 = 0$$
$$\boxed{\dddot{x}_1 - \dot{x}_1 = 0}$$

Solução: $x_1(t) = C_1 \operatorname{senh} t + C_2 \cosh t + C_3$

$$x_2(t) = \int x_1(t)\, dt$$

$$x_2(t) = C_1 \cosh t + C_2 \operatorname{senh} t + C_3 t + C_4$$

Problema: Verificar se há possibilidades de quinas no problema original.

Cap. 3 Formulação do Problema de Controle

Até aqui desenvolvemos as ferramentas necessárias do Cálculo Diferencial e do Cálculo Variacional que nos permitem tratar uma série de problemas de Engenharia. No entanto, para tornarmos mais abrangente o nosso enfoque, antes de entrar no problema de controle propriamente dito, tratemos de ampliar o alcance dos problemas de Cálculo Variacional.

Sob o ponto de vista do Cálculo Variacional já ~~desen~~ volvemos todas as dificuldades com relação à função do integrando do Índice de Performance.

Sabemos tratar um índice de performance que é um funcional aplicado sobre funções de n variáveis $x_i(t)$, dependentes ou não das derivadas primeiras das funções $x_i(t)$ com relação ao tempo, ~~e~~ vinculadas ou não por ~~funcionais~~ vínculos diferenciais (equações diferenciais).

A dificuldade que não levantamos ainda e que é bem mais complicada que as anteriores se refere ao problema de fronteiras móveis.

3.1. O Problema de Fronteiras Móveis

O problema até agora tratado se refere ~~ao~~ minimizar

Comentar

$$IP = \int_{t_i}^{t_f} f(x_1, x_2, \dots, x_n; \dot{x}_1; \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, t)\, dt$$

na condição de $t_i, x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_n(t_i)$
$t_f, x_1(t_f), x_2(t_f), \dots, x_n(t_f)$
dadas e fixos.

Podemos imaginar um processo em que o ponto terminal (final) não é determinado, ~~alcançando-se um tempo especificado no qual as variáveis têm valores especificados~~, mas, ao contrário, o ponto terminal só é alcançado quando algumas relações entre as variáveis são satisfeitas. Além disso, pode-se supor que o Índice de Performance contenha uma relação entre os estados inicial e final do sistema, isto é, IP é da forma:

$$IP = g[t_i, x_1(t_i), \dots, x_n(t_i); t_f; x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)] +$$
$$+ \int_{t_i}^{t_f} f(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t)\, dt$$

Existem três casos:

a) Minimizar $IP = g + \int f dt$ sujeito a vínculos dinâmicos e condições terminais é chamado um PROBLEMA DE BOLZA.

b) Minimizar $IP = \int f dt$ $(g = 0)$ sujeito a vínculos dinâmicos e condições terminais é dito um PROBLEMA DE LAGRANGE.

c) Minimizar $IP = g$ $(f = 0)$ sujeito a vínculos dinâmicos e condições terminais é dito um PROBLEMA DE MAYER.

Note que quando existem relações a serem satisfeitas nas extremidades inicial e final do problema, problema de Bolza ou de Mayer, as fronteiras são móveis, o que não acontece no tipo de problema até aqui tratado, o problema de Lagrange, onde as fronteiras são fixas.

Bolza e Mayer são equivalentes

3.2. Condições Necessárias

Admitiremos que o nosso sistema seja composto apenas por duas variáveis $x_1(t)$ e $x_2(t)$. A extensão para n variáveis surgirá naturalmente após o desenvolvimento para 2 variáveis.

Admite-se que o índice de performance tem a forma:

$$\boxed{IP = g[t_i, x_1(t_i), x_2(t_i); t_f; x_1(t_f), x_2(t_f)] + \int_{t_i}^{t_f} f[t, x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)]\, dt}$$

onde g e f são escolhidas de modo a satisfazer as necessidades do sistema.

Embora os tempos e estados iniciais e finais do processo não estejam especificados, é sabido que certas relações entre os pontos extremos devem ser estabelecidas. As relações são:

$$\boxed{\psi_j\,[t_i\,;\,x_1(t_i),\,x_2(t_i),\,t_f\,;\,x_1(t_f),\,x_2(t_f)] = 0} \qquad j = 1, 2, \ldots, p \leq 6$$

No caso $p \leq 6$ pois, se não, não seria possível com 6 variáveis satisfazer outras relações ψ_j.

Se n é o número de variáveis do sistema, não pode haver mais que $2n+2$ relações ψ.

No caso de $f = 0$ em IP, ie, $IP = g$, então podem existir no máximo $2n+1$ relações ψ. Caso contrário, não existiria o que mexer nas variáveis para minimizar IP.

Finalmente, existe um vínculo dinâmico a ser respeitado

$$\boxed{\varphi_1(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = 0}$$

Como já fizemos anteriormente, o vínculo dinâmico é adicionado à função do integrando de IP por meio de um multiplicador $\lambda(t)$ indeterminado

$$\boxed{\begin{aligned} F(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \lambda) &= f(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) + \lambda(t)\,\varphi_1(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \\ \widetilde{IP} &= g[t_i, x(t_i), \dot{x}(t_f), t_f] + \int_{t_i}^{t_f} F(t, x, \dot{x}, \lambda)\,dt \end{aligned}}$$

Admitamos que $x_1^*(t)$ e $x_2^*(t)$ sejam as funções que minimizam o IP. As funções de comparação são, então, da forma

$$x_1(t, \varepsilon) = x_1(t) + \varepsilon z_1(t)$$

$$x_2(t, \varepsilon) = x_2(t) + \varepsilon z_2(t)$$

89

Nesse novo caso, não conhecemos nem o tempo inicial (t_i) nem o tempo final (t_f). Então, estas quantidades t_i e t_f devem ser também variadas para se determinar suas influências no valor de I.P.

Logicamente, t_i e t_f são também funções de ε, i.é.

$$t_i = t_i(\varepsilon)$$
$$t_f = t_f(\varepsilon)$$

Mudanças nesses valores em torno de seus valores ótimos, para os quais $\varepsilon = 0$, são dados por:

$$dt_i(0) = \left.\frac{dt_i}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon = \delta t_i$$

$$dt_f(0) = \left.\frac{dt_f}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon = \delta t_f$$

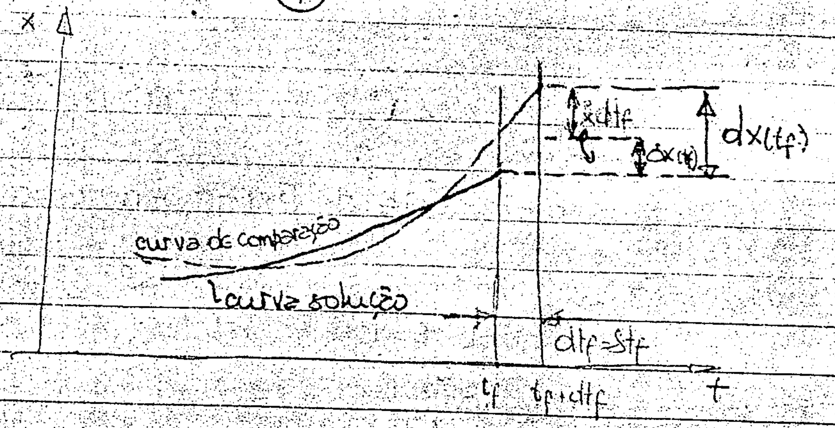
Devido a esse fato, a variação de t_i e t_f com ε, os valores iniciais e finais de x_1 e x_2 são também funções de ε:

$$x_1(t_i,\varepsilon) = x_1(t_i(\varepsilon),\varepsilon)$$
$$x_2(t_i,\varepsilon) = x_2(t_i(\varepsilon),\varepsilon)$$
$$x_1(t_f,\varepsilon) = x_1(t_f(\varepsilon),\varepsilon)$$
$$x_2(t_f,\varepsilon) = x_2(t_f(\varepsilon),\varepsilon)$$

É importantíssimo observar que mudanças em ε afetam os valores de x_1 e x_2, de duas maneiras. Consideremos, por exemplo, $x_1(t_f,\varepsilon) = x_1(t_f(\varepsilon),\varepsilon)$.

Em primeiro lugar, ~~este valor~~ seus valores devem estar sobre a curva ϕ.

Depois, seu valor muda com ε devido à mudança em t_f com ε e, também, mantendo t_f fixo, muda com a dependência explícita de x_1 com ε.



A variação total em $x_1(t_f,\varepsilon)$ é dada, então, por:

$$dx_1(t_f,\varepsilon) = \frac{\partial x_1(t_f,\varepsilon)}{\partial t_f}\frac{dt_f}{d\varepsilon}\,d\varepsilon + \frac{\partial x_1(t_f,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\,d\varepsilon$$

Como essa variação é em torno de $\varepsilon = 0$ e como

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_f} = \dot{x}_1(t_f) \; ; \; \left.\frac{dt_f}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} d\varepsilon = \delta t_f = dt_f \; ; \; \left.\frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} d\varepsilon = \delta x_1(t_f)$$

temos, para a variação total $dx_1(t_f,\varepsilon)$, ou simplesmente $dx_1(t_f)$:

$$dx_1(t_f) = \dot{x}_1(t_f)\,dt_f + \delta x_1(t_f)$$

Usando raciocínio análogo para as outras condições de t_i, t_f, $x_1(t_f)$, $x_2(t_f)$, $x_1(t_i)$, $x_2(t_i)$:

$$dx_1(t_i) = \dot{x}_1(t_i)\,dt_i + \delta x_1(t_i)$$

$$dx_2(t_i) = \dot{x}_2(t_i)\,dt_i + \delta x_2(t_i)$$

$$dx_1(t_f) = \dot{x}_1(t_f)\,dt_f + \delta x_1(t_f)$$

$$dx_2(t_f) = \dot{x}_2(t_f)\,dt_f + \delta x_2(t_f)$$

Voltemos então, à condição necessária para minimização de $\tilde{IP}$

Logicamente queremos $\tilde{IP}(\varepsilon) - \tilde{IP}(0) > 0$ para garantir condição de mínimo.

Pela expansão em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$

$$\tilde{IP}(\varepsilon) - \tilde{IP}(0) = \underbrace{\left.\frac{d\tilde{IP}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon}_{\delta\tilde{IP}} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\tilde{IP}}{d\varepsilon^2}\right| \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} + \sigma(\varepsilon^3)$$

e devemos impor $\delta\tilde{IP} = 0$

Substituindo $x_1(t,\varepsilon)$ e $x_2(t,\varepsilon)$ em $\tilde{IP}$, teremos:

$$\tilde{IP}(\varepsilon) = g[t_i(\varepsilon); x_1(t_i(\varepsilon),\varepsilon); x_2(t_i(\varepsilon),\varepsilon); t_f(\varepsilon); x_1(t_f(\varepsilon),\varepsilon); x_2(t_f(\varepsilon),\varepsilon)] + \int_{t_i(\varepsilon)}^{t_f(\varepsilon)} F[t, x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon); \dot{x}_1(t,\varepsilon), \dot{x}_2(t,\varepsilon), \lambda_1(t)]\,dt$$

Para formar $\delta\tilde{IP} = 0$, deve-se observar que vamos variar quantidades ~~a~~ que são funções de ε. Desde que TODAS as quantidades que aparecem em g dependem de ε, a variação desse termo coincide com a diferencial.

Além disso, dada uma integral onde, além do integrando, os extremos de integração são funções de um parâmetro, isto é, a integral é da forma

$$I(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(y,\alpha)\,dy$$

a variação de $I(\alpha)$ com α pode ser obtida pela fórmula de Leibnitz:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(y,\alpha)\,dy + f(b(\alpha),\alpha)\frac{db(\alpha)}{d\alpha} - f(a(\alpha),\alpha)\frac{da(\alpha)}{d\alpha}$$

Aplicando estes resultados a $\tilde{IP}$ e lembrando que $dt_i = \delta t_i$ e $dt_f = \delta t_f$, a variação primeira de $\tilde{IP}$ é:

$$\delta\tilde{IP} = dg + F\Big|_{t_f} dt_f - F\Big|_{t_i} dt_i + \int_{t_i}^{t_f} \delta F \, dt = 0$$

Na expansão de dg temos:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial t_i} dt_i + \frac{\partial g}{\partial x_1(t_i)} dx_1(t_i) + \frac{\partial g}{\partial x_2(t_i)} dx_2(t_i) + \frac{\partial g}{\partial t_f} dt_f + \frac{\partial g}{\partial x_1(t_f)} dx_1(t_f) + \frac{\partial g}{\partial x_2(t_f)} dx_2(t_f)$$

Com relação a δF, teremos:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\varepsilon + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\varepsilon + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\varepsilon + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\varepsilon$$

$$\delta F = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta \dot{x}_i\right)$$

Voltando a $\delta\tilde{IP}$:

$$\delta\tilde{IP} = 0 = dg + F dt\Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f}\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\frac{d}{dt}\delta x_i\right] dt$$

Integrando por partes o termo do integrando:

$$\int_{t_i}^{t_f}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\frac{d}{dt}\delta x_i \, dt = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f}\sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right\}\delta x_i \, dt$$

$$\delta\tilde{IP} = 0 = dg + F dt\Big|_{t_i}^{t_f} + \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f}\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right]\delta x_i \, dt$$

(93)

Examinemos o termo $\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \Big|_{t_i}^{t_f}$

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \Big|_{t_i}^{t_f} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1(t_i)} \delta x_1(t_i) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2(t_i)} \delta x_2(t_i) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1(t_f)} \delta x_1(t_f) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2(t_f)} \delta x_2(t_f)$$

Mas, por relações anteriormente estabelecidas:

$$\delta x_1(t_i) = dx_1(t_i) - \dot{x}_1(t_i)\,dt_i$$
$$\delta x_2(t_i) = dx_2(t_i) - \dot{x}_2(t_i)\,dt_i$$
$$\delta x_1(t_f) = dx_1(t_f) - \dot{x}_1(t_f)\,dt_f$$
$$\delta x_2(t_f) = dx_2(t_f) - \dot{x}_2(t_f)\,dt_f$$

Então

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \Big|_{t_i}^{t_f} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1(t_i)} dx_1(t_i) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1(t_i)} \dot{x}_1(t_i)\,dt_i - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2(t_i)} dx_2(t_i) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2(t_i)} \dot{x}_2(t_i)\,dt_i$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1(t_f)} dx_1(t_f) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1(t_f)} \dot{x}_1(t_f)\,dt_f + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2(t_f)} dx_2(t_f) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2(t_f)} \dot{x}_2(t_f)\,dt_f$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} dx_j \Big|_{t_i}^{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j \, dt \Big|_{t_i}^{t_f} \right]$$

Voltando a $\tilde{IP}$

$$\delta \tilde{IP} = 0 = dg + F\,dt \Big|_{t_i}^{t_f} + \sum_{j=1}^{2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} dx_j \Big|_{t_i}^{t_f} - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j\,dt \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{j=1}^{2} \left[\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \right] \delta x_j\,dt \right.$$

~~$\delta \tilde{IP} = 0 = dg + F\,dt \Big|_{t_i}^{t_f}$~~

$$\delta \tilde{IP} = 0 = dg - \left[\sum_{j=1}^{2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - F \right] dt \Big|_{t_i}^{t_f} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} dx_j \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{j=1}^{2} \left[\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \right] \delta x_j\,dt$$

A equação acima apresenta dois tipos de termos. O primeiro tipo tem a ver com a variação em $\tilde{IP}$ causada pela variação nas extremidades. O termo da integral expressa variações em $\tilde{IP}$ causadas pela variação em x_1 e x_2 entre as extremidades. Examinemos cada tipo separadamente.

4. Equações de Euler ou Equações Características

Imaginemos que o problema proposto tenha sido resolvido e que os valores ótimos para as variáveis nos extremos, $t_i, t_f, x_1(t_i), x_2(t_i), x_1(t_f), x_2(t_f)$ tenham sido encontrados.

Admitamos que tais variáveis, nos extremos, estejam fixas nos seus valores ótimos. Então, as funções ótimas $x_1(t)$ e $x_2(t)$ devem ser achadas entre as extremidades fixas. Isso significa separar o problema de anular $\delta \tilde{I}P$ em duas partes, anulando cada um dos tipos de variáveis envolvidos.

Se agora temos extremidades fixas, então $dt_i = dx_1(t_i) = dx_2(t_i) = dx_1(t_f) = dx_2(t_f) = dt_f = 0$ e

$$\delta \tilde{I}P = 0 = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right] \delta x_1 \, dt + \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right] \delta x_2 \, dt$$

Embora δx_1 e δx_2 não sejam independentes por terem de obedecer ao vínculo dinâmico

$$\varphi_1(t, \dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2) = 0$$

a introdução do multiplicador de Lagrange $\lambda(t)$ nos permite tratar δx_1 e δx_2 como independentes

Resultam, então, as equações de Euler:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$$

e a de vínculo: $\varphi_1(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = 0$

Estas três equações nos permitem determinar a formo ótimo de $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $\lambda(t)$ entre os tempos inicial e final t_i e t_f.

Dessa maneira, vê-se que as equações de Euler ou características para o problema com fronteiras móveis são exatamente as mesmas que para o problema com fronteiras fixas.

b. A Condição de Transversalidade

Satisfeitas as equações de Euler, para se conseguir anular a variação primeira de IP, δIP, é ainda necessário que:

$$\boxed{dg - \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F\right]dt\Bigg|_{t_i}^{t_f} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\, dx_i\Bigg|_{t_i}^{t_f} = 0}$$

Esta condição é dita CONDIÇÃO DE TRANSVERSALIDADE.

A condição de transversalidade, juntamente com os p vínculos terminais ψ_i, $i=1,2,\dots,p$, ~~deverá ser~~ deve ser suficiente para determinar os seis valores de extremidades t_i, t_f, $x_1(t_i)$, $x_2(t_i)$, $x_1(t_f)$ e $x_2(t_f)$.

A condição de transversalidade deve ser satisfeita para toda variação nos valores de extremidades.

No entanto, é importante observar que nem todas as variações dt_i, $dx_1(t_i)$, $dx_2(t_i)$, dt_f, $dx_1(t_f)$, $dx_2(t_f)$ são arbitrárias. Isto porque existem p vínculos terminais ψ_i, de tal forma que:

$$d\psi_j = 0 = \frac{\partial \psi_j}{\partial t_i}dt_i + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1(t_i)}dx_1(t_i) + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2(t_i)}dx_2(t_i) + \frac{\partial \psi_j}{\partial t_f}dt_f + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1(t_f)}dx_1(t_f) + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2(t_f)}dx_2(t_f) \quad ; j=1,2,\dots,p$$

Com isso, existem apenas 6 - p diferenciais independentes. Logo, a condição de transversalidade deve ser satisfeita apenas por aqueles diferenciais consistentes com os p vínculos.

terminais $\psi_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, p$

Exemplifiquemos:

Suponho que $p=3$ vínculos $\psi[x_1(t_i), x_2(t_i), t_i, x_1(t_f), x_2(t_f), t_f] = 0$ sejam dados.

Existem então 3 diferenciais independentes que escolhemos sejam $dx_1(t_i)$, dt_f e $dx_2(t_f)$.

Usando as equações $\psi_j = 0$, obtemos relações entre $dx_2(t_i)$, dt_i e $dx_1(t_f)$ e as diferenciais independentes $dx_1(t_i)$, dt_f e $dx_2(t_f)$.

Substituindo os valores assim obtidos na condição de transversalidade, chegaremos a uma expressão do tipo:

$$A\, dx_1(t_i) + B\, dx_2(t_f) + C\, dt_f = 0$$

onde A, B e C, são, em geral, funções de todas as ~~variáve~~ ~~difer~~ variáveis ~~com~~ valores de fronteira e mais, funções de $\lambda(t_i)$ e $\lambda(t_f)$, pois F é também função de λ.

Como, agora, temos $dx_1(t_i)$, $dx_2(t_f)$ e dt_f como independentes, fazemos $dx_2(t_f) = dt_f = 0$. Resta:

$$A\, dx_1(t_i) = 0$$

e, como, esta relação deve ser satisfeita para qualquer diferencial $dx_1(t_i)$, então, devemos ter:

$$A[x_1(t_i), t_i, \ldots, x_2(t_f)] = 0$$

Por raciocínio totalmente análogo, concluímos que $B = C = 0$. Temos então três novas relações:

$$A[x_1(t_i), \ldots, x_2(t_f)] = 0$$
$$B[x_1(t_i), \ldots, x_2(t_f)] = 0$$
$$C[x_1(t_i), \ldots, x_2(t_f)] = 0$$

As três relações acima $(A=B=C=0)$, mais as três relações de vínculos terminais $(\psi_1=\psi_2=\psi_3=0)$ e mais o valor do vínculo dinâmico $(\varphi_1=0)$, avaliado em t_i e t_f permitem determinar os valores de t_i, $x_1(t_i)$ $x_2(t_i)$, t_f, $x_1(t_f)$, $x_2(t_f)$ assim como os valores de $\lambda(t_i)$ e $\lambda(t_f)$.

Na realidade, a equação em $\lambda(t)$ é uma equação diferencial de 1ª ordem pois F é linear em λ e o único termo em que aparece a derivada $\dot{\lambda}$ é em $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)$

Este é um procedimento possível, mas não é único e também não menos complicado. Notem que tal procedimento foi desenvolvido com um problema com apenas duas variáveis, um vínculo dinâmico e três vínculos de contorno.

Um procedimento mais geral pode ser obtido através do uso de multiplicadores de Lagrange, que chamaremos ν, para os vínculos de contorno.

Para tanto, adicionamos cada um dos p vínculos de contorno ψ através de um multiplicador indeterminado ν à função g anteriormente definida.

