2020-2, "FISMAT-AV", AULAS 10 E 11

OBJETIVOS: DISCUTIR DISTRIBUIÇÕES SINGULARES E PROPRIEDADES DE DISTRIBUIÇÕES, EM GERAL.

2.5 DISTRIBUIÇÕES SINGULARES

* NOTAÇÃO E OUTROS DETALHES

DEFINIMOS UMA DISTRIBUIÇÃO REGULAR $T_f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ MEDIANTE UMA FUNÇÃO LOCALMENTE INTEGRÁVEL (FLI) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\langle T_f , \cdot \rangle = \int d^n x \, f(x) \, [\cdot] \, ,$$

ONDE A LACUNA É OCUPADA POR ALGUMA FUNÇÃO TESTE $h \in \mathcal{D}$.

APESAR DE f E T_f SEREM OBJETOS DISTINTOS (POR EXEMPLO, FAZ SENTIDO ESCREVER $f(x)$, MAS NÃO $T_f(x)$),

É USUAL FALARMOS "A DISTRIBUIÇÃO f" E ESCREVERMOS $\langle f, \cdot \rangle$ (OU ATÉ $\boxed{\langle f(x), \cdot \rangle}$).

APESAR DE f E h PERTENCEREM A ESPAÇOS VETORIAIS DISTINTOS, É USUAL A NOTAÇÃO DE PRODUTO INTERNO (DE DOIS VETORES DO MESMO ESPAÇO). NOTE QUE $h \in \mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ E $f \in L^1_{LOC}(\mathbb{R}^n)$.

ESPAÇO DAS FLI's

OU SEJA, HÁ VÁRIAS "FLEXIBILIZAÇÕES DE NOTAÇÃO" NA TEORIA DE DISTRIBUIÇÕES. E AINDA MAIS UMA OCORRE NA DESCRIÇÃO DAS DISTRIBUIÇÕES SINGULARES. É COMUM DESCREVERMOS A DELTA DE DIRAC $\delta : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, $h \mapsto \delta(h) = h(0)$ COMO $\langle \delta, h \rangle = \int d^n x \, \delta(x) \, h(x) = h(0)$ MESMO <u>NÃO</u> <u>EXISTINDO</u> UMA TAL FUNÇÃO $\delta(x)$, MENOS AINDA UMA FLI...

PORÉM, TAL REPRESENTAÇÃO INTEGRAL É EFETIVAMENTE USADA APENAS PARA AS DISTRIBUIÇÕES SINGULARES RELACIONADAS À DELTA DE DIRAC (COMO SUAS DERIVADAS - AGUARDE!). HÁ OUTRAS POSSIBILIDADES.

* VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY DE $1/x$

EMBORA $1/x$ NÃO SEJA UMA FLI, É POSSÍVEL PROVAR (APPEL, p. 600; LEMOS, p. 262) QUE É LINEAR E CONTÍNUO O MAPA

$$h \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{h(x)}{x}\, dx$$

$$\|$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{h(x)}{x}\, dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{h(x)}{x}\, dx \right\}.$$

DENOTA-SE $\boxed{PV \frac{1}{x}}$ A DISTRIBUIÇÃO SINGULAR ASSOCIADA,

$$\boxed{\left\langle PV \frac{1}{x}, h \right\rangle = PV \int \frac{h(x)}{x}\,dx \equiv \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{h(x)}{x}\,dx},$$

DENOMINADA VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY DE $1/x$.

MAIS TARDE, QUANDO ESTIVERMOS MAIS FAMILIARIZADOS COM TRANSFORMADAS DE FOURIER, EXPLICAREMOS A NOTAÇÃO SIMBÓLICA DE FEYNMAN

$$\boxed{\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = PV \frac{1}{x} \mp i\pi.\delta(x)}$$

PARA PROBLEMAS EM ÓPTICA, MECÂNICA ESTATÍSTICA E TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS ONDE HÁ SINGULARIDADES EM UM CAMINHO DE INTEGRAÇÃO COMPLEXA

2.6 PROPRIEDADES DE DISTRIBUIÇÕES

*RIGOR...

DUAS FUNÇÕES LOCALMENTE INTEGRÁVEIS, f E g, DEFINEM A MESMA DISTRIBUIÇÃO, $T_f = T_g$, SE, E SOMENTE SE, SÃO IGUAIS EM QUASE TODA PARTE (OU SEJA, SE f E g DIFEREM APENAS EM UM CONJUNTO DE MEDIDA NULA). TAIS FUNÇÕES SÃO IDENTIFICADAS COMO REPRESENTANTES DE UMA ÚNICA CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DE FUNÇÕES E "VISTAS COMO UMA SÓ FUNÇÃO". INTEGRABILIDADE DEVE SER ENTENDIDA NO SENTIDO DE LEBESGUE, E NÃO DE RIEMANN!

(APPEL; LEMOS)