Definimos, então:

Função de Contorno G:

$$G[t_i, x_1(t_i), x_2(t_i), t_f, x_1(t_f), x_2(t_f), \nu] = g[t_i, x_1(t_i), x_2(t_i), t_f, x_1(t_f), x_2(t_f)] + \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\nu_j}_{\text{multiplicador de Lagrange para os } p \text{ vínculos de contorno } \psi_j} \psi_j [t_i, x_1(t_i), x_2(t_i), t_f, x_1(t_f), x_2(t_f)]$$

e o nosso $\tilde{IP}$ ficaria na forma

$$\tilde{IP} = G[t_i, x_1(t_i), x_2(t_i), t_f, x_1(t_f), x_2(t_f), \nu] + \int_{t_i}^{t_f} F(t, x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \lambda(t))\, dt$$

e pelo mesmo desenvolvimento feito na primeira parte, obteríamos para a primeira variação $\delta \tilde{IP}$:

$$\delta \breve{J} = 0 = dG - \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - F\right] dt \Big|_{t_i}^{t_f} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} dx_i \Big|_{t_i}^{t_f} +$$

$$- \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i}\right] \delta x_i \, dt$$

de onde, temos agora a condição de transversalidade expressa por:

$$dG - \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - F\right] dt \Big|_{t_i}^{t_f} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_{t_i}^{t_f} = 0$$

Note que como $G = g + \sum_{j=1}^{p} \nu_j \psi_j$, então

$$dG = dg + \sum_{i=1}^{p} \nu_j \, d\psi_j \quad \text{e como} \quad d\psi_j = 0$$

$$dG = dg$$

Voltando à condição de transversalidade e desenvolvendo

$$dG = \frac{\partial g}{\partial t_i} dt_i + \frac{\partial g}{\partial x_1(t_i)} dx_1(t_i) + \frac{\partial g}{\partial x_2(t_i)} dx_2(t_i) + \frac{\partial g}{\partial t_f} dt_f +$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial x_1(t_f)} dx_1(t_f) + \frac{\partial g}{\partial x_2(t_f)} dx_2(t_f) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \nu_i \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} dt_i + \sum_{i=1}^{p} \nu_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1(t_i)} dx_1(t_i) + \dots + \sum_{i=1}^{p} \nu_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} dx_2(t_f)$$

$$\left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - F\right] dt \Big|_{t_i}^{t_f} = \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - F\right] dt_f - \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - F\right] dt_i$$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_{t_i}^{t_f} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1(t_f)} dx_1(t_f) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2(t_f)} dx_2(t_f) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1(t_f)} dx_1(t_f) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2(t_f)} dx_2(t_f)$$

Montando segundo cada coeficiente:

$$\left\{\frac{\partial g}{\partial t_i} + \sum_{i=1}^{p} \nu_i \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} + \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - F\right]\right\} dt_i +$$

$$+ \left\{\frac{\partial g}{\partial t_f} + \sum_{i=1}^{p} \nu_i \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} - \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - F\right]\right\} dt_f +$$

$$+\left\{\frac{\partial g}{\partial x_1(t_i)}+\sum_{i=1}^{p}\nu_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1(t_i)}-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1(t_i)}\right\}dx_1(t_i)\;+$$

$$+\left\{\frac{\partial g}{\partial x_2(t_i)}+\sum_{i=1}^{p}\nu_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x_2(t_i)}-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2(t_i)}\right\}dx_2(t_i)\;+$$

$$+\left\{\frac{\partial g}{\partial x_1(t_f)}+\sum_{i=1}^{p}\nu_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1(t_f)}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1(t_f)}\right\}dx_1(t_f)\;+$$

$$+\left\{\frac{\partial g}{\partial x_2(t_f)}+\sum_{i=1}^{p}\nu_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x_2(t_f)}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2(t_f)}\right\}dx_2(t_f)=0$$

Como a introdução dos multiplicadores ν_i nos permite tratar as variáveis na fronteira como independentes, resultam como condições para se anular δJ, na hipótese de nenhum ponto fixo, i.e., $dx_1(t_i)$, $dx_1(t_f)$, $dx_2(t_i)$, $dx_2(t_f)$, dt_i, $dt_f \neq$ s de 0.

$$\left\{\frac{\partial g}{\partial t_i}+\sum_{i=1}^{p}\nu_i\frac{\partial\psi_i}{\partial t_i}+\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i-F\right]_{t_i}\right\}=\boxed{\left\{\frac{\partial G}{\partial t_i}+\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i-F\right]_{t_i}\right\}=0}$$

$$\left\{\frac{\partial g}{\partial t_f}+\sum_{i=1}^{p}\nu_i\frac{\partial\psi_i}{\partial t_f}-\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i-F\right]_{t_f}\right\}=\boxed{\left\{\frac{\partial G}{\partial t_f}-\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i-F\right]_{t_f}\right\}=0}$$

$$\left\{\frac{\partial g}{\partial x_1(t_i)}+\sum_{i=1}^{p}\nu_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1(t_i)}-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\bigg|_{t_i}\right\}=\boxed{\left\{\frac{\partial G}{\partial x_1(t_i)}-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\bigg|_{t_i}\right\}=0}$$

$$\left\{\frac{\partial g}{\partial x_2(t_i)}+\sum_{i=1}^{p}\nu_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x_2(t_i)}-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\bigg|_{t_i}\right\}=\boxed{\left\{\frac{\partial G}{\partial x_2(t_i)}-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\bigg|_{t_i}\right\}=0}$$

$$\left\{\frac{\partial g}{\partial x_1(t_f)}+\sum_{i=1}^{p}\nu_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1(t_f)}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\bigg|_{t_f}\right\}=\boxed{\left\{\frac{\partial G}{\partial x_1(t_f)}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\bigg|_{t_f}\right\}=0}$$

$$\left\{\frac{\partial g}{\partial x_2(t_f)}+\sum_{i=1}^{p}\nu_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x_2(t_f)}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\bigg|_{t_f}\right\}=\boxed{\left\{\frac{\partial G}{\partial x_2(t_f)}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\bigg|_{t_f}\right\}=0}$$

Estas 6 equações da condição de transversalidade, mais as p equações dos vínculos de contorno ψ e o valor do vínculo dinâmico ($\phi_1 = 0$) avaliado em t_i ou em t_f fornecem: 7 + p relações necessárias para se determinar t_i, $x_1(t_i)$, $x_2(t_i)$, t_f, $x_1(t_f)$, $x_2(t_f)$ e $\lambda(t_i)$ ou $\lambda(t_f)$, além dos p multiplicadores μ_i

Antes de estender os resultados aqui obtidos para n variáveis, resolvamos o seguinte exemplo:

$\boxed{\text{Exemplo}}$ Minimizar o Índice de Performance dado por

$$I.P = \frac{x_1^2(t_f)}{2} + \int_0^{t_f}\left[1 + \frac{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)}{2}\right]dt$$

com o sistema governado pelo vínculo dinâmico:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

e sujeito aos vínculos de contorno:

a) em $t = t_i = 0$: $x_1(0) = 0$; $x_2(0) = 0$

b) em $t = t_f$ (não especificado) : $x_1(t_f) + x_2(t_f) = a$

Então, temos, como vínculos de contorno:

$$\psi_1 = t_i = 0$$
$$\psi_2 = x_1(t_i) = 0$$
$$\psi_3 = x_2(t_i) = 0$$
$$\psi_4 = x_1(t_f) + x_2(t_f) - a = 0$$

e, como vínculo dinâmico

$$\phi_1 = \dot{x}_1 - x_2 = 0$$

Montamos primeiramente a função F:

$$F = f + \lambda\phi_1 \implies F = \left[1 + \frac{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)}{2}\right] + \lambda(\dot{x}_1 - x_2)$$

De F obtemos as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = \dot{x}_1 + \lambda \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right) = \ddot{x}_1 + \dot{\lambda}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -\lambda \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} = \dot{x}_2 \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right) = \ddot{x}_2$$

logo:
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dot{\lambda} = 0 \\ \ddot{x}_2 + \lambda = 0 \\ \dot{x}_1 = x_2 \qquad \text{(vinc. dinâmico)} \end{cases}$$

$$\ddot{x}_2 + \lambda = 0 \implies \dddot{x}_2 = -\dot{\lambda} = \ddot{x}_1$$

$$\dddot{x}_2 = \ddot{x}_1 \quad ; \quad \dot{x}_1 = x_2 \implies \ddot{x}_1 = \dot{x}_2$$

$$\dddot{x}_2 - \dot{x}_2 = 0 \qquad (1)$$

Raízes características $r^3 - r = 0 \implies r(r^2 - 1) = 0$

$$r_1 = 0 \; ; \; r_2 = +1 \; ; \; r_3 = -1$$

e a solução geral de (1) é dada por

$$x_2 = C_1 \operatorname{senh} t + C_2 \cosh t + C_3 \qquad (2)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \implies x_1 = C_1 \cosh t + C_2 \operatorname{senh} t + C_3 t + C_4 \qquad (3)$$

$$\ddot{x}_2 = -\lambda \implies \lambda = -C_1 \operatorname{senh} t - C_2 \cosh t \qquad (4)$$

Para fixar $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $\lambda(t)$ precisamos determinar t_i, t_f, C_1, C_2, C_3 e C_4, isto é, 6 constantes. Os vínculos de contorno φ_j nos fornecem quatro relações. As duas outras aparecem da condição de transversalidade.

Montemos estas últimas pelos dois caminhos da teoria: o primeiro, sem usar os multiplicadores ν e o segundo, usando tais multiplicadores.

Sem usar os multiplicadores temos, então:

$$dg - \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - F\right] dt \Big|_{t_i}^{t_f} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} dx_i \Big|_{t_i}^{t_f} = 0$$

$$g = g[x_1(t_f)] \Rightarrow dg = \frac{\partial g}{\partial x_1(t_f)} dx_1(t_f) \Rightarrow dg = x_1(t_f)\, dx_1(t_f)$$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - F = \left[(\dot{x}_1 + \lambda)\dot{x}_1 + \dot{x}_2^2 - \left[1 + \frac{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)}{2}\right] - \lambda(\dot{x}_1 - x_2)\right]_{t_i}^{t_f}$$

$$= \left[\dot{x}_1^2 + \lambda\dot{x}_1 + \dot{x}_2^2 - 1 - \frac{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)}{2} - \cancel{\lambda\dot{x}_1} + \lambda x_2\right]_{t_i}^{t_f}$$

$$= \left[\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} - 1 + \lambda x_2\right]_{t_i}^{t_f}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} dx_i = (\dot{x}_1 + \lambda)\, dx_1 + \dot{x}_2\, dx_2$$

$$x_1(t_f)\, dx_1(t_f) - \left[\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} - 1 + \lambda x_2\right] dt \Big|_{t_i}^{t_f} + \left[(\dot{x}_1 + \lambda)\, dx_1 + \dot{x}_2\, dx_2\right]_{t_i}^{t_f} = 0$$

Como, pelos vínculos, t_i, $x_1(t_i)$, $x_2(t_i)$ são fixos, $dt_i = dx_1(t_i) = dx_2(t_i) = 0$ e

$$x_1(t_f)\, dx_1(t_f) - \left[\frac{\dot{x}_1^2(t_f) + \dot{x}_2^2(t_f)}{2} - 1 + \lambda(t_f)\, x_2(t_f)\right] dt_f +$$
$$+ \left[(\dot{x}_1(t_f) + \lambda(t_f))\, dx_1(t_f) + \dot{x}_2(t_f)\, dx_2(t_f)\right] = 0$$

Um vínculo de contorno não usado garante que

$$x_1(t_f) + x_2(t_f) = 2$$

$$dx_1(t_f) + dx_2(t_f) = 0 \Rightarrow dx_1(t_f) = -dx_2(t_f)$$

(103)

Usando esta última relação:

$$x_1(t_f)\,dx_1(t_f) - \left[\frac{\dot{x}_1^2(t_f) + \dot{x}_2^2(t_f)}{2} - 1 + \lambda(t_f)\dot{x}_1(t_f)\right] dt_f +$$

$$+ \left[\dot{x}_1(t_f) + \dot{\lambda}_1(t_f) - \dot{x}_2(t_f)\right] dx_1(t_f) = 0$$

ou

$$\left[x_1(t_f) + \dot{x}_1(t_f) + \dot{\lambda}_1(t_f) - \dot{x}_2(t_f)\right] dx_1(t_f) - \left[\frac{\dot{x}_1^2(t_f) + \dot{x}_2^2(t_f)}{2} - 1 + \lambda(t_f)\dot{x}_1(t_f)\right] dt_f = 0$$

onde agora $dx_1(t_f)$ e dt_f são independentes e arbitrários.

Logo, para fazer valer a relação acima:

$$x_1(t_f) + \dot{x}_1(t_f) - \dot{\lambda}_1(t_f) - \dot{x}_2(t_f) = 0$$

$$\frac{\dot{x}_1^2(t_f) + \dot{x}_2^2(t_f)}{2} - 1 + \lambda(t_f)\dot{x}_1(t_f) = 0$$

Usando os multiplicadores ν, teríamos:

$$G = g + \sum_{i=1}^{4} \nu_i \psi_i =$$

$$G = \frac{x_1^2(t_f)}{2} + \nu_1 t_i + \nu_2 x_1(t_i) + \nu_3 x_2(t_i) + \nu_4 \left[x_1(t_f) + x_2(t_f) - a\right]$$

1. $$\frac{\partial G}{\partial t_i} + \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F\right]\Bigg|_{t_i} = 0$$

$$\nu_1 + \left[\frac{\dot{x}_1^2(t_i) + \dot{x}_2^2(t_i)}{2} + \lambda(t_i)\dot{x}_1(t_i)\right] = 0$$

2. $$\frac{\partial G}{\partial t_f} - \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F\right]\Bigg|_{t_f} = 0$$

$$0 - \left[\frac{\dot{x}_1^2(t_f) + \dot{x}_2^2(t_f)}{2} - 1 + \lambda(t_f)\dot{x}_1(t_f)\right] = 0$$

3. $$\frac{\partial G}{\partial x_1(t_i)} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Bigg|_{t_i} = 0$$

$$\therefore \cancel{x_1(t_f)}\ \nu_2 - \left[\dot{x}_1(t_i) + \lambda(t_i)\right] = 0$$

4. $$\frac{\partial G}{\partial x_2(t_i)} - \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right|_{t_i} = 0$$

$$\nu_3 - \dot{x}_2(t_i) = 0$$

5. $$\frac{\partial G}{\partial x_1(t_f)} + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right|_{t_f} = 0$$

$$x_1(t_f) + \nu_4 + \left[\dot{x}_1(t_f) + \lambda(t_f)\right] = 0$$

6. $$\frac{\partial G}{\partial x_2(t_f)} + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right|_{t_f} = 0$$

$$\nu_4 + \dot{x}_2(t_f) = 0$$

Estas 6 equações mais as equações dos vínculos (ψ), em número de 4, permitem determinar as 6 condições t_i, t_f, C_1, C_2, C_3 e C_4 e os multiplicadores $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$.

O único problema é que na solução dessas equações t_f aparece dentro de uma equação transcedental:

$$t_f = \frac{t_f + 1}{\operatorname{senh} t_f + \cosh t_f}$$

que só pode ser resolvida por tentativa e erro.

3.3. Extensão para n variáveis.

Seja agora minimizar o seguinte Indice de Performance:

(105)

$$\boxed{IP = g[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] + \int_{t_i}^{t_f} f(t,x,\dot{x})\,dt}$$

onde $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$

sujeito aos vínculos dinâmicos

$$\varphi_1(t,x,\dot{x}) = 0$$
$$\varphi_2(t,x,\dot{x}) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi(t,x,\dot{x}) = 0$$
$$\vdots$$
$$\varphi_m(t,x,\dot{x}) = 0$$
$$\vdots$$

onde $\varphi = \begin{Bmatrix} \varphi_1(t,x,\dot{x}) \\ \varphi_2(t,x,\dot{x}) \\ \vdots \\ \varphi_m(t,x,\dot{x}) \end{Bmatrix}$

aos vínculos de contorno

$$\psi_1(t_i, \cancel{t_f}; x(t_i), x(t_f)) = 0$$
$$\psi_2[t_i, t_f; x(t_i); x(t_f)] = 0$$
$$\vdots \qquad \text{ou} \qquad \psi[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] = 0$$
$$\vdots$$
$$\psi_p[t_i, t_f; x(t_i); x(t_f)] = 0$$

onde $\psi = \begin{Bmatrix} \psi_1[t_i, t_f; x(t_i), x(t_f)] \\ \psi_2[\qquad] \\ \vdots \\ \psi_p[\qquad] \end{Bmatrix}$

Como já vimos, devemos ter $p \leq 2n+2$ (para $m<n$) no caso de um problema de Bolza ou $p \leq 2n+1$ no caso de um problema de Mayer

Demonstremos a equivalência entre o problema de Mayer e o problema de Bolza.

Definimos, então, uma nova variável x_{n+1} tal que

$$\dot{x}_{n+1} = f(t, x, \dot{x})$$

com um p-ésimo +1 vínculo

$$\psi_{p+1} = x_{n+1}(t_i) = 0 \quad \text{já que} \quad x_{n+1}(t) - \int_{t_i}^{t_f} f\,dt = 0$$

$$\dot{x}_{n+1} = f \Rightarrow x_{n+1}(t_f) - \underbrace{x_{n+1}(t_i)}_{0} = \int_{t_i}^{t_f} f\,dt$$

$$x_{n+1}(t_f) = \int_{t_i}^{t_f} f\,dt \quad ; \quad x_{n+1}(t) = \int_{t_i}^{t} f\,dt$$

Com isso, IP se transforma em

$$IP' = g[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] + \boxed{x_{n+1}(t_f)} = g'[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)]$$

com vínculos dinâmicos

$$\varphi(t, x, \dot{x}) = 0$$

$$\varphi_{m+1} \triangleq \dot{x}_{n+1} - f(t, x, \dot{x}) = 0$$

$$\varphi'(t, x, \dot{x}) = 0 \quad \text{com} \quad \varphi' = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \\ \boxed{\varphi_{m+1}} \end{Bmatrix} = 0$$

e vínculos de contorno:

$$\psi[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] = 0$$

$$\psi_{p+1}[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] = x_{n+1}(t_i) = 0$$

i.é:

$$\psi'[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] = 0 \quad \text{com} \quad \psi' = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_p \\ \boxed{\psi_{p+1}} \end{Bmatrix}$$

Voltemos ao problema original de Bolza: Adicionando os vínculos dinâmicos através de multiplicadores $\lambda(t)$, montamos:

$$\boxed{F = f(t, x, \dot{x}) + \lambda^T(t)\, \varphi(t, x, \dot{x})}$$

isto é:

$$\boxed{F = f(t,x,\dot{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\, \varphi_i(t,x,\dot{x})}$$

e, para as funções F decorrem as equações de Euler Lagrange

$$\left.\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} - \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_n} - \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \end{array}}\right\} \text{ \underline{n} equações}$$

que, juntamente, com os vínculos dinâmicos

$$\left.\boxed{\begin{array}{c} \varphi_1(t,x,\dot{x}) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(t,x,\dot{x}) = 0 \end{array}}\right\} \text{ \underline{m} equações}$$

permitem determinar a forma geral das n funções $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ e dos m multiplicadores $\lambda(t)$.

Para as condições de contorno, adicionamos os vínculos de contorno ψ à função g do IP através de p multiplicadores, constantes, ν.

$$\boxed{G = g[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] + \nu^T \psi} \quad \text{ou}$$

isto é

$$\boxed{G[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f), \nu] = g[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] + \sum_{j=1}^{p} \nu_j \psi_j [t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)]}$$

Por argumentos análogos aos desenvolvidos para o caso de 1 variável, obtemos a condição de transversalidade:

$$\boxed{dG - \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F\right] dt \Big|_{t_i}^{t_f} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} dx_i \Big|_{t_i}^{t_f} = 0}$$

ou

∴ Rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{\partial G}{\partial t_i} + \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F\right]\Bigg|_{t_i} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial t_f} - \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F\right]\Bigg|_{t_f} = 0$$

cond. de transversalidade

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\partial G}{\partial x_j(t_i)} - \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}\Bigg|_{t_i} = 0 \\ \hline \dfrac{\partial G}{\partial x_j(t_f)} - \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}\Bigg|_{t_f} = 0 \end{array}} \qquad \begin{array}{c} j = 1, 2, \ldots, n \\ \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

que, junto com os p vínculos φ permitem determinar t_i, t_f, os n $x(t_i)$, os n $x(t_f)$ e mais os p multiplicadores ν.

Quanto às condições de quina, isto é, existência de um ponto onde haja descontinuidades nas derivadas, permanecem as mesmas. Para tanto, basta examinar ~~contato~~ que se mantêm as equações de Euler-Lagrange em $t_i \le t \le t_f$ mesmo no caso de fronteiras móveis.

Temos, então, n+1 condições para determinar as mudanças em $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ e o instante t_1 em que surge a quina.

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\Bigg|_{t_1^{(-)}} = \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\Bigg|_{t_1^{(+)}} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\Bigg|_{t_1^{(-)}} = \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\Bigg|_{t_1^{(+)}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_n}\Bigg|_{t_1^{(-)}} = \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_n}\Bigg|_{t_1^{(+)}} \end{array}}$$

CONDIÇÕES DE QUINA W. ERDMAN

(109)

$$\boxed{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F\right]\Bigg|_{t_1^{(-)}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F\right]\Bigg|_{t_1^{(+)}}}$$

3.4. CONDIÇÃO DE WEIERSTRASS

Até agora mostramos as condições necessárias para termos os extremais do nosso problema de minimização sob a condição de variações fracas.

Logicamente, as funções de comparação para minimização sob variações fracas formam uma classe muito especial, muito particular de funções. Relembrando, devemos ter

$$\left.\begin{array}{l} |x_i(t,\epsilon) - x_i(t)| \leq \epsilon \\ |\dot{x}_i(t,\epsilon) - \dot{x}_i(t)| \leq \epsilon \end{array}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

A pergunta que se coloca é se existe maneira de se diminuir ainda mais o valor de IP se as condições impostas sobre as funções de comparação forem menos restritivas. Admitamos então condições de variação forte, isto é:

$$\left.\begin{array}{l} |x_i(t,\epsilon) - x_i(t)| \leq \epsilon \\ |\dot{x}_i(t,\epsilon) - \dot{x}_i(t)| \text{ não necessariamente } \leq \epsilon \end{array}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots n$$

Imaginemos então o nosso problema como o de minimizar

$$IP = \int_{t_i}^{t_f} f[x, \dot{x}, t]\, dt$$

com

$$\left.\begin{array}{l} t_i,\ x_1(t_i),\ x_2(t_i), \ldots, x_n(t_i) \\ t_f,\ x_1(t_f),\ x_2(t_f), \ldots, x_n(t_f) \end{array}\right\} \text{ dados e fixos}$$

isto é:

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

sujeito aos vínculos dinâmicos

$$\varphi_j(x,\dot{x},t) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

Nesse caso, definindo

$$F = \cancel{\alpha} f + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j = f + \lambda^T \varphi$$

temos, sob condições de variações fracas,

- condições necessárias

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

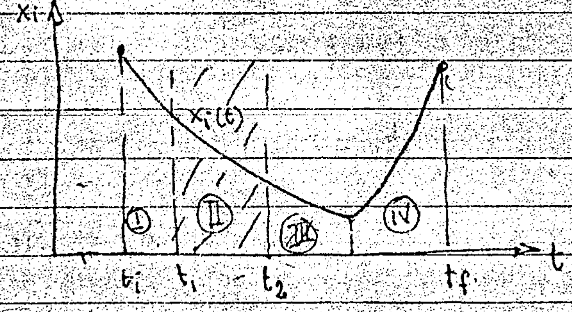
$$\varphi_j(x,\dot{x},t) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots m$$

- condições necessárias de quina

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t_1^+} = \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t_1^-} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

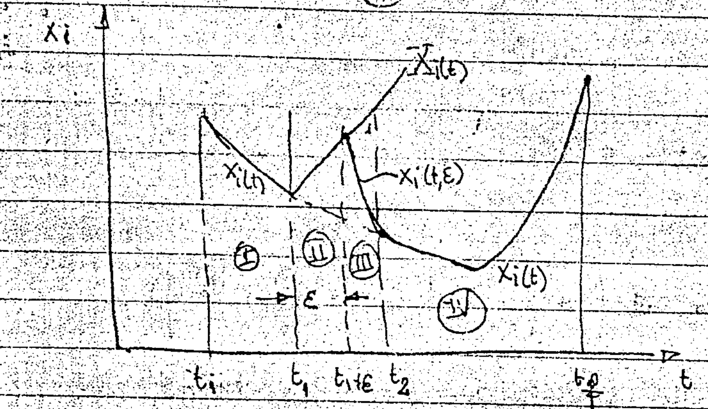
$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F\right]_{t_1^+} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F\right]_{t_1^-}$$

Admitamos que a solução do nosso problema, sob condições fracas, tenha já sido encontrada. ~~Admitamos tam~~ e tenha a forma abaixo



Consideremos funções de comparação que diferem fortemente da solução encontrada no intervalo $t_1 - t_2$.

(111)



Então, a função forte de comparação iguala a solução extremal em todo lugar p/ $t_i \le t \le t_f$, exceto no intervalo $t_1 \le t \le t_2$.
No intervalo $t_1 \le t \le t_1+\varepsilon$ existe uma variação forte, enquanto no intervalo $t_1+\varepsilon \le t \le t_2$ só se permite variação fraca na volta à solução obtida.

Admitamos $X_i(t)$ como o conjunto de valores, não necessariamente próximos de $x_i(t)$. $X_i(t)$ pode ser qualquer desde que os vínculos $\phi_j(t, X, \dot{X}) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$ sejam respeitados.

Então, para cada extremal $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a função de comparação será dada por:

$x_i(t)$: $t_i \le t \le t_1$ – região I

$X_i(t)$: $t_1 \le t \le t_1+\varepsilon$ – região II

$x_i(t,\varepsilon)$: $t_1+\varepsilon \le t \le t_2$ – região III

$x_i(t)$: $t_2 \le t \le t_f$ – região IV

Como as $x_i(t)$ devem ser necessariamente contínuas, devemos ter

$$\left.\begin{aligned} x_i(t_1) &= X_i(t_1) \\ X_i(t_1+\varepsilon) &= x_i(t_1+\varepsilon, \varepsilon) \\ x_i(t_2, \varepsilon) &= x_i(t_2) \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

~~[illegible]~~

Note que quando $\varepsilon=0$, as regiões (II) e (III) são eliminadas e a função de comparação torna-se a solução extremal $x_i(t)$

Entremos agora com a função de comparação no nosso Índice de Performance e desdobremos temos, então

$$IP(\varepsilon) = \int_{t_i}^{t_1} F[t, x(t), \dot{x}(t)]\,dt + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} F[t, \bar{X}(t), \dot{\bar{X}}(t)]\,dt + \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2} F[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)]\,dt + \int_{t_2}^{t_f} F[t, x(t), \dot{x}(t)]\,dt$$

A condição de mínimo nos obriga a que

$$IP(\varepsilon) - IP(0) \geq 0$$

o que pode ser resumido no fato de que:

$$\delta IP = dIP(0) = \left.\frac{dIP}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon \geq 0$$

e, como $\varepsilon > 0$

$$\left.\frac{dIP}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \geq 0$$

Antes de se fazer a variação de IP, obteremos alguns resultados. De:

$$X_i(t_1+\varepsilon) = x_i(t_1+\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow d\bar{X}_i(t_1+\varepsilon) = dx_i(t_1+\varepsilon, \varepsilon)$$

Para $\varepsilon = 0$, tem-se

$$\frac{d\bar{X}_i}{dt}(t_1) = \frac{\partial x_i}{\partial t}(t_1, 0) + \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t_1, 0)$$

$$\dot{\bar{X}}_i(t_1) = \dot{x}_i(t_1, 0) + \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t_1, 0)$$

isto é
$$\boxed{\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t_1, 0) = \dot{\bar{X}}_i(t_1) - \dot{x}_i(t_1, 0)}$$

Além disso, desde que $x_i(t_2)$ é fixo, temos de

$$x_i(t_2, \varepsilon) = x_i(t_2) \text{ fixo}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t_2, 0) = 0$$

(113)

Façamos agora a variação de IP:

$$IP(\varepsilon) = \int_{t_i}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} + \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_f}$$

Note que como a 1ª e a última integrais são avaliadas sobre a curva solução, isto é, com $x_i(t)$ dado, quando fazemos a variação essas integrais se anulam.

Basta tomar, então

$$IP(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} F[t, \bar{X}(t), \dot{\bar{X}}(t)]\,dt + \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2} F[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)]\,d\varepsilon$$

Como $\bar{X}(t)$ não depende de ε, na 1ª integral apenas o limite superior de integração depende de ε. Então:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} F[t, \bar{X}(t), \dot{\bar{X}}(t)]\,dt\right] = \left\{F[t, \bar{X}(t), \dot{\bar{X}}(t)] \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}(t_1+\varepsilon)}_{1}\right\}\Bigg|_{t_1+\varepsilon}$$

$$= F[t, \bar{X}(t), \dot{\bar{X}}(t)]\Big|_{t_1+\varepsilon},$$

pelo uso da fórmula de Leibnitz.

Na 2ª integral dependem de ε o extremo inferior de integração e a função de comparação $x(t)$ (funções).

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_{t_1+\varepsilon}^{t_2} F[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)]\right] = -\left\{F[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)] \cdot \frac{d}{dt}(t_1+\varepsilon)\right\}\Bigg|_{t_1+\varepsilon}$$

$$+ \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2} \frac{d}{d\varepsilon}\left[F[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)]\right] dt$$

$$= -\left\{F[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)] \cdot 1\right\} +$$

$$+ \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon)\right] dt$$

Com isso, temos que:

$$\frac{dIP(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \left\{ F[t, X(t), \dot{X}(t)] - F[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)] \right\}\Big|_{t_1+\varepsilon} +$$

$$+ \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon)\right] dt$$

Integremos por partes o 2º termo dentro da integral:

$$\int_{t_1+\varepsilon}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon)\right] dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)] \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon)\right]\Bigg|_{t_1+\varepsilon}^{t_2}$$

$$- \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}\, dt$$

Então

$$\frac{dIP}{d\varepsilon}(\varepsilon) = \left\{ F[t, X(t), \dot{X}(t)] - F[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)] \right\}\Big|_{t_1+\varepsilon} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}[t, x(t,\varepsilon), \dot{x}(t,\varepsilon)] \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon)\right]_{t_1+\varepsilon}^{t_2} +$$

$$+ \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}\right] \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon)\, dt$$

Avaliando este termo para $\varepsilon = 0$, lembremos que $x_i(t,\varepsilon)$ e $\dot{x}_i(t,\varepsilon)$ recaem nas soluções extremais $x_i(t)$ e $\dot{x}_i(t)$.

Além disso, sobre os extremais acima temos:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad t_1 + \varepsilon < t \le t_2$$

o que anula as integrais.

(115)

$$\frac{dIP}{d\varepsilon}(0) = \left\{ F[t, X(t), \dot{X}(t)] - F[t, x(t), \dot{x}(t)] \right\} \Big|_{t_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}[t, x(t), \dot{x}(t)] \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t, 0) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Como, em t_1 : $x(t_1) = X(t_1)$

$$\frac{dIP}{d\varepsilon}(0) = \left\{ F[t, x(t), \dot{X}(t)] - F[t, x(t), \dot{x}(t)] \right\} \Big|_{t_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Usando agora o fato de $\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t_2, 0) = 0$

e $\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t_1, 0) = \dot{X}_i(t_1) - \dot{x}_i(t_1)$

$$\frac{dIP}{d\varepsilon}(0) = \left\{ F[t, x(t), \dot{X}(t)] - F[t, x(t), \dot{x}(t)] \right\} \Big|_{t_1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}[t, x(t), \dot{x}(t)] \left[\dot{X}_i(t) - \dot{x}_i(t) \right] \Big|_{t_1}$$

Para os extremos $x_i(t)$ serem as soluções minimizantes é necessário que, em cada instante t_1 :

$$\frac{dIP}{d\varepsilon}(0) \geq 0$$

Como a relação acima vale para qualquer t_1 já que o nosso t_1 é arbitrário

$$\boxed{E = F[t, x(t), \dot{X}(t)] - F[t, x(t), \dot{x}(t)] - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}[t, x(t), \dot{x}(t)] \left[\dot{X}_i(t) - \dot{x}_i(t) \right] \geq 0}$$

A função E é chamada FUNÇÃO E DE WEIERSTRASS ou função de Erdmann-Weierstrass e a condição acima colocada é chamada CONDIÇÃO NECESSÁRIA DE WEIERSTRASS PARA EXTREMO (MÍNIMO) FORTE.

Esta condição deve ser satisfeita, ~~para~~ em todo instante t do intervalo $t_i - t_f$, para todas as funções $\dot{X}_i(t)$ consistentes com os vínculos $\phi_j(t, x, \dot{x}) = 0$, se os extremais $x_i(t)$ são as funções minimizantes do nosso IP sob variações fortes.

Embora o nosso desenvolvimento tenha ficado restrito ao problema de fronteiras fixas, é possível encontrar uma função E de Weierstrass e a respectiva condição de extremo forte também no caso de fronteiras móveis.

$\boxed{\text{Exemplo:}}$ Examinemos a condição de mínimo forte no problema, já desenvolvido, de minimizar

$$IP = \int_0^2 (\dot x^2 - 1)^2 \, dt$$

com as condições $x(0) = x(2) = 1$.

Tratamos este problema sob dois aspectos, correspondentes à introdução ou não de quinas.

a) Solução sem quinas

$\dot x = \text{const} = 0 \longrightarrow x = 1$ pelas conds. de contorno

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = 4\dot x(\dot x^2 - 1)$$

Função de Weierstrass:

$$E = (\dot X^2 - 1)^2 - (\dot x^2 - 1)^2 - 4\dot x(\dot x^2 - 1)\left[\dot X - \dot x\right]$$

$$E = (\dot X^2 - 1)^2 - (\dot x^2 - 1)^2 - 4\dot x \dot X(\dot x^2 - 1) + 4\dot x^2(\dot x^2 - 1)$$

$$E = (\dot X^2 - 1)^2 - (\dot x^2 - 1)\left[\dot x^2 - 1 - 4\dot x \dot X + 4\dot x^2\right]$$

No caso $\dot x = 0$

$$E = (\dot X^2 - 1)^2 - (0 - 1)\left[0 - 1 - 4.0\dot X + 4.0\right]$$

$$E = (\dot X^2 - 1)^2 - 1$$

Devemos ter $E \geq 0$ ou seja $(\dot X^2 - 1)^2 - 1 \geq 0$

47

Evidentemente esta condição não se mantém para toda função $\dot{X}$. Basta tomar $\dot{X}(t) = 1/2$ e verificar que o resultado é negativo.

Então $x = 1$ não pode ser mínimo forte.

b) Solução com quinas

Quando impusermos uma quina no nosso problema obtiveremos $\dot{x}_+ = \dot{x}_- = \pm 1$ e uma possível solução é

$$x(t) = t + 1 \qquad 0 \leq t \leq 1 \quad ; \ \dot{x}(t) = +1$$
$$x(t) = -t + 3 \qquad 1 \leq t \leq 2 \quad ; \ \dot{x}(t) = -1$$

Função de ~~[illegible]~~ Weierstrass:

$$E = (\dot{X}^2 - 1)^2 - (\dot{x}^2 - 1)^2 - 4\dot{x}(\dot{x}^2 - 1)(\dot{X} - \dot{x})$$

Com $\dot{x} = +1$, $0 \leq t \leq 1$

$$E = (\dot{X}^2 - 1)^2 - \cancel{(1-1)^2} - 4\dot{x}\,\cancel{(1-1)}(\dot{X} - \dot{x})$$

$$E = (\dot{X}^2 - 1)^2$$

Com $\dot{x} = -1$; $1 \leq t \leq 2$

$$E = (\dot{X}^2 - 1)^2$$

Então $E = (\dot{X}^2 - 1)^2 \geq 0 \ ; \ 0 \leq t \leq 2$

Esta condição se verifica para qualquer $\dot{X}(t)$. Logo a solução [acima] [com quinas] é uma solução de mínimo forte.

Condição de Legendre-Clebsch (118)

Consideramos a condição de Weierstrass para mínimo forte (necessária)

$$E = F[t, x(t), \dot{X}(t)] - F[t, x(t), \dot{x}(t)] - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}[t, x(t), \dot{x}(t)]\left[\dot{X}_j(t) - \dot{x}_j(t)\right] \geq 0$$

Se usarmos novamente condições de mínimo fraco, a condição de Weierstrass nos fornece uma ~~nova~~ relação de verificação.

Para variações fracas $F[t, x, \dot{X}]$ pode ser expandida em série em torno de $\dot{X}_i = \dot{x}_i$.

$$F(t, x, \dot{X}) = F(t, x, \dot{x}) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}(t, x, \dot{x})\,\delta\dot{x}_j +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k}(t, x, \dot{x})\,\delta\dot{x}_j\,\delta\dot{x}_k + o(\delta\dot{x}^2)$$

onde $\delta\dot{x}_j = \dot{X}_j - \dot{x}_j$ como já usado anteriormente

Substituindo a relação acima na condição de Weierstrass:

$$E = \cancel{F[t, x(t), \dot{x}(t)]} + \cancel{\sum \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}(t, x, \dot{x})\,\delta\dot{x}_j} + \frac{1}{2}\sum\sum \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k}\,\delta\dot{x}_j\,\delta\dot{x}_k +$$

$$\cancel{-F[t, x(t), \dot{x}(t)]} - \cancel{\sum \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}(t, x, \dot{x})\,\delta\dot{x}_j} \geq 0$$

Admitindo que nem todos os termos de 2ª ordem se anulem, temos que

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k}(t, x(t), \dot{x}(t))\,\delta\dot{x}_j\,\delta\dot{x}_k \geq 0}$$

Condição de LEGENDRE - CLEBSCH

Essa condição deve ser satisfeita por todos os extremais $x_i(t)$ com todos os $\delta\dot{x}$ consistentes com os vínculos dinâmicos

$$\delta\varphi = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_i}\,\delta\dot{x}_i = 0$$

para Π ser minimizado sob condições de vars. fracas.

Condição de Legendre (119) - Clebsch

3.5 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE

Na introdução do curso falamos sobre um sistema dinâmico governado pelas equações diferenciais

$$\{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m; t) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m, t) \end{Bmatrix}$$

Sobre um sistema dinâmico desse tipo é que desenvolveremos a teoria de controle ótimo.

Admitamos agora o seguinte problema:

Minimizar

$$IP = g[t_i, t_f; x_1(t_i), x_2(t_i), \ldots, x_n(t_i); x_1(t_f), x_2(t_f), \ldots, x_n(t_f)]$$

(forma de Mayer)

sujeito aos vínculos dinâmicos

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$$
$$\dot{x}_2 = f_2(t; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$$

e sujeito aos vínculos de contorno

$$\psi_1[t_i, t_f, x_1(t_i), x_2(t_i), \ldots, x_n(t_i); x_1(t_f), x_2(t_f), \ldots, x_n(t_f)] = 0$$
$$\psi_2[t_i, t_f; x_1(t_i), \ldots, x_n(t_f)] = 0$$
$$\vdots$$
$$\psi_p[t_i, t_f; x_1(t_i), \ldots, x_n(t_f)] = 0$$

com $p \leq 2n+1$ (problema de Mayer)

Note que tal problema é um caso particular do

(120) Mayer

problema de fronteiras móveis que tratamos anteriormente.

Também, não existe nenhuma restrição quanto à forma do IP: já vimos a equivalência entre prob. de Mayer e prob. de Bolza.

É importante verificar que ao presente problema existem m variáveis do sistema cujo único condicionamento é a minimização do IP. Estas são as variáveis que podem agir sobre o sistema. Conforme definimos, são as variáveis de controle. As n primeiras variáveis, que caracterizam a lei de evolução do sistema, como também já definimos, são as variáveis de estado.

Então, a partir desse ponto:

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad \text{variáveis de estado}$$

$$[u] = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad , \quad \text{variáveis de controle}$$

Em termos da nossa nomenclatura, nosso problema fica

$$IP = g[t_i, t_f, x_1(t_i), x_2(t_i), \ldots, x_n(t_i); x_1(t_f), x_2(t_f), \ldots, x_n(t_f)]$$

$$\boxed{IP = g[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)]}$$

com vínculos dinâmicos

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

$$\dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

ou $\boxed{\dot{x} = f(t, x, u)}$ com $f = \begin{Bmatrix} f_1(t,x,u) \\ f_2(t,x,u) \\ \vdots \\ f_n(t,x,u) \end{Bmatrix}$

(121) Mayer

e com vínculos de contorno:

$$\psi_1[t_i, t_f, x_1(t_i), x_2(t_i), \ldots, x_n(t_i), x_1(t_f), x_2(t_f), \ldots, x_n(t_f)] = 0$$
$$\psi_2[t_i, t_f, x_1(t_i), \ldots\ldots\ldots, x_n(t_f)] = 0$$
$$\vdots$$
$$\psi_p[t_i, t_f, x_1(t_i), \ldots\ldots\ldots, x_n(t_f)] = 0$$

ou $\psi[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] = 0$ com $[\psi] = \psi = \begin{bmatrix}\psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_p\end{bmatrix}$

Note que <u>nossas variáveis de controle só aparecem nos vínculos dinâmicos</u>. Veremos mais adiante que podem aparecer no integrando de IP, mas, necessariamente, <u>não podem aparecer nos contornos nas fronteiras!</u>

Se colocarmos os vínculos dinâmicos na forma:

$$\varphi_1(x, \dot{x}, t, u) = \dot{x}_1 - f_1(t, x, u) = 0$$
$$\varphi_2(x, \dot{x}, t, u) = \dot{x}_2 - f_2(t, x, u) = 0$$
$$\vdots$$
$$\varphi_n(x, \dot{x}, t, u) = \dot{x}_n - f_n(t, x, u) = 0$$

ou seja $\varphi = (\dot{x} - \bar{f})$ com $\bar{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$,

montamos $\boxed{F = \lambda^T(\dot{x} - \bar{f}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\,[\dot{x}_i - f_i(t, x, u)]}$

Apliquemos as equações de Euler Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

para as <u>n+m</u> variáveis do sistema.

Para as n primeiros, variáveis de estado, temos:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt}(\lambda_i) = \dot{\lambda}_i}$$

(122) Mayer

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

ou seja, n equações do tipo:

$$\dot{\lambda}_i - \left(-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right) = 0$$

Hamiltoniana

$$\boxed{\dot{\lambda}_i = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n} \qquad \dot{\lambda}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}$$

Estas equações são chamadas EQUAÇÕES ADJUNTAS do problema de controle ótimo

Para as m variáveis restantes, que chamamos variáveis de controle, a aplicação de Euler-Lagrange leva a:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad j = n+1, \ldots, m+n$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad , \quad i = n+1, \ldots, m+n$$

ou seja

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, m} \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = 0$$

Estas são as chamadas EQUAÇÕES DE CONTRÔLE do problema

Montemos agora a nossa função de contorno, usando para tanto multiplicadores μ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, constantes:

$$G[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] = g[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \, \psi_i[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)]$$

(123) Mayer

ou seja $\boxed{G = g + \nu^T \psi}$, com $\nu = \begin{Bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_p \end{Bmatrix}$

Colocando na mesma forma desenvolvida para as condições de transversalidade, isto é, supondo que todas as condições dadas no problema sejam colocadas na forma $\psi = 0$, podemos escrever para ~~as cond~~ as condições de contorno:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F\right)\right)_{t_i} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\left[\dot{x}_i - f_i(t,x,u)\right]\right) = \dot{x}_i \cdot \lambda_i$$

e como $\dot{x}_i = f_i$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i - \cancel{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{x}_i} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i}$$ e como

$$\dot{x}_i = f_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

Então

$$\frac{\partial G}{\partial t_i} + \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F\right]_{t_i} = 0 \implies \boxed{\frac{\partial G}{\partial t_i} + \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right]_{t_i} = 0} \qquad (1)$$

Das outras condições: $\dfrac{\partial G}{\partial x_j(t_i)} - \left.\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}\right|_{t_i} = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} = \lambda_j(t)$$

resulta

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial x_j(t_i)} - \lambda_j(t_i) = 0}$$

ou $$\boxed{\lambda_j(t_i) = \frac{\partial G}{\partial x_j(t_i)}} \qquad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (2)$$

$\frac{\partial F}{\partial x}$ (124) Mayer

Usando o mesmo raciocínio para $t = t_f$:

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial t_f} - \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right]_{t_f} = 0} \qquad (3)$$

$$\boxed{\lambda_j(t_f) = -\frac{\partial G}{\partial x_j(t_f)}} \qquad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (4)$$

o que nos leva às $2n+2$ condições de contorno necessárias para a solução do problema.

Podemos também colocar as condições de contorno acima na sua forma global para evitar confusões:

Em $t = t_1$

$$\boxed{\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \Big|_{t_1} + \frac{\partial G}{\partial t_1}\right) dt_1 = 0}$$

$$\boxed{\left(\lambda_j(t_1) - \frac{\partial G}{\partial x_j(t_1)}\right) dx_j(t_1) = 0} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Em $t = t_f$

$$\boxed{\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \Big|_{t_f} - \frac{\partial G}{\partial t_f}\right) dt_f = 0}$$

$$\boxed{\left(\lambda_j(t_f) + \frac{\partial G}{\partial x_j(t_f)}\right) dx_j(t_f) = 0} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Quanto às condições de quina de Weierstrass-Erdmann, temos, no instante t_1 em que aparece a quina:

$$-\text{de}\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}\Big|_{t_1^-} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}\Big|_{t_1^+} \quad ; \quad F = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\dot{x}_j - f_j)$$

Mayer 125

$$\boxed{\lambda_j\Big|_{t_1^-} = \hat{\lambda}_j\Big|_{t_1^+}} \quad , \; j = 1, 2, \ldots, n$$

(continuidade dos λ's no quino)

- de

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}\dot{x}_j - F\right]_{t_1^-} = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}\dot{x}_j - F\right]_{t_1^+}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}\dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j\right]_{t_1^-} = \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j\right]_{t_1^+}$$

Construamos agora a condição de Weierstrass para mínimo. Lembremos que, no caso

$$F = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\dot{x} - f(x,t,u)) = 0$$

e que as funções $\dot{X}$ de comparação para mínimo forte também satisfazem os vínculos dinâmicos, isto é:

$$\dot{X} - f(x,t,U) = 0$$

onde U é o controle que faz satisfazer o vínculo acima.

Com isso, a função de Weierstrass fica:

$$E = \underbrace{F[t, x(t), \dot{X}(t), U(t)]}_{0} - \underbrace{F[t, x(t), \dot{x}(t), u(t)]}_{0} - \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}(t,x,\dot{x},u)\left[\dot{X}_j - \dot{x}_j\right]\right\}$$

$$E = -\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}(t,x,\dot{x},u)\left[\dot{X}_j - \dot{x}_j\right]\right\} \geq 0$$

$$E = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)\left[f_j(t,x(t),U(t)) - f_j(t,x(t),u(t))\right] \geq 0$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) f_j(t,x(t),U(t)) \geq -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) f_j(t,x(t),u(t))$$

Mayer

(126)

ou $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)\, f_j(t,x,u) \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)\, f_j(t,x,U)$

Definimos então uma função, importantíssima, chamada **Hamiltoniana:**

$$\boxed{H(\lambda,x,u,t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)\, f_j(t,x,u)} \qquad H = \sum_j \lambda_j f_j$$

e substituindo na relação acima:

Obs.: A definição de H do Bryson é um pouco diferente

$$\boxed{H(\lambda,t,x(t),u(t)) \geq H(t,x(t),U(t),\lambda)}$$

ou $H(t,x^*,u^*) \geq H(t,x^*,U)$

Este resultado é equivalente ao chamado PRINCÍPIO DE MÁXIMO DE PONTRYAGUIN:

"A função u^* que minimiza o nosso IP torna máxima a Hamiltoniana".

Isto significa que a Hamiltoniana tem máximo para ~~u=~~ $U = u^*$, ou seja:

$$\boxed{\left.\frac{\partial H}{\partial U_j}\right|_{U=u^*} = 0} \qquad j = 1, \ldots, m$$

que nada mais são que as eqs de controle já determinadas.

e

$$\boxed{\left[\frac{\partial^2 H}{\partial U_j \partial U_i}\right]_{U=u^*} \text{ seja definida negativa}}$$

Determinação da forma da Hamiltoniana e do Princípio de Pontryaguin para o caso em que IP não é identicamente nulo, isto é:

$$\boxed{IP = g + \int_{t_i}^{t_f} f\,dt}$$ forma de Bolza

127

Imaginemos o problema na forma: (de Bolza)

$$IP = g[t_i, t_f, x_1(t_i), x_2(t_i) \dots, x_n(t_i); x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)] + \int_{t_i}^{t_f} f(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)\, dt$$

ou

$$\boxed{IP = g[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] + \int_{t_i}^{t_f} f(t, x, \dot{x})\, dt}$$

sujeito aos vínculos dinâmicos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x, u) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \boxed{\dot{x} = \bar{f}(t, x, u)}$$

e aos vínculos de contorno

$$\begin{cases} \psi_1(t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)) = 0 \\ \vdots \\ \psi_p(t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \psi[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] = 0$$

Observemos que as derivadas $\dot{x}$ das variáveis de estado são funções explícitas das variáveis de estado x e das variáveis de controle u, a função f do integrando de IP pode ser escrita em termos de t, x e u pois se f for função de alguma das $\dot{x}$, estas $\dot{x}$ podem ser substituídas pelos vínculos dinâmicos.

Podemos então escrever:

$$\boxed{IP = g[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] + \int^{t_f} f(t, x, u)\, dt}$$

vínculo dinâmico

A função F fica

$$\boxed{F(t, x, u, \dot{x}, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda^T [\dot{x} - \bar{f}(t, x, u)]}$$

vínculos de contorno

A função G fica:

$$\boxed{G[t_i, t_f; x(t_i), x(t_f), \nu] = g[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] + \nu^T \psi[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)]}$$

e

$$\boxed{\widetilde{IP} = G[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f), \nu] + \int_{t_i}^{t_f} F(t, x, u, \dot{x}, \lambda)\, dt}$$

Bolza

(128)

As equações de Euler-Lagrange aplicadas a esse caso ficam:

$$\boxed{\dot{\lambda}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial x_i} \qquad \text{Eqs. adjuntas}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u_i} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial u_i} = 0 \qquad \text{Eqs. de controle}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

As conds. de transversalidade aplicadas ao problema ficam:

para $t = t_i$:

a) $$\left[\frac{\partial G}{\partial t_i} - \left(F - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)_{t=t_i}\right] dt_i = 0$$

que leva a:

$$\boxed{\left[\frac{\partial G}{\partial t_i} - \left(-f + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{f}_j\right)\right] dt_i = 0}$$

b) $$\left[\frac{\partial G}{\partial x_i(t_i)} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)_{t=t_i}\right] dx_i(t_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

que leva a:

$$\boxed{\left[\frac{\partial G}{\partial x_i(t_i)} - \lambda_i(t_i)\right] dx_i(t_i) = 0} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

para $t = t_f$

a) $$\boxed{\left[\frac{\partial G}{\partial t_f} + \left(-f + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{f}_j\right)\right] dt_f = 0}$$

b) $$\boxed{\left[\frac{\partial G}{\partial x_i(t_f)} + \lambda_i(t_f)\right] dx_i(t_f) = 0} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Vejamos agora a função de Weierstrass:

Bolza (129)

$$E = F[t, x(t), \dot{\bar{X}}(t), \bar{U}(t), \lambda] - F[t, x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda] - \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) [\dot{\bar{X}}_j - \dot{x}_j] \right\} \geq 0$$

$$E = f(t, x(t), \bar{U}) + \lambda^T(\underbrace{\dot{\bar{X}} - \bar{f}(t, x, \bar{U})}_{\to 0}) - f(t, x(t), u) - \lambda^T(\underbrace{\dot{x} - f(t, x, u)}_{\to 0}) +$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} [f(t, x, u) + \lambda^T(\dot{x} - f(t, x, u))] [\dot{\bar{X}}_j - \dot{x}_j] \right\} \geq 0$$

$$E = f(t, x(t), \bar{U}) - f(t, x(t), u) - \sum_{j=1}^{n} \{ \lambda_j(t) [\dot{\bar{X}}_j - \dot{x}_j] \} \geq 0$$

$$E = f(t, x(t), \bar{U}) - f(t, x(t), u) - \sum_{j=1}^{n} \{ \lambda_j(t) [f_j(t, x, \bar{U}) - f_j(t, x, u)] \} \geq 0$$

e, finalmente:

$$\boxed{E = \left\{ f(t, x(t), \bar{U}) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(t, x, \bar{U}) \right\} - \left\{ f(t, x, u) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(t, x, u) \right\} \geq 0}$$

Definimos nossa nova Hamiltoniana por:

$$\boxed{\bar{H} = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \right) - f}$$

e podemos escrever o Princípio de Pontryaguin como anteriormente, isto é:

$$\bar{H}(t, x(t), u(t)) \geq \bar{H}(t, x(t), \bar{U}(t))$$

ou seja, para $u = u^*$

$$\boxed{\bar{H}(t, x^*, u^*) \geq \bar{H}(t, x^*, \bar{U})}$$

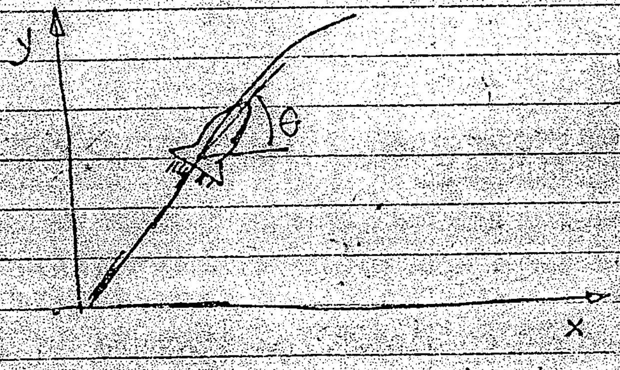
130

Exemplo: O Problema de Decolagem da Lua

O problema será tratado de uma maneira simplificada.

Imaginemos uma nave na superfície lunar deve ser colocada numa altitude especificada em órbita com uma dada velocidade por uma aplicação apropriada do empuxo T de modo a minimizar o tempo necessário para realizar a manobra.

Admitamos, por simplicidade, que a distância vertical a ser percorrida, embora não especificada, seja suficientemente pequena para que a curvatura da lua seja desprezada. Com isso, a gravidade lunar, g_m, pode ser considerada constante em direção. Se admitirmos, também, que a altitude a ser alcançada não é grande quando comparada com o raio da lua, ~~o que faz com que~~ podemos considerar o módulo de g_m constante.



As equações do movimento do espaçonave são, então:

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= T\cos\theta \\ m\ddot{y} &= T\,\text{sen}\,\theta - m g_m \end{aligned}}$$

θ é o ângulo de empuxo e $m(t)$ a massa da nave

Como última restrição, imporemos que a aceleração de empuxo $\boxed{A = T/m}$ é constante. Então

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= A\cos\theta \\ \ddot{y} &= A\,\text{sen}\,\theta - g_m \end{aligned}}$$

Nossa variável de controle será θ, ângulo de empuxo
O problema agora é o de minimizar o tempo t_f, isto é:

$$\boxed{IP = t_f}$$

tempo necessário para ir da superfície em $t = 0$, com velocidade nula, até a altitude final h, onde a velocidade é horizontal e tem módulo U. Então

em $t = 0 = t_i$ $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{array} \right.$

em $t = t_f$ (não especificado) $\left\{ \begin{array}{l} x \text{ não conhecido} \\ y = h \\ \dot{x} = U \\ \dot{y} = 0 \end{array} \right.$

Para colocar o sistema na forma apresentada, definimos

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_1 = x & \text{e } x_2 = y \\ \dot{x}_1 = \dot{x} = x_3 & \text{e } \dot{x}_2 = \dot{y} = x_4 \\ \theta = u & \end{array}}$$

e teremos

$$IP = t_f$$

com vínculos dinâmicos

$$\boxed{\begin{array}{lll} \dot{x}_1 = f_1 & = & x_3 \\ \dot{x}_2 = f_2 & = & x_4 \\ \dot{x}_3 = f_3 & = & A\cos u \\ \dot{x}_4 = f_4 & = & A\,\text{sen}\, u - gm \end{array}}$$

e vínculos de contorno

$$\boxed{\begin{array}{ll} \psi_1 = t_i = 0 & \left\{ \begin{array}{l} t_f \text{ não especif.} \\ x_1(t_f) \text{ não especif.} \end{array} \right. \\ \psi_2 = x_1(t_i) = 0 & \\ \psi_3 = x_2(t_i) = 0 & \psi_6 = x_2(t_f) = h \\ \psi_4 = x_3(t_i) = 0 & \psi_7 = x_3(t_f) = U \\ \psi_5 = x_4(t_i) = 0 & \psi_8 = x_4(t_f) = 0 \end{array}}$$

132

$$F = \lambda^T(\dot{x} - \bar{f}) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i (\dot{x}_i - f_i)$$

$$F = \lambda_1(\dot{x}_1 - x_3) + \lambda_2(\dot{x}_2 - x_4) + \lambda_3(\dot{x}_3 - A\cos u) + \lambda_4(\dot{x}_4 - A\,\mathrm{sen}\,u + gm)$$

Eqs. adjuntas $\quad \dot{\lambda}_i = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$

$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1(t) = \bar{\lambda}_1 = \text{const.}$

$\dot{\lambda}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2(t) = \bar{\lambda}_2 = \text{const.}$

$\dot{\lambda}_3 = -\lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3(t) = -\bar{\lambda}_1 t + \bar{\lambda}_3$

$\dot{\lambda}_4 = -\lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_4(t) = -\bar{\lambda}_2 t + \bar{\lambda}_4$

Eq. controle $\quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\partial f_i}{\partial u} = 0$ $\qquad$ Só temos uma equação controle por só termos um

$\lambda_3 A\,\mathrm{sen}\,u - \lambda_4 A \cos u = 0$ $\qquad$ controle: $u = \theta$

Admitindo λ_3 e $\cos u \neq$s de zero:

$$\mathrm{tg}\,u = \frac{\lambda_4(t)}{\lambda_3(t)}$$

Esta equação apenas não basta para determinar o controle pois

$$\mathrm{sen}\,u = \frac{\pm\lambda_4(t)}{[\lambda_3^2(t) + \lambda_4^2(t)]^{1/2}} \; ; \quad \cos u = \frac{\pm\lambda_3(t)}{[\lambda_3^2(t) + \lambda_4^2(t)]^{1/2}}$$

e é necessário determinar o sinal.

Isto pode ser feito pelo uso do Princípio de Máximo.

$$H = \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 + \lambda_3 A \cos u + \lambda_4(A\,\mathrm{sen}\,u - gm)$$

Para $u = u^*$, solução, devemos ter

$$H(t, x^*, u^*) \geq H(t, x^*, u)$$

$$\lambda_1 \cancel{x_3^*} + \lambda_2 \cancel{x_4^*} + \lambda_3 A \cos u^* + \lambda_4 (A \operatorname{sen} u^* - \cancel{g_m}) \geq \lambda_1 \cancel{x_3^*} + \lambda_2 \cancel{x_4^*} + \lambda_3 A \cos \bar{U} + \lambda_4 (A \operatorname{sen} \bar{U} - \cancel{g_m})$$

$$\lambda_3 A \cos u^* + \lambda_4 A \operatorname{sen} u^* \geq \lambda_3 A \cos \bar{U} + \lambda_4 A \operatorname{sen} \bar{U}$$

a Hamiltoniana irá-se maximizar para o valor positivo de λ_i

$$A\left[\frac{\lambda_3 (\pm \lambda_3) + \lambda_4 (\pm \lambda_4)}{[\lambda_3^2 + \lambda_4^2]^{1/2}}\right] \geq A\left[\frac{\lambda_3 (\pm \bar{\lambda}_3) + \lambda_4 (\pm \bar{\lambda}_4)}{[\bar{\lambda}_3^2 + \bar{\lambda}_4^2]^{1/2}}\right]$$

Logicamente a desigualdade só se verifica se o sinal for positivo, isto é

$$\operatorname{sen} u^*(t) = \frac{\lambda_4(t)}{[\lambda_3^2(t) + \lambda_4^2(t)]^{1/2}} \quad ; \quad \cos u^*(t) = \frac{\lambda_3(t)}{[\lambda_3^2(t) + \lambda_4^2(t)]^{1/2}}$$

Restam ainda 9 constantes a determinar
- as 4 constantes $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4$
- as 4 constantes que aparecem na integração dos vínculos dinâmicos
- o tempo final t_f

Temos por enquanto 7 vínculos de contorno. Precisamos mais 2 ~~eqs~~ relações da condição de transversalidade.

Como: $dt_i = dx_1(t_i) = dx_2(t_i) = dx_3(t_i) = dx_4(t_i) = 0$

$dx_2(t_f) = dx_3(t_f) = 0 = dx_4(t_f) = 0$

a condição de transversalidade se reduz a

$$\lambda_1(t_f) = -\frac{\partial G}{\partial x_1(t_f)} = 0 \Rightarrow \lambda_1(t_f) = 0 \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial G}{\partial t_f} = 0$$

$$\left[\lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 + \lambda_3 A \cos u + \lambda_4 (A \operatorname{sen} u - g_m)\right]\Big|_{t_f} - 0 = 0 \quad (9)$$

134

Como $\lambda_1(t) = \bar{\lambda}_1 = \text{const}$ e $\lambda_1(t_f) = 0$, $\bar{\lambda}_1 = 0$

e $\lambda_1(t) = 0$

Com isso $\lambda_3(t) = \bar{\lambda}_3$

e $$\operatorname{tg} u^* = \frac{\lambda_4(t)}{\lambda_3(t)} = \frac{-\bar{\lambda}_2 t + \bar{\lambda}_4}{\bar{\lambda}_3} = \alpha t + \beta$$

ou

$$\operatorname{sen} u^* = \frac{\alpha t + \beta}{[1 + (\alpha t + \beta)^2]^{1/2}}$$

$$\cos u^* = \frac{1}{[1 + (\alpha t + \beta)^2]^{1/2}}$$

Citron

Não vamos integrar as equações diferenciais. Citron fez isto e obteu como resposta final

$$t_f = \frac{\operatorname{tg} u^*_f}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}$$

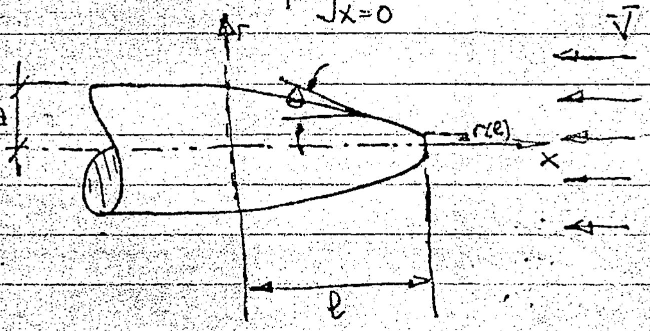
onde u^*_f é o valor de u no instante t_f que pode ser determinado pelas soluções de Citron fazendo mudanças de variáveis.

Exemplo: (135)

forma da Bala para maior resistência ao escoamento

A pressão de arrasto de um corpo de revolução num ângulo de ataque zero (0) num escoamento foi obtida por Newton em 1686 na expressão

$$D = -2\pi q \int_{x=0}^{\ell} C_p(\theta)\, r\, dr$$



Newton imaginou que esta solução serviria para qualquer tipo de escoamento. Na realidade, mostrou-se depois que tal fórmula só vale na hipótese de escoamento hipersônico, isto é, com número de Mach M tal que $M \underset{>5}{\geq 3}$, aproximadamente. As hipóteses de Newton falham para nos Mach menores.

Explicitamos

$$D = -2\pi q \int_{x=0}^{\ell} C_p(\theta)\, r\, dr$$

q - pressão dinâmica sobre o corpo

C_p - coeficiente de pressão, dado por

$$C_p(\theta) = \begin{cases} 2\,\mathrm{sen}^2\theta & \theta \geq 0 \\ 0 & \theta < 0 \end{cases}$$

D - resistência ao escoamento

ℓ, comprimento em que a forma pode variar e a, raio máximo do corpo, são dados.

Temos que $\frac{dr}{dx} = -tg\theta$ e escolheremos $tg\theta$ como nossa variável de controle:

$$\frac{dr}{dx} = -tg\theta = -u$$

Agora, como $C_p = 2$ para $\theta = 90°$

$$\frac{D}{4\pi q} = -\frac{1}{2}\int_{x=0}^{\ell} C_{p(\theta)}\, r\, dr = -\frac{1}{2}\int_{r=a}^{r=r(\ell)} 2\,sen^2\theta\, r\, dr - \frac{1}{2}\int_{r=r(\ell)}^{0} 2\, r\, dr$$

$$\frac{D}{4\pi q} = -\int_{r=a}^{r=r(\ell)} sen^2\theta\, r\, dr - \int_{r(\ell)}^{0} r\, dr$$

$$\int_{r(\ell)}^{0} r\, dr = -\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r(\ell)}^{0} = \frac{r^2_{(\ell)}}{2}$$

$$-\int_{r=a}^{r(\ell)} sen^2\theta\, r\, dr = -\int_0^{\ell} sen^2\theta . r . \frac{dr}{dx}\, dx = +\int_0^{\ell} sen^2\theta\, u\, r\, dx$$

$$sen^2\theta = \frac{tg^2\theta}{1+tg^2\theta} = \frac{u^2}{1+u^2}$$

$$\frac{D}{4\pi q} = \frac{r^2_{(\ell)}}{2} + \int_0^{\ell} \frac{u^3 r}{1+u^2}\, dx$$

Reordenemos nosso problema. Temos de minimizar

$$I^P = \frac{D}{4\pi q} = \frac{r^2_{(\ell)}}{2} + \int_0^{\ell} \frac{u^3 r}{1+u^2}\, dx$$

com vínculo dinâmico: $\frac{dr}{dx} = \dot{r} = -u$

e com vínculos de contorno: $\psi_1 = x_i = 0$; $\psi_2 = r_i = a$

$\psi_3 = x_f = \ell$; $r_{(\ell)}$ não especificado

137

Então, temos:

$$f = \frac{u^3 r}{1+u^2} \quad e \quad F = \frac{u^3 r}{1+u^2} + \lambda(\dot{r} + u)$$

Equação adjunta em r, variável de estado:

$$\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{r}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{u^3}{1+u^2} \;;\; \frac{\partial F}{\partial \dot{r}} = \lambda \;;\; \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{r}} = \dot{\lambda}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{u^3}{1+u^2}$$

Equação de controle

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right) = \frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{3u^2 r(1+u^2) - ru^3(2u)}{(1+u^2)^2} + \lambda = \frac{3u^2 r(1+u^2) - 2ru^4}{(1+u^2)^2} + \lambda = \frac{u^2 r(3+3u^2-2u^2)}{(1+u^2)^2} + \lambda$$

$$\cancel{\frac{\partial F}{\partial u}} \qquad \lambda = -\frac{ru^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2}$$

Poderíamos tentar resolver por substituição, mas cairíamos numa equação diferencial não linear (em λ), impossível de resolver na mão.

Vejamos agora as condições de contorno. Usando a condição de transversalidade e lembrando que:

$$dx_i = dx_f = dr(0) = 0$$

pois x_i, x_f e r_0 são fixos, resta apenas

$$\frac{\partial G}{\partial r(\ell)} + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{r}}\right|_{x_f=\ell} = 0$$

138

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \lambda \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial r(e)} = r(e)$$

Temos que

$$r(e) + \lambda(e) = 0$$

$$\boxed{r(e) = -\lambda(e)}$$

Substituindo este resultado em:

$$\lambda = -\frac{r u^2 (3+u^2)}{(1+u^2)^2}$$

vem:

$$\lambda(e) = -r(e) = -r(e)\frac{u^2_{(e)}(3+u^2_{(e)})}{(1+u^2_{(e)})^2}$$

Agora, isto só ocorre se:

$$r(e) = \lambda(e) = 0$$

ou se $u(e) = 1$ ($\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45°$ - condição de chanfro

A condição de $r(e)$ é restritiva e não nos interessa. Portanto, será abandonada.

Para evitar cair na integração de uma equação diferencial não linear, usaremos o fato de F não ser explícito na variável independente x, o que permite escrever

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - F = \text{const.} \quad \text{(vem da Eq. Euler-Lagrange)}$$

$$\dot{r}\frac{\partial F}{\partial \dot{r}} - F = \text{const.}$$

$$\dot{r}\lambda - \left[\frac{u^3 r}{1+u^2} + \lambda(\dot{r}+u)\right] = \text{const.}$$

139

$$\cancel{\dot{r}\lambda} - \frac{u^3 r}{1+u^2} - \cancel{\lambda \dot{r}} - \lambda u = \text{const.}$$

$$\cancel{H} = \frac{u^3 r}{1+u^2} + \lambda u = \text{const.}$$

No ponto $x_p = \ell$

$$H = \frac{[u(\ell)]^3 r(\ell)}{[1+u(\ell)]^2} + \lambda(\ell)\, u(\ell) = \text{const.}$$

Como $u(\ell) = 1$ e $\lambda(\ell) = -r(\ell)$

$$H = \frac{1 \cdot r(\ell)}{(1+1)^2} + (-r(\ell)) \cdot r(\ell) = \frac{r(\ell)}{2} - r(\ell) = -\frac{r(\ell)}{2}; \text{const.}$$

Temos, então

$$\frac{u^3 r}{1+u^2} + \lambda u = -\frac{r(\ell)}{2}$$

Substituindo $\lambda = -\frac{r u^2 (3+u^2)}{(1+u^2)^2}$

$$\frac{u^3 r}{1+u^2} - \frac{r u^3 (3+u^2)}{(1+u^2)^2} = -\frac{r(\ell)}{2}$$

$$\frac{u^3 r}{(1+u^2)^2} \left[1+\cancel{u^2}-3-\cancel{u^2}\right] = -\frac{r(\ell)}{2}$$

$$-\frac{2 r u^3}{(1+u^2)^2} = -\frac{r(\ell)}{2}$$

$$\boxed{\frac{r}{r(\ell)} = \frac{(1+u^2)^2}{4u^3}} \quad (1)$$

Temos, ainda: $\frac{dr}{dx} = -u \Rightarrow -u = \frac{dr}{du}\frac{du}{dx}$

$$dx = -\frac{1}{u}\frac{dr}{du}\, du$$

149

$$\int_{\ell}^{x} dx = -\int_{1}^{u} \frac{1}{u}\frac{dr}{du}\,du$$

$$\ell - x = \int_{1}^{u} \frac{1}{u}\frac{d}{du}\left[\frac{(1+u^2)^2}{4u^3}\right]du$$

Integrando obtemos

$$\boxed{\frac{\ell - x}{r(\ell)} = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{4u^4} + \frac{1}{u^2} - \frac{7}{4} - \log\frac{1}{u}\right]} \qquad (2)$$

Impondo, agora as condições em $x=0$

$r(0) = a$

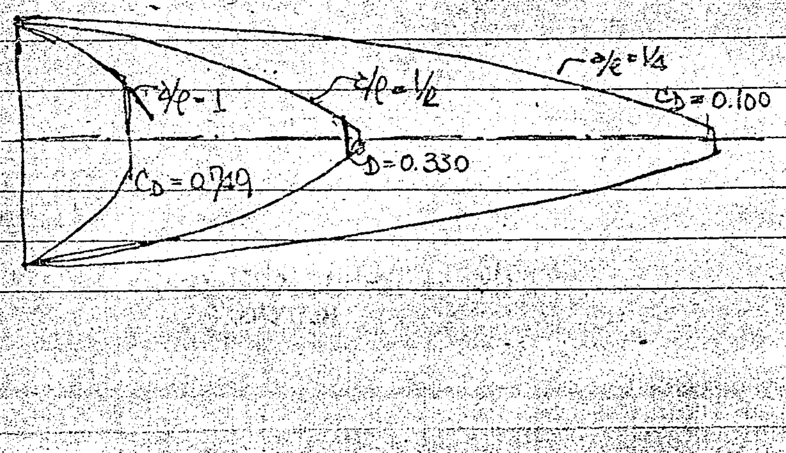
$u(0) = u_0$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{r(\ell)} = \dfrac{(1+u_0^2)^2}{4u_0^3} \\[2ex] \dfrac{\ell}{r(\ell)} = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{3}{4u_0^2} + \dfrac{1}{u_0^2} - \dfrac{7}{4} - \log\dfrac{1}{u_0}\right] \end{cases}$$

Destas 2 equações transcendentais obtemos u_0 e $r(\ell)$

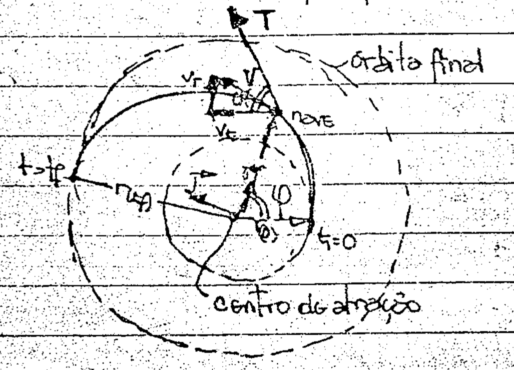
As equações (1) e (2) são equações paramétricas para a forma ótima do corpo. Resolvidas essas equações, é possível obter o coeficiente de mínimo arrasto:

$$C_D = \frac{D}{q\pi a^2} = \frac{u_0^2}{(1+u_0^2)^2}\left(3 + 10u_0^2 + 17u_0^4 + 2u_0^6 + 4u_0^4\log\frac{1}{u_0}\right)$$



Exemplo:

Órbita de transferência com raio máximo num ~~tempo~~ intervalo de tempo fixo.



Dado um foguete com motor de empuxo constante T, capaz de operar por um dado intervalo de tempo 0 - t_f, queremos achar a direção de aplicação do empuxo, $\underline{u}(t)$, para transferir uma nave de uma dada órbita circular para a órbita circular de maior raio.

Então nosso IP é $\quad IP = -r(t_f) \quad$ [maximizar $r(t_f)$]

Definimos:

r - distância da nave ao centro de atração
v_r - velocidade radial
v_t - " tangencial
m - massa
$\dot{m}$ - taxa de consumo de combustível
α - controle
μ - constante gravitacional.

São dados do problema

t_f - dado
$t_i = 0$
$r(t_i) = r_0$
$v_t(0) = \sqrt{\mu / r_0}$

$v_r(0) = 0$

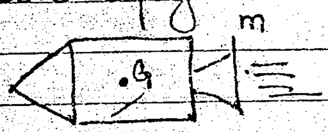
$v_r(t_f) = 0$
$v_t(t_f) = \sqrt{\dfrac{\mu}{r(t_f)}}$

142

Força de atração $F = GM\frac{m}{r^2} = \mu\frac{m}{r^2}$

Empuxo $\vec{T} = \frac{dm_g}{dt}\vec{v_G}$

Para o foguete



$$\frac{d}{dt}(m\vec{v_G}) = \vec{R}^{ext}$$

$$\frac{dm}{dt}\vec{v_G} + m\frac{d\vec{v_G}}{dt} = -\frac{\mu m}{r^2}\vec{r}$$

$$\vec{v_G} = v_t\vec{j} + v_r\vec{i}$$

$$\frac{d\vec{v_G}}{dt} = \dot{v}_t\vec{j} + v_t\dot{\vec{j}} + \dot{v}_r\vec{i} + v_r\dot{\vec{i}}$$

$$\dot{\vec{j}} = \vec{\dot\varphi}\wedge\vec{j} = -\dot\varphi\vec{i}$$

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\dot\varphi}\wedge\vec{i} = \dot\varphi\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{v_G}}{dt} = \dot{v}_t\vec{j} - v_t\dot\varphi\vec{i} + \dot{v}_r\vec{i} + v_r\dot\varphi\vec{j}$$

$$\dot\varphi = \frac{v_t}{r}$$

$$\frac{d\vec{v_G}}{dt} = \dot{v}_t\vec{j} - \frac{v_t^2}{r}\vec{i} + \dot{v}_r\vec{i} + \frac{v_r v_t}{r}\vec{j}$$

$$\vec{T} = T\cos\alpha\,\vec{j} + T\operatorname{sen}\alpha\,\vec{i} = \frac{dm}{dt}\vec{v_G}$$

$$m = m_0 - |\dot m|t$$

$$T\cos\alpha\,\vec{j} + T\operatorname{sen}\alpha\,\vec{i} + m\dot{v}_t\vec{j} - m\frac{v_t^2}{r}\vec{i} + m\dot{v}_r\vec{i} + m\frac{v_r v_t}{r}\vec{j} + \frac{\mu m}{r^2}\vec{r} = 0$$

$$\left(\frac{T\cos\alpha}{m} + \dot{v}_t + \frac{v_r v_t}{r}\right)\vec{j} + \left(\frac{T\operatorname{sen}\alpha}{m} - \frac{v_t^2}{r} + \dot{v}_r + \frac{\mu}{r^2}\right)\vec{i} = 0$$

Decorrem as equações:

$$\dot{v}_t = -\frac{v_r v_t}{r} - \frac{T\cos\alpha}{m_0 - |\dot m|t}$$

142

$$\dot{v}_r = \frac{v_t^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} - \frac{T\,\mathrm{sen}\,\alpha}{m_0 - |\dot{m}|t}$$

Além desses, tinhamos

$$\dot{r} = v_r$$

Recordemos agora o nosso problema:

Minimizar

$$IP = -r(t_f)$$

com vincs. dinâmicos

$$\dot{r} = v_r$$

$$\dot{v}_r = \frac{v_t^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} - \frac{T\,\mathrm{sen}\,\alpha}{m_0 - |\dot{m}|t}$$

$$\dot{v}_t = -\frac{v_r v_t}{r} - \frac{T\cos\alpha}{m_0 - |\dot{m}|t}$$

com vincs. contorno

$\psi_1 = t_i = 0$

$\psi_2 = r(t_i) - r_0 = 0$

$\psi_3 = v_t(t_i) - \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} = 0$

$\psi_4 = v_r(t_i) = 0$

$\psi_5 = t_f - \text{dado}$

$\psi_6 = v_t(t_f) - \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}}$

$\psi_7 = v_r(t_f) = 0$

Montamos

$$F = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \varphi_i$$

$$F = \lambda_1(\dot{r} - v_r) + \lambda_2\left(\dot{v}_r + \frac{T\,\mathrm{sen}\,\alpha}{m_0 - |\dot{m}|t} + \frac{\mu}{r^2} - \frac{v_r^2}{r}\right) + \lambda_3\left(\dot{v}_t + \frac{v_r v_t}{r} + \frac{T\cos\alpha}{m_0 - |\dot{m}|t}\right)$$

Eqs. adjuntas:

$$\dot{\lambda}_j = -\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

$x_1 = r$

$x_2 = v_r$

$x_3 = v_t$

$$\dot{\lambda}_1 = -\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial r} \quad (144)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_2\left(-\frac{v_t^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r^3}\right) - \lambda_3\left(\frac{v_r v_t}{r^2}\right)$$

$$\boxed{\dot{\lambda}_1 = \lambda_2\left(\frac{v_t^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3}\right) - \lambda_3\left(\frac{v_r v_t}{r^2}\right)}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial v_r}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 . 1 - \lambda_3\left(-\frac{v_t}{r}\right)$$

$$\boxed{\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 + \lambda_3\frac{v_t}{r}}$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial v_t}$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\lambda_1 . 0 - \lambda_2\left(\frac{2v_t}{r}\right) - \lambda_3\left(-\frac{v_r}{r}\right)$$

$$\boxed{\dot{\lambda}_3 = -\frac{2\lambda_2 v_t}{r} + \frac{\lambda_3 v_r}{r}}$$

Equação de controle

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_j} = 0$$

$$\lambda_1 . 0 - \lambda_2 \frac{T\cos\alpha}{m_0 - |\dot{m}|t} + \lambda_3 \frac{T \operatorname{sen}\alpha}{m_0 - |\dot{m}|t} = 0$$

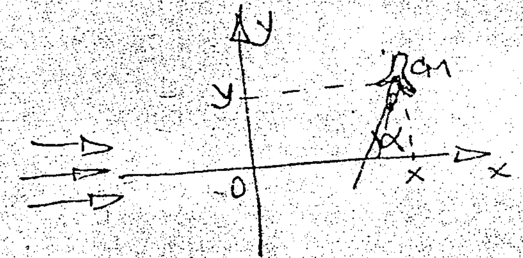
$$\frac{T}{m_0 - |\dot{m}|t}\left[\lambda_3 \operatorname{sen}\alpha - \lambda_2\cos\alpha\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 \operatorname{tg}\alpha = \lambda_2}$$

Função de contorno:

$$G = g + \sum_{j=1}^{p} \nu_j \psi_j$$

Problema de Chaplygin — colocar na formulação de controle

Em qual curva fechada estará o C.M. de um avião, voando na horizontal (plano horizontal) com velocidade constante (relativa) v_0 se o avião deve voar englobando a máxima área num dado tempo T? Considere o vento com direção constante e velocidade constante $a < v_0$. Aplicação: agricultura



veloc. absoluta

$$\dot x = v_0\cos\alpha + a$$
$$\dot y = v_0 \,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$A = \oint \vec r \wedge \vec v \, dt = \oint (x\vec i + y\vec j)\wedge(\dot x\vec i - \dot y\vec j)\,dt$$

$$IP = A = \frac{1}{2}\int_0^T (x\dot y - y\dot x)\,dt$$

$$F = \frac{1}{2}(x\dot y - y\dot x) + \lambda_1(\dot x - v_0\cos\alpha - a) + \lambda_2(\dot y - v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

$$\dot\lambda_1 = \dot y$$

E.E.L.: $\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}y + \lambda_1\right) - \frac{1}{2}\dot y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\dot y + \dot\lambda_1 - \frac{1}{2}\dot y = 0$ $\quad\boxed{y = \lambda_1}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x + \lambda_2\right) + \frac{1}{2}\dot x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\dot x + \dot\lambda_2 + \frac{1}{2}\dot x = 0$ $\quad\boxed{x = \lambda_2}$

trans. eixos $\quad \dot x = -\dot\lambda_2$

E.C.: $-\lambda_2 v_0\cos\alpha + \lambda_1 v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0$

$\lambda_2\cos\alpha - \lambda_1\,\mathrm{sen}\,\alpha$

Na eq. controle

$$x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0$$

Mas $\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{v_0}\dot y$;

Mud. coords: $x = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$; $y = -r\cos\alpha$

$$\cancel{\left(\frac{1}{v_0}\dot y\right)^2 + \left(\frac{\dot x - a}{v_0}\right)^2 = 1}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2r\dot r = 2x\dot x + 2y\dot y$$
$$r\dot r = r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\dot x - r\cos\alpha\,\dot y$$

$\Rightarrow \dot r = (v_0\cos\alpha + a)\,\mathrm{sen}\,\alpha - (v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha)\cos\alpha$

$\dot r = a\,\mathrm{sen}\,\alpha$

$\dot r = \frac{a}{v_0}\dot y$

$\dot r = \frac{a}{v_0}\dot y$

$r = \frac{a}{v_0} y + C$

$$\boxed{\sqrt{x^2+y^2} = \frac{a}{v_0} y + C} \Rightarrow$$

{ elipse com foco na origem
eixo maior $\perp$ direcção vento
excentricidade $\frac{a}{v_0}$

Como $tg\alpha = -\frac{x}{y}$ — declividade da normal ao eixo do avião — a normal à velocidade (aceleração) passa por um ponto fixo.

$\sum \dot x \frac{\partial F}{\partial \dot x} - F = const$

$\dot x = v_0 \cos\alpha + a$
$\dot y = v_0 \,sen\,\alpha$

EEL $\Rightarrow \dot\lambda_1 = \dot y = v_0\, sen\,\alpha$ (1)
$\dot\lambda_2 = -\dot x = -(v_0\cos\alpha + a)$ (2) $\Rightarrow v_0\cos\alpha = -(\dot\lambda_2 + a)$

EC: $-\lambda_2 v_0 \cos\alpha + \lambda_1 v_0\, sen\,\alpha = 0$ (3)

$\lambda_1\dot\lambda_1 - \lambda_2(-\dot\lambda_2 - a) = 0$
$\lambda_1\dot\lambda_1 + \dot\lambda_2\lambda_2 + \lambda_2 a = 0$
$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \lambda_2 a = 0$ $\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot y}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$

(3) $tg\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Rightarrow 1$

$A = \int_1^T y\dot x\, dt \qquad F = y\dot x - \lambda_1(\dot x - v_0\cos\alpha - a) + \lambda_2(\dot y - v_0\, sen\,\alpha)$

EEL, EAdj $\Rightarrow \frac{d}{dt}(y + \lambda_1) = 0 \Rightarrow y + \lambda_1 = const = 0 \qquad y = -\lambda_1$
$\frac{d}{dt}(\lambda_2) - \dot x = 0 \Rightarrow \dot\lambda_2 - \dot x = 0 \Rightarrow \lambda_2 - x = const = 0;\ x = \lambda_2$

ECont $\Rightarrow +\lambda_1 v_0\, sen\,\alpha - \lambda_2 v_0\cos\alpha = 0 \Rightarrow x\cos\alpha + y\, sen\,\alpha = 0$

$x = r\cos\alpha,\ y = r\, sen\,\alpha$
$r^2 = x^2 + y^2$
$2r\dot r = 2x\dot x + 2y\dot y$
$r\dot r = r\cos\alpha\,\dot x + r\, sen\,\alpha\,\dot y$

$\dot r = \dot x\cos\alpha + \dot y\, sen\,\alpha$
$= (v_0\cos\alpha + a)\cos\alpha + (v_0\, sen\,\alpha)\, sen\,\alpha$
$= v_0(\cos^2\alpha + sen^2\alpha) + a\cos\alpha = v_0 + a\cos\alpha$
$\dot r = v_0 + a\cos\alpha \Rightarrow \dot r = v_0 + a\frac{x}{r}$

Como todas as variáveis são conhecidas em $t_i = 0$, isto é,
$t_i = 0 \Rightarrow r(t_i) = r_0$; $V_t(0) = \sqrt{\mu/r_0}$; $V_r(0) = 0$, ~~usando~~
então

$$\left[\frac{\partial G}{\partial t_i} + \sum \lambda_j f_j\Big|_{t_i}\right] \cancel{dt_i}^{\,0} = 0$$

$$\left[\lambda_j(t_i) - \frac{\partial G}{\partial x_j(t_i)}\right] \cancel{dx_i}^{\,0} = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

e definiremos a G apenas com os vínculos em t_f:

$$G = g + \sum_{j=1}^{3} \nu_{j+4}\,\psi_{j+4} = g + \nu_5\psi_5 + \nu_6\psi_6 + \nu_7\psi_7$$

$$G = -r(t_f) + \nu_5\,t_f + \nu_6\left(v_t(t_f) - \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}}\right) + \nu_7\,V_r(t_f)$$

$$-\ \frac{\partial G}{\partial t_f} + \sum \lambda_j f_j\Big|_{t_f} = 0$$

$$\nu_5 + \lambda_1(t_f)\,V_r(t_f) + \lambda_2(t_f)\left[\frac{T\,\mathrm{sen}\,\alpha(t_f)}{m_0 - |\dot m|\,t_f} + \frac{\mu}{r^2(t_f)} - \frac{V_t^2(t_f)}{r(t_f)}\right] + \lambda_3(t_f)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{V_r(t_f)\,V_t(t_f)}{r(t_f)} + \frac{T\cos\alpha(t_f)}{m_0 - |\dot m|\,t_f}\right] = 0$$

$$-\ \frac{\partial G}{\partial r(t_f)} + \lambda_1(t_f) = 0$$

$$-1 + \nu_6\,\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\mu}}{[r(t_f)]^2} + \lambda_1(t_f) = 0$$

$$-\ \frac{\partial G}{\partial V_r(t_f)} + \lambda_2(t_f) = 0$$

(148)

$$\left[\nu_7 + \lambda_2(t_f) = 0 \right.$$

$$-\frac{\partial G}{\partial v_t(t_f)} + \lambda_3(t_f) = 0$$

$$\left[\nu_6 + \lambda_3(t_f) = 0 \right.$$

Problema agora é resolver o sistema:

1) $\dot{r} = v_r$

2) $\dot{v}_r = \frac{v_t^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} - \frac{T \operatorname{sen}\alpha}{m_0 - |\dot{m}|t}$

3) $\dot{v}_t = -\frac{v_r v_t}{r} - \frac{T\cos\alpha}{m_0 - |\dot{m}|t}$

4) $\dot{\lambda}_1 = \lambda_2\left(\frac{v_t^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3}\right) - \lambda_3\left(\frac{v_r v_t}{r^2}\right)$

5) $\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 + \lambda_3 \frac{v_r}{r}$

6) $\dot{\lambda}_3 = -\frac{2\lambda_2 v_t}{r} + \frac{\lambda_3 v_r}{r}$

7) $\lambda_3 \operatorname{tg}\alpha = \lambda_2$

com as condições de contorno

1) $t_i = 0$

2) $r(t_i) - r_0 = 0$

3) $v_t(t_i) - \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} = 0$

4) $v_r(t_i) = 0$

5) t_f dado

6) $v_t(t_f) - \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}} = 0$

7) $v_r(t_f) = 0$

8) $\nu_5 + \lambda_1(t_f)\dot{r}(t_f) + \ldots 1 = 0$

9) $\lambda_1(t_f) + \frac{\nu_6\sqrt{\mu}}{2[r(t_f)]^{3/2}} - 1 = 0$

10) $\nu_7 + \lambda_2(t_f) = 0$

11) $\nu_6 + \lambda_3(t_f) = 0$

Temos então um sistema de 6 equações diferenciais e uma equação de controle.

Temos também 11 eq. condições de contorno necessárias para determinar as 8 constantes de integração das eqs. diferenciais e os 3 multiplicadores ν_5, ν_6, ν_7.

Solução só possível por computador. Veja solução do Bryson, pág. 68.

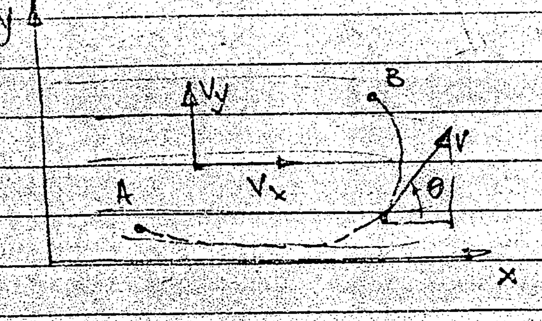
Exemplo:

Problema de Zermelo

Curvas de tempo mínimo numa região onde o vetor velocidade é dependente da posição

Um navio deve percorrer um caminho entre 2 pontos A e B, numa região de fortes correntes.

O módulo e a direção das correntes, admitidas em regime permanente, são funções conhecidas da posição



$$v_x = v_x(x,y)$$
$$v_y = v_y(x,y)$$

A velocidade do navio em relação ao meio é conhecida e igual a V, constante

Queremos controlar o leme do navio de modo a minimizar o tempo de viagem entre A e B.

$$IP = \int_0^{t_f} dt = t_f$$

150

Equações do movimento do navio
(veloc. absoluta = veloc. relativa + veloc. arrastamento)

$\dot{x} = V\cos\theta + v_x(x,y) = f_1(x,y,u)$

$\dot{y} = V\sin\theta + v_y(x,y) = f_2(x,y,u)$

$u = \theta$ - variável de controle

Conds. contorno
$t_i = 0 \rightarrow$ móvel no ponto A - conhecido
$x(t_i) = x_{i0}$
$y(t_i) = y_{i0}$

t_f - livre $\rightarrow$ móvel no ponto B - conhecido.
$x(t_f) = x_{1f}$
$y(t_f) = y_{1f}$

Chamando $x_1 = x$, $x_2 = y$; $u = \theta$

$IP = t_f$

vinc. dinâmicos $\qquad \dot{x}_1 = V\cos u + v_x(x,y)$
$\qquad \dot{x}_2 = V\sin u + v_y(x,y)$

conds. contorno $\qquad t_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1(t_i) = x_{10} \\ x_2(t_i) = x_{20} \quad (= y_{10}) \end{cases}$

$\qquad t_f$ - livre $\Rightarrow \begin{cases} x_1(t_f) = x_{1f} \\ x_2(t_f) = x_{2f} \quad (= y_{1f}) \end{cases}$

$$F = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j (\dot{x}_j - f_j) = \lambda_1(\dot{x}_1 - V\cos u + v_x(x,y)) + \lambda_2(\dot{x}_2 - V\sin u - v_y(x,y))$$

Eqs. Adjuntas: $\quad \dot{\lambda}_i = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$

151

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial v_y}{\partial x},$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \frac{\partial v_x}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

Eq. de controle $\quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_j} = 0$

$$-\lambda_1 V \operatorname{sen} u + \lambda_2 V \cos u = 0$$

Cond. de Transversalidade

t_i, $x_1(t_i)$, $x_2(t_i)$, $x_1(t_f)$, $x_2(t_f)$ - fixos

dt_i, $dx_1(t_i)$, $dx_2(t_i)$, $dx_1(t_f)$, $dx_2(t_f)$ - nulos

Sobra $\quad \left.\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right|_{t_f} - \frac{\partial G}{\partial t_f} = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial t_f} = 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = \lambda_1 (V \cos u + v_x) + \lambda_2 (V \operatorname{sen} u + v_y)$$

$$\left\{\lambda_1 [V \cos u + v_x] + \lambda_2 [V \operatorname{sen} u + v_y]\right\}_{t_f} - 1 = 0$$

No caso, a função F não é explícita em t. Podemos usar, então:

$$\boxed{\sum \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - F = \text{const.}}$$

$$\boxed{\sum \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i = \sum \lambda_i \dot{x}_i = \sum \lambda_i f_i - F} = \text{const.}$$

$$\sum \lambda_i f_i - \sum \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) = \text{const}$$

$$H = \sum \lambda_i f_i = \text{const}$$

$$H = \lambda_1 [V \cos u + v_x] + \lambda_2 [V \operatorname{sen} u + v_y] = \text{const.}$$

152

Basta olhar para a condição de contorno para achar

$$H = 1 = \lambda_1 (V\cos u + v_x) + \lambda_2 (V \operatorname{sen} u + v_y) \quad (1)$$

Da equação de controle $\quad \lambda_1 \operatorname{tg} u = \lambda_2 \quad (2)$

Resolvendo (1) e (2) para λ_1 e λ_2

$$\lambda_1 V\cos u + \lambda_1 v_x + \lambda_1 \operatorname{tg} u V \operatorname{sen} u + \lambda_1 \operatorname{tg} u\, v_y = 1$$

$$\lambda_1 V\cos u + \lambda_1 v_x + \lambda_1 \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos u} V + \lambda_1 \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} v_y = 1$$

$$\lambda_1 V(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u) + \lambda_1 v_x \cos u + \lambda_1 v_y \operatorname{sen} u = \cos u$$

$$\lambda_1 = \frac{\cos u}{V + v_x \cos u + v_y \operatorname{sen} u}$$

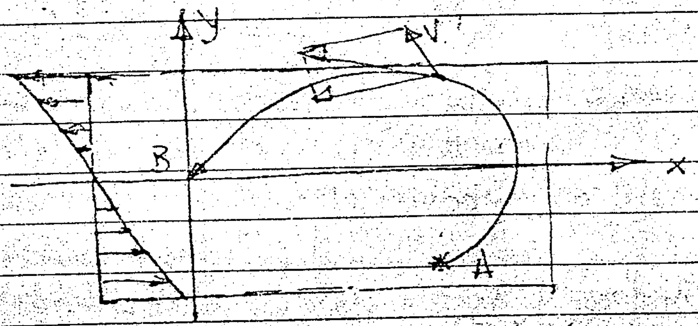
$$\lambda_2 = \frac{\operatorname{sen} u}{V + v_x \cos u + v_y \operatorname{sen} u}$$

Derivando λ_1 e λ_2 em relação a t, obteremos

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{u}\,[v_y + V\operatorname{sen} u]}{V + v_x \cos u + v_y \operatorname{sen} u} - \cos u \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \operatorname{sen} u \dfrac{\partial v_y}{\partial x} \\ \dot{x} = V\cos u + v_x \\ \dot{y} = V\operatorname{sen} u + v_y \end{cases}$$

Integrando este sistema de equações diferenciais obteremos a solução. Isto exige o uso de computador

Caso Particular: Variação Linear de Velocidade da Corrente.



$IP = t_f$

$$v_x = -\frac{V}{h} y \qquad ; \quad v_y = 0$$

Tomemos A ponto qualquer e B na origem.

vincs. dinâmicos

$$\dot{x} = -\frac{V}{h} y + V\cos u = f_1$$

$$\dot{y} = V\operatorname{sen} u \qquad = f_2$$

contornos $\quad t_i = 0 \quad \begin{cases} x(t_i) = x(0) = x_0 \\ y(t_i) = y(0) = y_0 \end{cases}$

t_f livre $\begin{cases} x(t_f) = 0 \\ y(t_f) = 0 \end{cases}$

Eqs Adjuntas

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial v_y}{\partial y} = -0 - 0 = 0$$

$$\lambda_1 = \text{const.}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \frac{\partial v_x}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial v_y}{\partial y} = +\lambda_1 \frac{V}{h} - \lambda_2 0 = \frac{\lambda_1 V}{h}$$

(154)

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{\lambda_1 V}{h}$$

Eq. de Controle – não muda

$$-\lambda_1 V \operatorname{sen} u + \lambda_2 V \cos u = 0$$

$$\lambda_1 \operatorname{tg} u = \lambda_2$$

Cond. Transversalidade

$$\left(\Sigma \lambda_i f_i \Big|_{tf} - \frac{\partial g}{\partial t_f} \right) = 0$$

$$\left[\lambda_1 \left(V \cos\theta - \frac{V}{h} y \right) + \lambda_2 V \operatorname{sen}\theta \right]_{tf} - 1 = 0$$

A Hamiltoniana não é explícita em t $\Rightarrow H = \text{const.}$

$$H = \lambda_1 \left(V \cos\theta - \frac{V}{h} y \right) + \lambda_2 V \operatorname{sen}\theta = \text{const}$$

Como $H(t_f) = 1 \Rightarrow \lambda_1 \left(V \cos\theta - \frac{V}{h} y \right) + \lambda_2 V \operatorname{sen} u = 1$

Usando a equação acima e $\lambda_1 \operatorname{tg} u = \lambda_2$

$$\lambda_1 \left(V \cos u - \frac{V}{h} y \right) + \lambda_1 \operatorname{tg} u \operatorname{sen} u \, V = 1$$

$$\lambda_1 \left(V \cos^2 u + V \operatorname{sen}^2 u \right) - \lambda_1 \frac{V}{h} y \cos u = \cos u$$

$$\lambda_1 V - \lambda_1 \frac{V}{h} y \cos u = \cos u$$

$$1 - \frac{y}{h} \cos u = \frac{\cos u}{\lambda_1 V}$$

De $\lambda_1 \bar{V}\left(1 - \frac{\dot{y}}{h} y \cos u\right) = \cos u$

Como $y = 0$ para $t = t_f$

$$\lambda_1 \bar{V} = \cos\theta_f \Rightarrow \left[\lambda_1 = \frac{\cos\theta_f}{\bar{V}} = \text{const.}\right.$$

$$1 - \frac{y}{h}\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta_f}{\bar{V}}\cancel{\bar{V}}} \Rightarrow \cancel{\cos\theta_f\left(1 - \frac{y}{h}\cos\theta\right) = \cos\theta}$$

$$\frac{y}{h}\cos\theta = 1 - \frac{\cos\theta}{\cos\theta_f}$$

$$\frac{y}{h} = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta_f} \Rightarrow \left[\frac{y}{h} = \sec\theta - \sec\theta_f\right.$$

$$y = h(\sec u - \sec u_f)$$

$$\dot{y} = h\frac{d}{dt}(\sec u(t)) = h \operatorname{tg} u \sec u \frac{du}{dt}$$

$$\dot{y} = \frac{h\dot{u}\operatorname{sen} u}{\cos^2 u}$$

Por outro lado

$$\dot{y} = V \operatorname{sen} u = \frac{h\dot{u}\operatorname{sen} u}{\cos^2 u}$$

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{V\cos^2 u}{h}$$

$$\frac{du}{\cos^2 u} = \frac{V}{h}dt$$

$$\int_u^{u_f}\frac{du}{\cos^2 u} = \int_t^{t_f}\frac{V}{h}dt$$

$$\boxed{\operatorname{tg} u_f - \operatorname{tg} u = \frac{V}{h}(t_f - t)}$$

(156)

Por outro lado em $\dot{x} = V\cos u - \frac{V}{h} y$

$$\frac{dx}{du}\frac{du}{dt} = V\cos u - \frac{V}{h} y$$

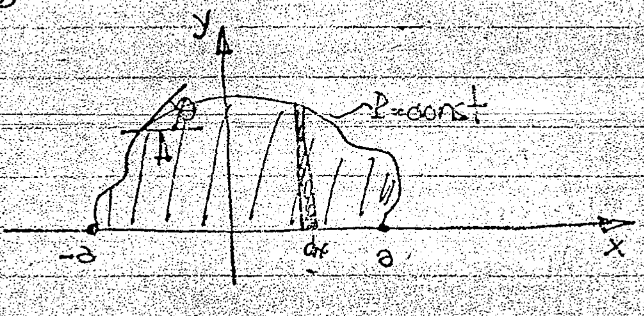
e integrando, obtemos

$$\boxed{\frac{x}{h} = \frac{1}{2}\left[\sec u_f(\operatorname{tg} u_f - \operatorname{tg} u) - \operatorname{tg} u\,(\sec u_f - \sec u) + \log\left(\frac{\operatorname{tg} u_f + \sec u_f}{\operatorname{tg} u + \sec u}\right)\right]}$$

Exemplo: Problema com vínculo global ou vínculo isoperimétrico

Problema de Dido

Dada uma corda de comprimento conhecido P, conectada em cada extremo à uma segmento de reta de comprimento $2a \leq P$, achar a forma da corda necessária para englobar a máxima área entre a corda e a linha reta.



$\theta = \theta(x) = u$ — variável de controle

Devemos tentar minimizar

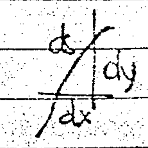
$$I.P. = A = \int_{-a}^{a} -y\,dx = -\int_{-a}^{a} y\,dx \quad \text{(maximizar a área)}$$

(157)

vínculo

$$P = \int_0^{l} ds = \int_{-a}^{a} ds$$

Mas



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds^2 = \left(1 + \frac{d^2y}{dx^2}\right) dx^2$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Então $$P = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = tg\,\theta = tg\,u$$

definimos

$$z'(x) = \sqrt{1 + tg^2 u} = (1 + tg^2 u)^{1/2}$$

$$P = \int_{-a}^{a} z'\, dx = z(a) - z(-a)$$

e impomos $z(-a) = 0$

$z(a) = P$

Temos, agora: $IP = A = \int_{-a}^{a} f(y, z, x)\, dx$

$$IP = -\int_{-a}^{a} y\, dx$$

vínculo $\phi_1 = z' - \sqrt{1 + tg^2 u} = 0$

$\phi_2 = y' - tg\,u = 0$

$y(a) = y(-a) = 0$

$z(-a) = 0 \qquad z(a) = P$

Então: $f = -y$

e $F = -y + \lambda_1\left(z' - \sqrt{1 + tg^2 u}\right) + \lambda_2(y' - tg\,u) = -y + \lambda_1(z' - \sec u) + \lambda_2(y' - tg\,u)$

158

$$\cancel{\lambda_1' = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z} = 0}$$

$$\cancel{\lambda_2' = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y} = -1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\right] - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \lambda_2 \quad ; \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \lambda_2' \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -1$$

$$\lambda_2' + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -x + C$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial z'}\right] - \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$\lambda_1' = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \text{const.} = K$$

Eq. de controle

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u} = 0$$

$$-\lambda_1 \frac{d}{du}\left[\sec^2 u\right] - \lambda_2 \frac{d}{du}\left[tg^2 u\right] = 0$$

$$\cancel{-\lambda_1 \frac{2\sin u}{\cos^3 u} - \lambda_2 \frac{2\sin u}{\cos^3 u} = 0}$$

$$\cancel{\lambda_1 = -\lambda_2 \frac{\sin u}{\cos^2 u} \frac{\cos^3 u}{2\sin u} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{\lambda_2 \cos u}{2}}$$

$$\cancel{\lambda_2 = -\frac{2K/2}{\cos u} = -\frac{K}{\cos u}}$$

$$\cancel{\lambda_2 = -K \sec u}$$

$$\cancel{-x + c = -K \sec u}$$

$$-\lambda_1 \frac{\sin u}{\cos^2 u} - \lambda_2 \frac{1}{\cos^2 u} = 0$$

159

$$-\lambda_1 \operatorname{sen} u = \lambda_2$$

$$-k \operatorname{sen} u = -x + c$$

$$x - c = k \operatorname{sen} u$$

$$\boxed{x = k \operatorname{sen} u + c}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} u$$

$$dy = \operatorname{tg} u \, dx = \operatorname{tg} u \, k \cos u \, du = k \operatorname{sen} u \, du$$

$$\boxed{y = -k \cos u + d}$$

$x = -a \Rightarrow u_1 \; ; \; y = 0$

$x(u_1) = -a$

$x = a \Rightarrow u_2 \; ; \; y = 0$

$x(u_2) = a$

$$k \operatorname{sen} u_1 + c = -a \qquad (1)$$
$$-k \cos u_1 + d = 0 \qquad (2)$$
$$k \operatorname{sen} u_2 + c = a \qquad (3)$$
$$-k \cos u_2 + d = 0 \qquad (4)$$

falta uma!

Finalmente $\ell = \int_{-a}^{a} (1 + \operatorname{tg}^2 u)^{1/2} \, dx = \int_{-a}^{a} \sec u \, dx$

$$\ell = \int_{-a}^{a} \sec u \, \frac{dx}{du} \, du$$

160

$$\frac{dx}{du} = k\cos u$$

$$P = \int_{u_1}^{u_2} \cancel{\sec u}\, k\cancel{\cos u}\, du = k\int_{u_1}^{u_2} du = k(u_2 - u_1)$$

$$u_2 - u_1 = \frac{P}{k} \qquad (5)$$

Resolvendo as 5 equações acima para u_1, u_2, k, c e d, obtemos

$c = 0$

$u_1 = \alpha$

$u_2 = -\alpha$

$k = -\dfrac{P}{2\alpha}$

$d = -\dfrac{P\cos\alpha}{2\alpha}$

onde α é dado pela equação transcendental:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = \frac{2a}{P}$$

Temos então

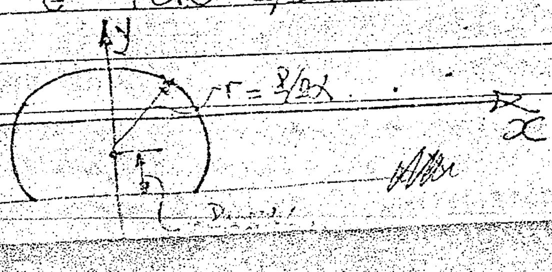
$$x = -\frac{P}{2\alpha}\operatorname{sen} u$$

$$y = \frac{P}{2\alpha}(\cos u - \cos\alpha)$$

Quadrando e somando

$$x^2 + \left(y + \frac{P\cos\alpha}{2\alpha}\right)^2 = \frac{P^2}{4\alpha^2}$$

Mas, esta é a equação de um arco circular com centro em $x = 0$; $y = -\dfrac{P\cos\alpha}{2\alpha}$ e raio $P/2\alpha$



(161)

Exemplo:

Problema do Reator Químico: a necessidade de limite sobre o controle.

Nosso problema agora é maximizar a quantidade final de um produto y durante uma reação química em dois estágios

$$x \rightarrow y \rightarrow z$$

Admite-se que a cinética da reação seja regida por:

$$\dot{x} = -ax = f_1$$
$$\dot{y} = ax - by = f_2$$
$$\dot{z} = g(x,y,z) = f_3$$

onde os coeficientes a e b, variáveis, são relacionados através de

$$b = \rho a^k$$

com ρ e k positivos e constantes

Por exemplo, se a e b seguem a relação de Arrenius então

$$a = k_1 e^{-E_1/RT}$$
$$b = k_2 e^{-E_2/RT}$$

com E_1, E_2 - energias de ativação

T - temperatura absoluta da reação

R - constante universal dos gases

Nesse caso $\rho = k_2 k_1^{-E_2/E_1}$ e $k = \frac{E_2}{E_1}$

A quantidade do produto rejeitado z não influe nas reações x e y. Como a ordem de grandeza de z não é de interesse, abandonamos $\dot{z} = g(x,y,z)$

Devemos então maximizar $y(t_f)$ usando como controle $a(t)$. Temos, então

$$IP = -y(t_f)$$

(162)

com vínculos dinâmicos

$$\dot{x} = -ax = f_1$$

$$\dot{y} = ax - \rho a^k y = f_2$$

e vínculos de contorno

em $t = t_i = 0$: $x(t_i) = x_0$

$y(t_i) = y_0$

$t = t_f$ especificado : $x(t_f)$ livre

$y(t_f)$ livre

Eqs. adjuntas : $\dot{\lambda}_j = -\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 (-a) - \lambda_2 a$$

$$\dot{\lambda}_1 = a(\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = -\lambda_1 \cdot 0 - \lambda_2 (-\rho a^k)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \rho a^k \lambda_2$$

Eq. controle $\sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial a} = 0$

$$-\lambda_1 x + \lambda_2 x - \lambda_2 \rho \, k \, a^{(k-1)} y = 0$$

$$x(\lambda_2 - \lambda_1) = \rho k y \lambda_2 a^{k-1}$$

$$a = \left[\frac{1}{\rho k} \frac{x}{y} \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} \right) \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

Eqs. de contorno, vindas da condição de transversalidade:

$\therefore \quad dt_i = dx(t_i) = dy(t_i) = dt_f = 0$

$dx(t_f) \neq 0 \quad , \quad dy(t_f) \neq 0$

$\cancel{\frac{\partial g}{\partial t_f}} + \cancel{\gamma} \qquad 1. \quad \frac{\partial g}{\partial x(t_f)} + \lambda_1(t_f) = 0$

$$\boxed{\lambda_1(t_f) = 0}$$

$2. \quad \frac{\partial g}{\partial y(t_f)} + \lambda_2(t_f) = 0$

$\Rightarrow \; -1 + \lambda_2(t_f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_2(t_f) = 1}$

Vamos agora usar o princípio de máximo

$$H = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j f_j = \lambda_1(-ax) + \lambda_2(ax - \rho a^k y)$$

Agora um pouco de cuidado com a solução do Citron. O que ele fala ser solução não é verdade pois falta examinar as condições nos extremos do intervalo, ou seja, o que fizemos é um estudo da função H e não a solução do problema.

Num ponto interior do intervalo, examinemos $\frac{\partial H}{\partial a} = 0$ e $\frac{\partial^2 H}{\partial a^2} < 0$.

$\frac{\partial H}{\partial a} = 0$ é a própria equação de controle encontrada.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a}\left[-\lambda_1 x + \lambda_2 x - \lambda_2 \rho k a^{k-1} y\right]$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a^2} = -\lambda_2 \rho k(k-1) a^{k-2} y$$

De $\dot{\lambda}_2 = \rho a^k \lambda_2 \quad , \quad \lambda_2(t_f) = 1$

$\lambda_2 = A e^{-\int_t^{t_f} \rho a^k dt} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2(t_f) = A = 1$

(164)

$$\lambda_2(t) = e^{-\int_t^{t_f} \rho a^k dt} \quad , \quad \lambda_2(t) > 0$$

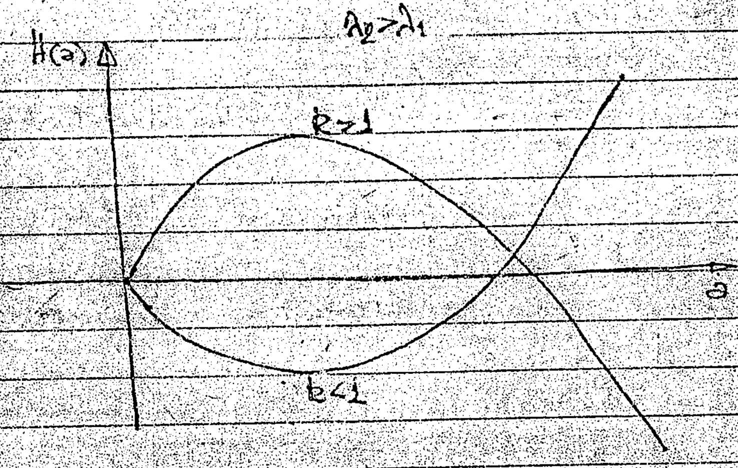
y é também sempre positivo e admitamos $\lambda_2(t) > \lambda_1(t)$ de modo que o controle $a(t)$ obtido seja real, isto é, deve existir a raiz no termo de controle.

Com isso para que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a^2} = -\rho k(k-1)\, a^{k-2} \lambda_2 y \leq 0$$

sendo ρ e k positivos, só é satisfeita se $k > 1$.

Se $k < 1$, ao invés de maximização, teríamos minimização.



Consideremos o caso $k < 1$. A figura mostra que o controle que "maximiza" H(a), isto é, "minimiza" o nosso IP, tende para infinito.

Como qualquer controle possível em engenharia é limitado, isto é impossível fisicamente. O exemplo mostra claramente a necessidade de se limitar o controle a valores possíveis para não termos "soluções" como essa.

O problema com $k > 1$ está, portanto, encaminhado, devendo-se tomar todo cuidado com os valores nos extremos do intervalo de tempo, coisa que o Citron não fez.

VÍNCULOS DE DESIGUALDADE NAS VARIÁVEIS DE CONTROLE

Um exemplo de controle que deve ser limitado superiormente foi mostrado no exemplo anterior. Existem, também, vários problemas em que o controle deve ter um limite inferior. Assim, o caso de uma órbita de transferência ~~em que~~ com uso de pequeno empuxo em que o motor da nave espacial se torna difícil de ser religado uma vez que tenha sido desligado, exige que o empuxo o controle enfim, esteja acima de um determinado nível mínimo.

No entanto, todos estes casos são uma subclasse de um caso mais geral em que uma relação entre tempo, variáveis de estado e variáveis de controle é definida. Isto pode ser expresso analiticamente por

$$C[x(t), u(t), t] \leq 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C[x(t), u(t), t] = 0 \longrightarrow \text{fronteira de controle} \\ C[x(t), u(t), t] < 0 \longrightarrow \text{fora da fronteira.} \end{array}}$$

A notação acima é a forma padrão. Por exemplo

$$u_1 < u < u_2 .$$

$$C[x, u, t] = (u - u_1)(u - u_2) \leq 0$$

Consideremos agora o seguinte problema:

Minimizar $\boxed{IP = g[t_i, x(t_i), t_f, x(t_f)]}$ Mayer

sujeito a: $\boxed{\dot{x}_i = f_i(x, u, t) \qquad i = 1, 2, \dots, n}$ - vincs. dinamicos

$$\boxed{\Phi_j[t_i, x(t_i), t_f, x(t_f)] = 0 \qquad j = 1, 2, \dots, p \leq 2n+1 \text{ - vincs. contorno}}$$

b) $\boxed{C[x,u,t] = C(x_1, \dots, x_n, u, t) \leq 0}$ vínculo no controle

isto é, admitimos $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$, $u = \{u\}$
uma só var. controle

Isto não é limitação no tratamento dado a seguir; a extensão para mais vínculos e mais variáveis de controle pode ser feita sem grandes problemas.

Montemos, então:

$$\boxed{F = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) \left\{ \dot{x}_j - f_j(x,u,t) \right\} = 0}$$

$$\boxed{G = g[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] + \sum_{j=1}^{\hat{n}} \nu_j \psi_j}$$

$$\boxed{\tilde{IP} = G[t_i, x(t_i), t_f, x(t_f), \nu] + \int_{t_i}^{t_f} \underbrace{\left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j [\dot{x}_j - f_j] \right\}}_{F} dt}$$

Bolza

e façamos a variação

$$\delta \tilde{IP} = \delta G + \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\delta \dot{x}_j - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \delta x_k - \Sigma \frac{\partial f_j}{\partial u} \delta u \right] \right\} dt$$

Consideremos agora que o sistema atinja a fronteira no instante t_1, fique sobre a fronteira até o instante t_{f2} e caminhe fora da fronteira até o instante final t_f.

fora da fronteira	sobre a fronteira	fora da fronteira
t_i — t_1	t_1 — t_2	t_2 — t_f

$$\tilde{IP} = G + \int_{t_i}^{t_1} \left\{ \Sigma \lambda_j [\dot{x}_j - f_j] \right\} dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \Sigma \lambda_j [\dot{x}_j - f_j] \right\} dt + \int_{t_2}^{t_f} \left\{ \quad \right\} dt$$

$$\delta \tilde{IP} = 0 = \delta G + \int_{t_i}^{t_1} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\delta \dot{x}_j - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \delta x_k - \frac{\partial f_j}{\partial u} \delta u \right] \right\} dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \Sigma \qquad \right\} dt +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_2} \left\{ \Sigma \qquad \right\} dt$$

(167)

Usando $\int_{-}^{+} \sum_j \lambda_j \dot{\delta x_j}\, dt = \sum_i \lambda_j \delta x_j \Big|_{-}^{+} - \int_{-}^{+} \sum_i \dot{\lambda}_j \delta x_j\, dt$

$$\delta \tilde{I P} = 0 = \delta G + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta x_j \Big|_{t_i}^{t_1} - \int_{t_i}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} \Big[\dot{\lambda}_j + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big] \delta x_j\, dt - \int_{t_i}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u} \delta u\, dt$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta x_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \Big[\dot{\lambda}_j + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big] \delta x_j\, dt - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u} \delta u\, dt$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta x_j \Big|_{t_2}^{t_f} - \int_{t_2}^{t_f} \sum_{j=1}^{n} \Big[\dot{\lambda}_j + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big] \delta x_j\, dt - \int_{t_2}^{t_f} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u} \delta u\, dt$$

Imaginemos agora que o problema tenha sido resolvido e já tenhamos t_i, t_1, t_2, t_f e $x(t_i), x(t_1), x(t_2), x(t_f)$. Ficamos então com um problema de extremos fixos e:

$$dt_i = dx_j(t_i) = 0$$
$$dt_1 = dx_j(t_1) = 0$$
$$dt_2 = dx_j(t_2) = 0$$
$$dt_f = dx_j(t_f) = 0$$

Já que
$$dx_j(t_i) = \dot{x}_j(t_i)\, dt_i + \delta x_j(t_i)$$
$$dx_j(t_1) = \dot{x}_j(t_1)\, dt_1 + \delta x_j(t_1)$$
$$dx_j(t_2) = \dot{x}_j(t_2)\, dt_2 + \delta x_j(t_2)$$
$$dx_j(t_f) = \dot{x}_j(t_f)\, dt_f + \delta x_j(t_f)$$

temos que:
$$\delta x_j(t_i) = 0$$
$$\delta x_j(t_1) = 0$$
$$\delta x_j(t_2) = 0$$
$$\delta x_j(t_f) = 0$$

e na relação acima só sobram os termos dentro das integrais

$$\delta \tilde{I P} = -\int_{t_i}^{t_1} \sum \Big[\dot{\lambda}_j + \sum \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big] \delta x_j\, dt - \int_{t_i}^{t_1} \sum \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u} \delta u\, dt$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} \sum \Big[\qquad \Big] \delta x_j\, dt - \int_{t_1}^{t_2} \sum \qquad \delta u\, dt$$
$$- \int_{t_2}^{t_f} \sum \Big[\qquad \Big] \delta x_j\, dt - \int_{t_2}^{t_f} \sum \qquad \delta u\, dt = 0$$

Bolza

Como o problema não está vinculado em $t_i \le t < t_1$ e em $t_2 < t < t_f$, valem as relações anteriormente obtidas, no problema sem vínculos. Então

Fora da fronteira do controle $t_i < t < t_1$, $t_2 < t \le t_f$:

$$\boxed{\dot{\lambda}_j = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}}, \quad j=1,\dots,n \quad \text{— eqs. adjuntas}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u} = 0} \quad \text{— eq. controle}$$

Com isso

$$\delta \tilde{I} = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left[\left\{ \dot{\lambda}_j + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\} \delta x_j + \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u} \delta u \right] dt$$

e aqui δx_j e δu não são independentes.

Tomando

$$C(x,u,t) = 0$$

e sua primeira variação

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial C}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial C}{\partial u} \delta u = 0$$

e, admitindo $\frac{\partial C}{\partial u} \neq 0$

$$\delta u = -\frac{\sum_{j=1}^{n} \partial C/\partial x_j \, \delta x_j}{\partial C/\partial u}$$

e

$$\delta \tilde{I} = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left[\dot{\lambda}_j + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i/\partial u}{\partial C/\partial u} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right\} \right] \delta x_j \, dt$$

e agora os δx_j podem ser considerados como variações independentes.

Então na fronteira de controle:

Na fronteira do controle $t_1 < t < t_2$:

$$\boxed{\dot{\lambda}_j = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i/\partial u}{\partial C/\partial u} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right\}}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{(eqs. adjuntas)}$$

$$\boxed{C(x,u,t) = 0} \quad \text{(eq. controle)}$$

169

Voltemos aos termos de contorno:

$$\delta G + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta x_j \Big|_{t_i}^{t_1^-} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta x_j \Big|_{t_1^+}^{t_2^-} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta x_j \Big|_{t_2^+}^{t_f} = 0$$

Usando $\delta x_j = dx_j - \dot{x}_j \, dt = dx_j - f_j \, dt$

$$\delta G + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j dx_j \Big|_{t_i}^{t_1^-} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \, dt \Big|_{t_i}^{t_1^-} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j dx_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \, dt \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j dx_j \Big|_{t_2}^{t_f} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \, dt \Big|_{t_2}^{t_f} = 0$$

Note que G não contém nada que se refira à entrada na fronteira. Então, devemos impor:

$$\left\{ \frac{\partial G}{\partial t_i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \Big|_{t_i} \right\} dt_i = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial G}{\partial t_f} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \Big|_{t_f} \right\} dt_f = 0$$

$$\lambda_j(t_i) = \frac{\partial G}{\partial x_j(t_i)} \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\lambda_j(t_f) = -\frac{\partial G}{\partial x_j(t_f)} \qquad j = 1, \ldots, n$$

Condições de entrada e saída da fronteira:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \Big|_{t_1^+} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \Big|_{t_1^-}}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \Big|_{t_2^+} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \Big|_{t_2^-}}$$

$$\boxed{\lambda_j \Big|_{t_1^+} = \lambda_j \Big|_{t_1^-}} \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\boxed{\lambda_j \Big|_{t_2^+} = \lambda_j \Big|_{t_2^-}} \qquad j = 1, \ldots, n$$

Uma formulação alternativa: o problema que temos no ítem anterior é a dependência entre x e u na fronteira pelo vínculo $C(x,u,t)=0$. Para eliminar essa dependência, introduzimos o vínculo em IP através de um multiplicador μ tal que

$$\boxed{\mu C(x,u,t) = 0}$$

Na fronteira, μ, em princípio pode ter qualquer valor. Fora da fronteira, $\mu = 0$.

Então:

$$\boxed{F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\dot{x}_i - f_i(t,x,u)\right] + \mu(t)\, C(x,u,t)}$$

Com isso, ficamos com:

- equações adjuntas:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\lambda}_i = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} + \mu \dfrac{\partial C}{\partial x_i} & i=1,\dots,n \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \dfrac{\partial f_j}{\partial u} - \mu \dfrac{\partial C}{\partial u} = 0 \\ \mu C(x,u,t) = 0 \end{cases}}$$

Mayer

em $t_i \leq t \leq t_f$.

Condição de Weierstrass

Verifiquemos a condição de Weierstrass para o caso do problema com vínculos de controle.

Fora da fronteira temos, definindo

$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i ,$$

Mayer

H máximo para IP mínimo:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0$$

171

Se o controle estiver sobre a fronteira a condição acima não precisa ser satisfeita. Usemos então um outro raciocínio.

Se a fronteira de controle é violada pela variável de controle, então devemos esperar um valor de H maior que aquele obtido na fronteira. Façamos então a expansão de H e C em torno dos seus valores na fronteira que são:

$$H = H_b \quad e \quad C = C_b = 0.$$

Temos, para uma aproximação de 1ª ordem:

$$H = H_b + \frac{\partial H}{\partial u}\Big|_b \delta u + o(\delta u^2)$$

$$H = H_b + \frac{\partial H}{\partial u}\Big|_b \delta u$$

$$C = \underbrace{C_b}_{=0} + \frac{\partial C}{\partial u}\Big|_b \delta u + o(\delta u^2)$$

$$C = \frac{\partial C}{\partial u}\Big|_b \delta u \quad \Rightarrow \quad \delta u = \frac{C}{\partial C/\partial u|_b}, \quad \frac{\partial C}{\partial u}\Big|_b \neq 0$$

Se tomarmos $\delta u > 0$ para ultrapassarmos a fronteira de controle $\frac{\partial C}{\partial u}\Big|_b \delta u \geq 0$

Nessa condição para H ser maior que o H_b na fronteira

$$H = H_b = \frac{\partial H/\partial u|_b}{\partial C/\partial u|_b} C$$

Não abandonaremos a fronteira enquanto H não for maior que H_b.

Logo, a condição para não abandonar a fronteira é que

$$\boxed{\frac{\partial H/\partial u|_b}{\partial C/\partial u|_b} > 0}$$

172

ou seja

$$\boxed{\frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u}\Big|_b}{\partial C/\partial u|_b} > 0}$$

Mas, por definição, na fronteira:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u} - \mu \frac{\partial C}{\partial u} = 0}$$ (eq. controle)

$$\boxed{\mu = \frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \, \partial f_i/\partial u|_b}{\partial C/\partial u|_b}} > 0$$

a condição de caminhar sobre a fronteira implica que

$$\mu_b > 0$$

Para generalizar, sem demonstração, se houver mais de um vínculo ou mais de uma variável de controle, todos os μ devem ser positivos na fronteira.

Exemplo: A planta de inércia com vínculo de controle

$\ddot{x} = u$; $|u| \leq 1$ $(u-1)(1+u) \leq 0$

~~Fazendo~~ Queremos minimizar o tempo necessário para transferir o sistema entre o estado inicial e o estado final, isto é:

em $t = t_i = 0$ $\begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases}$

em $t = t_f$ livre $\begin{cases} x_1(t_f) = 0 \\ x_2(t_f) = 0 \end{cases}$

1º. 4

Eqs. dinâmicas (173)

$$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = x_2 \quad ; \quad \dot{x}_1 = f_1 = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u = \ddot{x}_1 \quad | \quad \dot{x}_2 = f_2 = u$$

e a Hamiltoniana fica (em Meyer)

$$H = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

$H_c = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u + \mu(u^2 - 1)$

Eqs adjs.: $\lambda_1 = c_1$

$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 = -c_1 t + c_2$

Eq controle

$\lambda_2 + 2\mu u = 0$?!

Eqs. adjuntas $\boxed{\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}}$

Balga

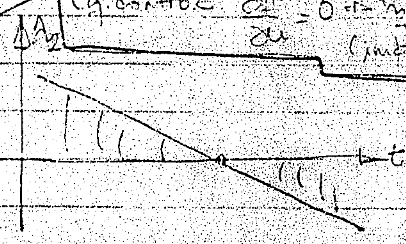
$H = \ldots$

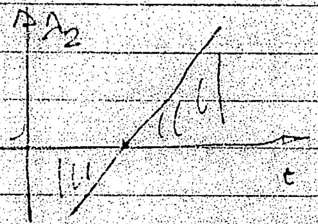
$$\dot{\lambda}_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = const = c_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 = -c_1 t + c_2$$

$\boxed{\text{Eq. controle: } \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \text{ (impossível)}}$

verificar p/ or outro exemplo !!?





feito p/ Balga!

Vejamos agora a Hamiltoniana que deve ser maximizada. Para que isso aconteça u deve ter sempre o mesmo sinal de λ_2 e deve ter sempre o seu valor máximo, isto é,

(VALE!!)

- se $\lambda_2 > 0$, então $u = +1$
- se $\lambda_2 < 0$, então $u = -1$

Vendo o gráfico de λ_2 acima vemos que quando λ_2 cruza o eixo t, o controle u pula de +1 para -1 ou de -1 para +1. Este é o chamado controle "bang - bang": o controle pula sempre de uma fronteira para outra.

(174)

$u = \text{sign}(\lambda_2)$

Verificamos isto também por:

$$\boxed{\mu = \frac{\sum \lambda_i f_i/\partial u|_b}{\partial C/\partial u|_b} = \frac{\lambda_2|_b}{2u|_b} > 0} \Rightarrow u = \text{sign}(\lambda_2)$$

condição para caminhar sobre a fronteira

Admitindo $u = +1$

$f_2 = \dot{x}_2 = +1 \Rightarrow x_2 = t + C_3$

$x_1 = \frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = u$

No plano de fases

$t = x_2 - C_3$

$x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - C_3)^2 + (x_2 - C_3)C_3 + C_4$

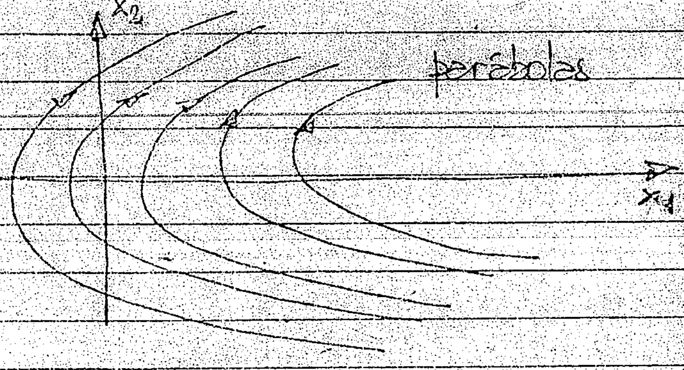
$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + C_5 x_2 + C_6$

ou melhor

$x_1 = \frac{1}{2}t^2 + C_3 t + C_4$

$x_1 = \frac{1}{2}(t + C_3)^2 + \left(C_4 - \frac{C_3^2}{2}\right)$

$$\left[x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + C_5\right]$$



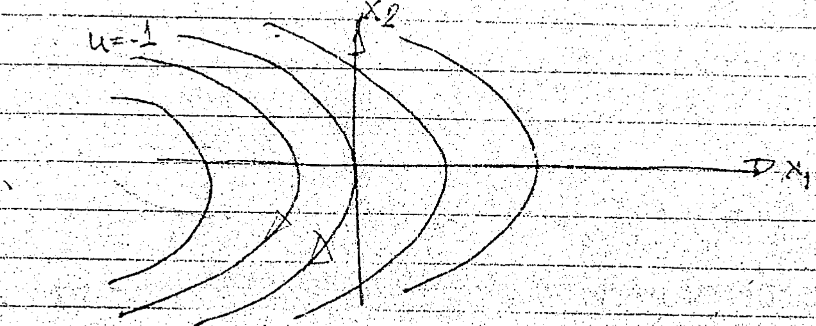
Admitindo $u = -1$

$x_2 = -t + C_6$

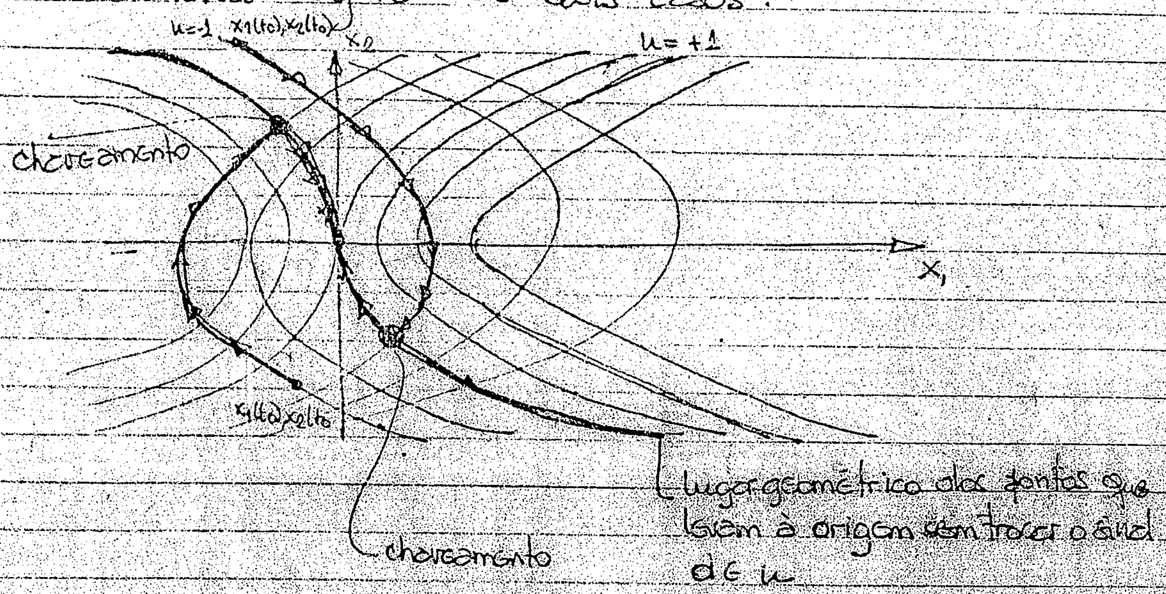
$x_1 = -\frac{t^2}{2} + C_6 t + C_7 = -\frac{1}{2}(-t + C_6)^2 + \left(C_7 + \frac{C_6^2}{2}\right)$

175

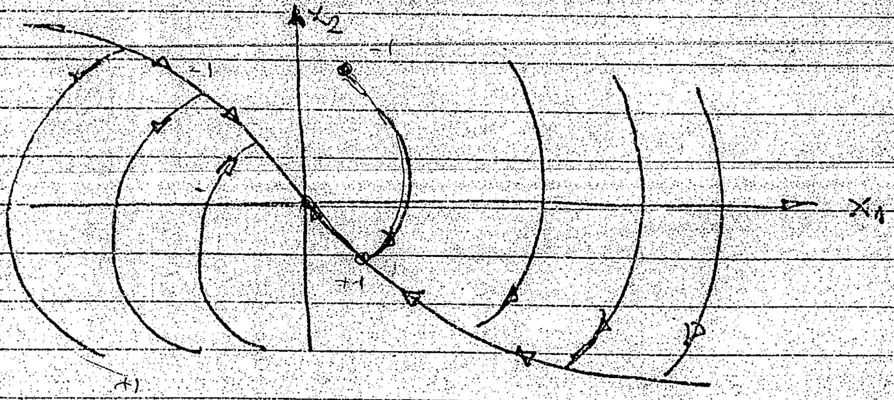
$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + C_8$$



Juntando agora os dois casos:



Então, na realidade, o sistema se comporta como se:



PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COM CONDIÇÕES INTERMEDIÁRIAS

Entendemos por condições intermediárias as relações específicas que as variáveis de estado devem satisfazer num instante de tempo t_I interno ao intervalo de definição (t_i, t_f) do nosso problema. Este desenvolvimento serve de base ao estudo de problemas de vínculos de desigualdade na variável de estado.

Como exemplo, consideremos uma missão de socorro espacial. A nave de socorro deve ser transferida em tempo mínimo da estação espacial à nave com problemas e também em tempo mínimo de volta à estação espacial. É razoável, então, imaginar que no instante de socorro as coordenadas e as velocidades das duas naves sejam as mesmas.

Tomemos o nosso sistema definido por n variáveis de estado $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sujeito aos vínculos dinâmicos

$$\dot{x}_i = f_i(x,u,t) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Temos m variáveis de controle $u_1, u_2, \ldots, u_m$ que devem satisfazer r vínculos de desigualdade no controle:

$$\boxed{C_i(x,u,t) \leq 0} \qquad i = 1,\ldots,r$$

O IP do nosso problema é:

$$\boxed{IP = g[t_i, x(t_i), t_f, x(t_f)]}$$

Existem também p vínculos de contorno:

$$\boxed{\psi_j[t_i, x(t_i), t_f, x(t_f)] = 0} \qquad j = 1,\ldots,p \leq 2n+1$$

Colocaremos, também, num instante intermediário t_I, $t_i < t_I < t_f$, que as variáveis de estado devem satisfazer:

(177)

(15ª / 160)

$$\boxed{\overline{\psi}_i[t_I, x(t_I)] = 0} \qquad j = 1, \dots, q \le n+1$$

Nosso procedimento agora é o usual. Montamos:

$$\tilde{IP} = G + \int_{t_i}^{t_I} F\,dt + \int_{t_I}^{t_f} F\,dt$$

com

$$F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [\dot{x}_i - f_i(t,x,u)] + \sum_{i=1}^{r} \mu_i C_i(t,x,u)$$

$$G = g + \nu^T \psi + \overline{\nu}^T \overline{\psi}$$

$$\delta \tilde{IP} = 0 = dG + \int_{t_i}^{t_I} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i \right] + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial u_i} \delta u_i \right\} dt +$$

$$+ \int_{t_I}^{t_f} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i \right] + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial u_i} \delta u_i \right\} dt$$

Depois da integração por partes, temos:

$$\delta \tilde{IP} = 0 = dG + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_{t_i}^{t_I} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_{t_I}^{t_f} +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_I} \left\{ \sum \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right]}_{0} \delta x_i + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u_i}}_{0} \delta u_i \right\} dt$$

$$+ \int_{t_I}^{t_f} \left\{ \sum \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right]}_{0} \delta x_i + \sum \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u_i}}_{0} \delta u_i \right\} dt$$

$$\begin{array}{l} t_i \le t \le t_I \\ t_I \le t \le t_f \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \dot{\lambda}_i = - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{r} \mu_j \frac{\partial C_j}{\partial x_i} & , i = 1, \dots, n \\ - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{r} \mu_j \frac{\partial C_j}{\partial u_i} = 0 & , i = 1, \dots, m \end{array} \right.$$

Usando

$$dx_i(t_i) = \dot{x}_i(t_i)\,dt_i + \delta x_i(t_i)$$

$$dx_i(t_I) = \dot{x}_i(t_I)\,dt_I + \delta x_i(t_I)$$

$$dx_i(t_f) = \dot{x}_i(t_f)\,dt_f + \delta x_i(t_f)$$

para eliminar δx_i em t_i, t_I, t_f, temos:

$$0 = dG - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\, dt \Big|_{t_i}^{t_f} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i dx_i \Big|_{t_i}^{t_f} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \Big|_{t_I^{(-)}}^{t_I^{(+)}} dt_I - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Big|_{t_I^{(-)}}^{t_I^{+}} dx_i(t_I)$$

Desenvolvendo dG, obteremos as condições:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \Big|_{t_i} + \frac{\partial G}{\partial t_i} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial G}{\partial t_f} = 0 \\ &\lambda_j(t_i) = \frac{\partial G}{\partial x_j(t_i)} \qquad j = 1, \dots, n \\ &\lambda_j(t_f) = -\frac{\partial G}{\partial x_j(t_f)} \qquad j = 1, \dots, n \end{aligned}}$$

Equações de transversalidade.

$$e \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \Big|_{t_I^{(+)}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \Big|_{t_I^{(-)}} - \frac{\partial G}{\partial t_I}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \Big|_{t_I^{(+)}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \Big|_{t_I^{(-)}} - \sum_{k=1}^{q} \bar{\nu}_k \frac{\partial \bar{\psi}_k}{\partial t_I}}$$

$$\lambda_i \Big|_{t_I^{(+)}} = \lambda_i \Big|_{t_I^{(-)}} + \frac{\partial G}{\partial x_i(t_I)}$$

$$\boxed{\lambda_i \Big|_{t_I^{(+)}} = \lambda_i \Big|_{t_I^{(-)}} + \sum_{k=1}^{q} \bar{\nu}_k \frac{\partial \bar{\psi}_k}{\partial x_i(t_I)}}$$

As equações em t_i e t_f são as equações da condição de transversalidade usuais.

> No entanto, é importantíssimo notar que a introdução de condições intermediárias traz junto condições de salto na hamiltoniana $H = \sum \lambda_i f_i$ e nos multiplicadores λ, isto é, a Hamiltoniana e os λ não precisam mais ser contínuos.

VÍNCULOS DE DESIGUALDADE NAS VARIÁVEIS DE ESTADO.

Imaginemos que as variáveis de estado só podem assumir valores numa região limitada por uma superfície de contorno que não pode ser transposta.

$$S[x(t),t] \leq 0$$

vínculo de desigualdade na variável de estado

Note que nesse caso o controle $u(t)$ não aparece explicitamente em S.

Consideremos então minimizar

$$\boxed{IP = g[t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)]}$$

vinc. dinc. $\boxed{\dot{x}_i = f_i(x,u,t)}$ $\quad i = 1, \ldots, n$

vinc. contorno $\boxed{\psi_j [t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] = 0}$ $\quad j = 1, \ldots, p$

e mais o vínculo $\boxed{S[x(t),t] \leq 0}$

Note que não dá para fazer o mesmo tratamento aqui que para o caso de vínculo de controle, porque naquele caso o controle u era determinado de forma que $C[x,u,t] = 0$ para o sistema caminhar sobre a fronteira. Aqui $\partial S/\partial u = 0$ e o esquema anterior fura.

Consideremos, então, a técnica de Dreyfus.

Se $\quad S[x(t),t] = 0$

então $\quad \dfrac{d^r S}{dt^r} = 0 \quad , \; r = 1, 2, \ldots\ldots$

Consideremos $r = 1$, primeira derivada:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(t,x,u)$$

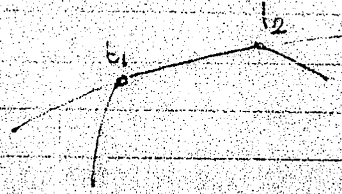
Se $\frac{dS}{dt}$ acima envolve explicitamente o controle u (em f_1), então o problema está resolvido. Se não, montamos d^2S/dt^2 e verificamos novamente a dependência em u, e assim por diante.

Digamos que a q-ésima ~~primeira~~ derivada de S envolve o controle, isto é:

$$\boxed{\frac{d^q S}{dt^q}[x(t), u(t), t] = 0} \quad (*)$$

que agora será usado como $C[x,u,t]=0$ para determinar o u necessário para manter as variáveis sobre a fronteira de estado.

(*) é um vínculo de desigualdade de q-ésima ordem sobre a variável de estado



Se t_1 é o instante em que o sistema entra na fronteira ($S=0$), $\frac{d^q S}{dt^q}[x,u,t]=0$ fornece uma equação diferencial ordinária para a determinação de S para $t > t_1$.

Com o controle $u(t)$ determinado de modo a satisfazer (*), a solução dessa equação diferencial só levará a $S=0$ para $t > t_1$ se as q condições iniciais em S são nulas. Então, devemos impor

$$\frac{d^q S}{dt^q}[x(t), u(t), t] = 0$$

com conds. iniciais:

$$S^{(0)} = S[x(t_1), t_1] = 0$$
$$S^{(1)} = \frac{dS}{dt}[x(t_1), t_1] = 0$$
$$\vdots$$
$$S^{(q-1)} = \frac{d^{q-1} S}{dt^{q-1}}[x(t_1), t_1] = 0$$

Com isso, temos o problema colocado como nos desenvolvimentos anteriores. Se o sistema entra na fronteira em t_1 e sai em t_2, t_1 e t_2 a determinar, então em $t_1 \leq t \leq t_2$, $u(t)$ é determinado por

$$\frac{d^q S}{dt^q}[x,u,t] = 0 \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

e temos:

$$\text{Na fronteira}\begin{cases} \dot{\lambda}_i = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_j/\partial u}{\partial S^{(q)}/\partial u}\frac{\partial S^q}{\partial x_i}\right] & i = 1,\dots,n \\ S^q[x(t),u(t),t] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix}\text{Fora da} \\ \text{fronteira}\end{matrix}\begin{cases} \dot{\lambda}_i = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} & i = 1,\dots,n \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

Para determinar as condições de entrada e saída da fronteira, em t_1 e t_2, definimos

$$\Theta = g + \sum_{i=1}^{p} \nu_i \varphi_i + \sum_{i=0}^{q-1} \bar{\nu}_i S^{(i)}$$

e temos, em t_1:

$$\textcircled{1}\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\Big|_{t_1^{(+)}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\Big|_{t_1^{(-)}} - \left[\bar{\nu}_0 \frac{\partial S^0}{\partial t_1} + \bar{\nu}_1 \frac{\partial S^1}{\partial t_1} + \dots + \bar{\nu}_{q-1}\frac{\partial S^{q-1}}{\partial t_1}\right] \\ \lambda_i\Big|_{t_1^{(+)}} = \lambda_i\Big|_{t_1^{(-)}} + \left[\bar{\nu}_0 \frac{\partial S^0}{\partial x_i(t_1)} + \bar{\nu}_1 \frac{\partial S^1}{\partial x_i(t_1)} + \dots + \bar{\nu}_{q-1}\frac{\partial S^{q-1}}{\partial x_i(t_1)}\right] \\ \qquad i = 1,\dots,n \end{cases}$$

Observemos que em t_2 não existe nenhuma exigência sobre a saída da fronteira, o que resulta numa condição de quina regular.

Podemos, no entanto, ter essas condições ① em t_2 e as de t_2 em t_1, não alterando o problema

(182)

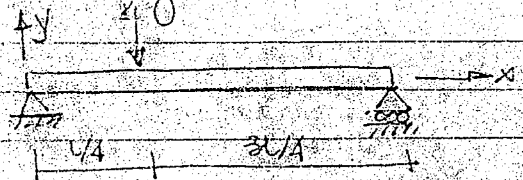
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \Big|_{t_2^{(+)}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \Big|_{t_2^{(-)}}$$

$$\lambda_i \Big|_{t_2^{(+)}} = \lambda_i \Big|_{t_2^{(-)}} \qquad i = 1, \ldots, n$$

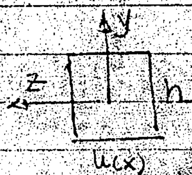
Em t_i e t_f as condições de transversalidade são as usuais.

Exemplo: Uma Viga de Peso Mínimo

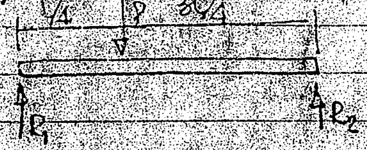
Consideremos o problema de projetar uma viga elástica sob uma dada carga



Secção transversal



$$EI(x) \frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$



$$I(x) = \frac{1}{12} u(x) h^3 \qquad R_1 = \frac{3P}{4} \; ; \; R_2 = \frac{P}{4}$$

Minimizar o peso:

$$IP = \int_0^L \rho h u \, dx$$

$$M(x) = \begin{cases} \dfrac{3Px}{4} & x \leq \dfrac{L}{4} \\ \dfrac{P(L-x)}{4} & x \geq \dfrac{L}{4} \end{cases}$$

ρ - peso específico da viga

Vínculos: sobre o estado - limite máximo de deflexão
$|y(x)| \leq \underline{y} \quad , \underline{y} > 0$

sobre o controle - limite máximo na largura da secção transversal (limitar as tensões)
$|u(x)| \geq \overline{U} \quad , U > 0$

183

Reordenemos o nosso problema, colocando-o na forma de um problema de Mayer.

Definimos $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$

e $y_3'(x) = \rho h u(x)$ com a cond. inicial $y_3(0) = 0$

Temos: $IP = y_3(L)$

vincs. dinamicos:
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \dfrac{12 M(x)}{E h^3 u} = \dfrac{\alpha M(x)}{u} \\ y_3' = \rho h u \end{cases}$$

vincs. contorno:
$$y_1(0) = 0$$
$$y_1(L) = 0$$
$$y_3(0) = 0$$

vinc. controle: $C = \bar{U} - u(x) \leq 0$ (largura não pode ser negativa)

vinc. estado: $S = [y_1(x) - Y][y_1(x) + Y] \leq 0$

$S = y_1^2 - Y^2 \Rightarrow S'(x) = 2y_1 y_1' = 2y_1 y_2 \Rightarrow S''(x) = 2y_1' y_2 + 2y_1 y_2'$

$S''(x) = 2y_2^2 + \dfrac{2\alpha y_1 M(x)}{u}$ (vínculo de 2ª ordem na var. estado)

Para termos uma solução fechada, faremos uma simplificação da solução, impondo a condição da largura ser constante, isto é:

$u(x) = \tilde{u}$ - constante

$\tilde{u} \geq \bar{U}$

Integrando as equações do movimento, obtemos:

$$x \leq \frac{L}{4} \begin{cases} y_2(x) = \dfrac{\alpha}{\tilde{u}} \dfrac{3Px^2}{8} + C_1 \\ y_1(x) = \dfrac{\alpha}{\tilde{u}} \dfrac{Px^3}{8} + C_1 x + \overset{0;\, y_1(0)=0}{C_2} \end{cases}$$

184

$$x \geq \frac{L}{4} \quad \begin{cases} y_2(x) = -\frac{\alpha}{\tilde{u}} \frac{P(x-L)^2}{8} + c_2 \\ y_2(x) = -\frac{\alpha}{\tilde{u}} \frac{P(x-L)^3}{24} + c_2(x-L) + \cancel{c_3} \\ y_3(x) = \end{cases}$$

$=0;\ y_2(L)=0$

Impondo condição de continuidade em $x = \frac{L}{4}$ para y_1 e y_2, determinamos C_1 e C_2

$$C_1 = -\frac{7}{128} \frac{\alpha P L^2}{\tilde{u}}$$

$$C_2 = \frac{5}{128} \frac{\alpha P L^2}{\tilde{u}}$$

e ~~obtemos~~ obtemos:

$$x \leq \frac{L}{4} \qquad y(x) = \frac{\alpha}{\tilde{u}} \frac{Px}{8} \left(x^2 - \frac{7}{16} L^2\right)$$

$$x \geq \frac{L}{4} \qquad y(x) = \frac{\alpha}{\tilde{u}} \frac{P(L-x)}{24} \left[(L-x)^2 - \frac{15}{16} L^2\right]$$

Resta verificar a satisfação do vínculo de desigualdade na variável de estado.

Verifiquemos o nosso IP:

$$IP = \rho h L \tilde{u} \qquad \left(\int_0^L \rho h \tilde{u}\, dx\right)$$

Então, quanto menor $\tilde{u}$, menor IP. Mas, verificando a equação em $y(x)$, diminuindo $\tilde{u}$, maior será $|y(x)|$. Então, a condição de mínimo IP ou mínimo $\tilde{u}$ será obtido quando $y(x)$ atinge o valor máximo ~~obtido~~ possível $\bar{Y}$.

O ponto de máxima deflexão é determinado usando $\frac{dy}{dx} = 0$.

Para $x \leq \frac{L}{4}$, $y_{máx}$ ocorre em $x = \sqrt{\frac{7}{48}}\, L$, fora do intervalo

185

Para $x \geq \frac{L}{4}$, obtemos

$$(L-x)_{|y|max} = \sqrt{\frac{5}{16}}\, L,$$

com $\left| y(x) \right|_{max} = \frac{5\sqrt{5}\,\alpha P L^3}{768\,\tilde{u}} = 0.01456\,\frac{\alpha P L^3}{\tilde{u}}$

$$\boxed{\tilde{u}^* = 0.01456\,\frac{12}{Eh^3}\,\frac{PL^3}{y}}$$

solução não constante
ver livro

1.3. Controle Ótimo de Sistemas Lineares com Critério Quadrático

A introdução deste item tem a intenção de fazer uma revisão mais cuidadosa do Controle Ótimo com Realimentação para mostrar o problema dual da Teoria de Estimação e apresentar alguns exemplos cuja solução analítica é possível.

Consideremos, primeiramente, o problema linear na sua forma mais geral, apenas com as condições de não existência de vínculos de desigualdade e t_f dado. Uma vez obtida esta solução, mostraremos algumas situações mais particulares, normalmente aquelas encontradas nos textos.

Definamos nosso sistema linear na forma

$$\boxed{\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)} \tag{1}$$

onde x é o vetor $n\times 1$ de vars. estado ; $x^T = \{x_1, \dots, x_n\}^T$
u é o vetor $m\times 1$ de vars. controle ; $u^T = \{u_1, \dots, u_m\}^T$

com o estado inicial conhecido : t_i, $x(t_i)$ dados (2)

No instante final t_f especificado
existem vínculos de contorno $\bar{\Psi}\, x(t_f) = \psi_0$ (3)

$\bar{\Psi}$ é uma matriz $p\times n$ de constantes conhecidas
ψ_0 é um vetor $p\times 1$ de constantes dadas

O critério quadrático de otimização que deve ser minimizado é dado por

$$IP = \frac{1}{2}\, x^T(t_f)\, \bar{g}\, x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} \left[x^T W_1(t) x + 2 x^T W_2(t) u + u^T W_3(t) u \right] dt \tag{4}$$

onde $\bar{g}$, W_1 e W_3 são matrizes simétricas com as condições de :
* W_1 é ao menos semi-definida positiva
** W_3 é definida positiva → W_3^{-1} sempre exist.

187

Definido o problema, as condições necessárias podem ser obtidas a partir da montagem da função F

$$F(t) = \frac{1}{2}\left[x^T W_1 x + 2x^T W_2 u + u^T W_3 u\right] + \lambda^T \underbrace{\left[\dot{x} - Ax - Bu\right]}_{\text{vínculos dinâmicos}}$$

a) Eqs adjuntas ou Euler Lagrange $\left(\dot{\lambda} = -\frac{\partial F}{\partial x}\right)$

$$\boxed{\dot{\lambda} = -A^T\lambda + W_1 x + W_2 u} \qquad (5)$$

b) Eqs. controle $\qquad \frac{\partial F}{\partial u} = 0$

$$\boxed{B^T\lambda - W_2^T x - W_3 u = 0} \qquad (6)$$

Condições de Transversalidade podem ser obtidas da função de contorno G

$$G = \frac{1}{2} x^T(t_f)\,\bar{g}\,x(t_f) + \nu\left[\bar{\psi}\,x(t_f) - \psi_0\right]$$

onde ν é um vetor $p \times 1$ de multiplicadores constantes.

Sendo t_i, $x(t_i)$, t_f dados, a condição de transversalidade fica apenas:

$$\lambda(t_f) = -\frac{\partial G}{\partial x(t_f)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda(t_f) = -\bar{g}\,x(t_f) + \bar{\psi}\,\nu} \qquad (7)$$

Usaremos a equação (6) para eliminar u:

$$u = W_3^{-1}\left[B^T\lambda - W_2 x\right] \qquad (8)$$

e substituiremos u de (8) em (1) e em (5)

$$\dot{x} = \left[A - BW_3^{-1}W_2\right]x + \left[BW_3^{-1}B^T\lambda\right. \qquad (9)$$

$$\dot{\lambda} = \left[W_1 - W_2 W_3^{-1} W_2^T\right]x - \left[A^T - W_2 W_3^{-1} B^T\right]\lambda \qquad (10)$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BW_3^{-1}W_2^T & BW_3^{-1}B^T \\ W_1 - W_2W_3^{-1}W_2^T & -A^T + W_2W_3^{-1}B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \qquad (11)$$

→ um sistema com $2n$ eqs. difs. que junto com os p multiplicadores ν exigem $2n+p$ constantes de integração. Essas são dadas por:

n conds $x(t_i)$
n conds da cond. transversalidade
p conds de $\bar{\psi}' x(t_f) = \psi_0$

Para resolver o nosso sistema linear (11), observemos que a cond. de contorno em λ é da forma:

$$\lambda(t_f) = -\bar{g}\, x(t_f) - \bar{\psi}^T \nu$$

É razoável então esperarmos que a solução para $\lambda(t)$ tenha a forma:

$$\lambda(t) = -P(t)\, x(t) - R(t)\, \nu \quad , \quad P(t)\ (n \times n);\ R(t)\ (n \times p) \qquad (12)$$

Então:

$$P(t_f) = \bar{g}$$
$$R(t_f) = \bar{\psi}^T$$

e determinamos $P(t)$ e $R(t)$ com a seguinte sequência:

a) Derivando a expressão (12)

$$\dot{\lambda} = -\dot{P}x - P\dot{x} - \dot{R}\nu$$

b) $$\dot{\lambda} = [W_1 - W_2W_3^{-1}W_2^T]\, x + [-A^T - W_2W_3^{-1}B^T]\, \lambda$$
$$\dot{x} = [A - BW_3^{-1}W_2^T]\, x + BW_3^{-1}B^T\lambda$$

são substituídos na expressão acima

c) substitue-se λ por $\lambda = -Px - R\nu$ e obtemos uma expressão apenas com x e ν.

d) equacionando os coeficientes de x e ν e anulando-os:

$$\dot{P} = -PA - A^TP - W_1 + [PB + W_2]\, W_3^{-1} [W_2^T + B^TP] \qquad (13)$$

$$\dot{R} = [PBW_3^{-1}B^T - A^T + W_2W_3^{-1}B^T]\, R \qquad (14)$$

189

A equação para P, simétrica, é uma equação de Riccati. Uma vez resolvida (13) a equação para R pode ser integrada diretamente.

Resta agora eliminar o vetor ν da solução de $x(t)$. Para isso verifiquemos que se $\lambda = -Px - R\nu$

$$\dot{x} = [A - BW_3^{-1}W_2^T]\,x + [BW_3^{-1}B^T]\,\lambda$$

$$\dot{x} = [A - BW_3^{-1}W_2^T - BW_3^{-1}B^TP]\,x + [-BW_3^{-1}B^TR]\,\nu$$

$$\dot{x} = C_1(t)\,x + C_2(t)\,\nu$$

Usando a idéia de matriz de transição então

$$x(t_f) = D_1(t)\,x(t) + D_2(t)\,\nu$$

$$\bar{\Psi}\,x(t_f) = \bar{\Psi}D_1(t)\,x + \bar{\Psi}D_2(t)\,\nu = \Psi_0 \quad \rightarrow \quad \bar{\Psi}\,x(t_f) = \Psi_0$$

$$\Psi_0 = S(t)\,x(t) + Q(t)\,\nu \qquad , \qquad S(p\times n) \;,\; Q(p\times p)$$

onde

$$S(t_f) = \bar{\Psi} \qquad , \qquad Q(t_f) = 0$$

e devemos determinar $S(t)$ e $Q(t)$

Fazendo de modo análogo ao usado para determinar $P(t)$ e $R(t)$

$$\dot{S} = S\left[BW_3^{-1}B^TP - A + BW_3^{-1}W_2^T\right]$$

$$\dot{Q} = SBW_3^{-1}B^TR \qquad , \quad Q \text{ é simétrica}$$

e agora com $\nu = Q^{-1}\Psi_0 - Q^{-1}Sx$, podemos obter λ apenas em função de x:

$$\lambda = -RQ^{-1}\Psi_0 - [P - RQ^{-1}S]\,x$$

Comparando as eqs. em $\dot{S}$ e $\dot{R}$ e suas conds. contorno verifica-se que

$$S(t) = R^T(t)$$

Finalmente, obtemos a nossa lei vetorial de controle:

$$\boxed{u^*(x,t) = -W_3^{-1} B^T R Q^{-1} \psi_0 - W_3^{-1}\left\{W_2^T + B^T\left[P - RQ^{-1}R^T\right]\right\} x(t)}$$

onde:
$$\begin{cases} \dot{P} = -PA - A^TP - W_1 + (PB + W_2) W_3^{-1} (W_2^T + B^T P) & ; \; P(t_f) = \bar{y} \\ \dot{R} = (PBW_3^{-1}B^T - A^T + W_2 W_3^{-1} B^T) R & ; \; R(t_f) = [\bar{\psi}]^T \\ \dot{Q} = R^T B W_3^{-1} B^T R & ; \; Q(t_f) = 0 \end{cases}$$

<u>Exemplo</u>: Problema do controlador de extremidades: Minimizar o consumo de energia de controle gasto par levar o sistema de um estado inicial qualquer até a origem num tempo fixo t_f.

Admitimos um sistema inercial, com o seguinte critério quadrático:

$$IP = \int_0^{t_f} u^2 \, dt$$

Vínculos dinâmicos $\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = u$

Conds. contorno $t_i = 0$ $\left.\begin{matrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{matrix}\right\}$ arbitrários

t_f dado $x_1(t_f) = 0$
$x_2(t_f) = 0$.

Sistema dinâmico:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

191

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Identifiquemos IP

$$IP = x^T(t_f)\, \bar{g}\, x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[x^T W_1 x + 2x^T W_2 u + u^T W_3 u \right] dt$$

$$\bar{g} = 0 \quad ; \quad W_1 = 0 \quad ; \quad W_2 = 0$$
$$W_3 = 1$$

Identifiquemos as condições terminais : $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$

$$\bar{\psi}\, x(t_f) = \psi_0$$

$$\bar{\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \psi_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Montemos a equação de Riccati para P:

$$\dot{P} = -PA - A^T P - \cancelto{0}{W_1} + (PB + \cancelto{0}{W_2})\, W_3^{-1} (W_2^T + B^T P)$$

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBW_3^{-1} B^T P$$

cond. Contorno $\quad P(t_f) = \bar{g} = 0$

Verifiquemos que $P(t) = 0$ satisfaz o contorno e a equação de Riccati. Neste caso, $P(t) = 0$ é a solução

Montemos agora a equação para R.

$$\dot{R} = \left[\cancelto{0}{P} B W_3^{-1} B^T - A + \cancelto{0}{W_2} W_3^{-1} B^T \right] R$$

$$\dot{R} = -AR \quad , \text{ com a cond. contorno } R(t_f) = \bar{\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{bmatrix} \dot{R}_{11} & \dot{R}_{12} \\ \dot{R}_{21} & \dot{R}_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

e resultam

$\dot{R}_{11} = 0 \quad , \; R_1(t_f) = 0$

$\dot{R}_{12} = 0 \quad , \; R_{12}(t_f) = 0$

$\dot{R}_{21} = -R_{11} \quad , \; R_{21}(t_f) = 0$

192

$\dot{R}_{22} = -R_{12}$, $R_{22}(t_f) = 1$

Resolvendo $\dot{R}_{11} = 0 \Rightarrow R_{11} = C$, const ; $R_{11}(t_f) = 1$

$[R_{11} = 1$

$\dot{R}_{12} = 0 \Rightarrow R_{12} = D$, const ; $R_{12}(t_f) = 0$

$[R_{12} = 0$

$\dot{R}_{21} = -R_{11} \Rightarrow R_{21} = -t + E$; $R_{21}(t_f) = 0, E = t_f$

$[R_{21} = t_f - t$

$\dot{R}_{22} = -R_{12} = 0 \Rightarrow R_{22} = F$; $R_{22}(t_f) = 1$

$[R_{22} = 1$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_f - t & 1 \end{bmatrix}$$

Montemos agora a equação para Q

$$\dot{Q} = R^T B W_3^{-1} B^T R \qquad , \quad Q(t_f) = 0$$

$$\dot{Q} = \begin{bmatrix} 1 & t_f - t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_f - t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_f - t \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_f - t & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{Q} = \begin{bmatrix} (t_f - t)^2 & t_f - t \\ t_f - t & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Q(t_f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Integrando termo a termo e usando a cond. de contorno

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{(t_f - t)^3}{3} & \frac{(t_f - t)^2}{2} \\ \frac{(t_f - t)^2}{2} & (t_f - t) \end{bmatrix}$$

e procuramos agora a inversa Q^{-1}

$$Q^{-1} = \frac{1}{\left[\frac{(t_f - t)^3}{3}(t_f - t) - \frac{(t_f - t)^2}{2} \frac{(t_f - t)^2}{2} \right]} \begin{bmatrix} (t_f - t) & -\frac{(t_f - t)^2}{2} \\ -\frac{(t_f - t)^2}{2} & \frac{(t_f - t)^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = -\frac{12}{(t_f-t)^4}\begin{bmatrix} t_f-t & -(t_f-t)^2/2 \\ (t_f-t)^2/2 & (t_f-t)^3/3 \end{bmatrix} \quad (193)$$

Entrando na lei de controle

$$u^*(x,t) = -W_3^{-1}BRQ^{-1}\underset{0}{\cancel{\psi_0}} - W_3^{-1}\{\underset{0}{\cancel{W_2^T}} + B[\underset{0}{\cancel{P}} - RQ^{-1}R^T]\,x(t)$$

$$u^*(x,t) = +W_3^{-1}BRQ^{-1}R^T x(t)$$

$$u^*(x,t) = -\frac{12}{(t_f-t)^4}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ t_f-t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_f-t & -\frac{(t_f-t)^2}{2} \\ -\frac{(t_f-t)^2}{2} & \frac{(t_f-t)^3}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & t_f-t\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Desenvolvendo os produtos:

$$\boxed{u^*(x,t) = -\frac{6x_1(t)}{(t_f-t)^2} - \frac{4x_2(t)}{t_f-t}}$$

Casos Particulares

Suponhamos agora algumas simplificações na forma do problema original proposto. Em particular, admitamos ausência de vínculos terminais, ψ_0; a ausência de correlação entre o estado e o controle no Índice de Performance; o que é, aliás, bastante difícil de definir; e, finalmente, condições iniciais dadas num instante fixo do tempo.

Dessa forma, redefiniríamos nosso problema como o de minimizar um critério quadrático de desempenho

$$IP = x^T(t_f)\,\bar{g}\,x(t_f) + \int_{t_i}^{t_f}[x^T W_1 x^T + u^T W_3 u_T]\,dt$$

com vínculos dinâmicos na forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

e condições de contorno

t_i dado , $x(t_i) = x_0$ dado

As coisas agora se tornam bem mais simples, visto que a ausência de um ψ_0, vínculo terminal, elimina a necessidade das matrizes R e Q. Vejamos porquê.

As condições necessárias, obtidas em função de F

$$F = [x^T W_1 x + u^T W_3 u] + \lambda^T [\dot{x} - Ax - Bu]$$

são:

a) Eqs adjuntas $\quad \dot{\lambda} = -A^T\lambda + W_1 x$

b) Eqs controle $\quad B^T\lambda - W_3 u = 0$

c) Conds Transv. $\quad \lambda(t_f) = -\bar{g}\, x(t_f)$

de onde $u = W_3^{-1} B^T \lambda$ é usado para eliminar u e

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B W_3^{-1} B^T \\ W_1 & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda(t_f) = -\bar{g}\, x(t_f)$$

e $\lambda(t)$ pode ser colocado na forma

$\lambda = -P(t)\, x(t)$ (note a ausência de R)

e a determinação de $P(t)$ é suficiente para obter a lei de controle:

$$\dot{P} = -PA - A^T P - W_1 + P B W_3^{-1} B^T P \quad , \quad P(t_f) = \bar{g}$$

$$\boxed{u^*(x,t) = -\underbrace{W_3^{-1} B^T P}\, x(t)}$$

O 2º caso particular a ser considerado é aquele em que t_f tende a infinito. Este é um caso muito comum em aplicações em que o instante t_f não tem significado especial.

No caso em que A e B de $\dot{x} = Ax + Bu$ são matrizes de constantes e também W_1 e W_3 são matrizes de constantes, Kalman mostrou que a solução tem a mesma estrutura mostrado acima em que P tem como solução a solução da equação de Riccati estacionária. Basicamente

$$\lim_{t_f \to \infty} [P(t)] = P_S$$

onde P_S é uma matriz constante que satisfaz a equação:

$$-P_S A - A^T P_S - W_1 + P_S B W_3^{-1} B^T P_S = 0$$

$$u(t) = \underbrace{-W_3^{-1} B^T P_S}_{\text{constante}} x(t)$$

Exemplo:

1) Um sistema inercial com tempo infinito

Consideremos o sistema

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

e um Índice de Performance

$$IP = \int_0^{\infty} (x_1^2 + w u^2)\, dt$$

e determinemos a lei de controle em regime permanente. Nesse caso

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_3 = [w] \text{ escalar}$$

$$-\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left[\frac{1}{w}\right]\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/w \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{p_{12}^2}{w} & \frac{p_{12}p_{22}}{w} \\ \frac{p_{12}p_{22}}{w} & \frac{p_{22}^2}{w} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 + p_{12}^2/w & -p_{11} + p_{12}p_{22}/w \\ -p_{11} + \frac{p_{12}p_{22}}{w} & -2p_{12} + p_{22}^2/w \end{bmatrix} = 0$$

$$p_{12}^2 = w$$

$$p_{22}^2 = 2 p_{12} w$$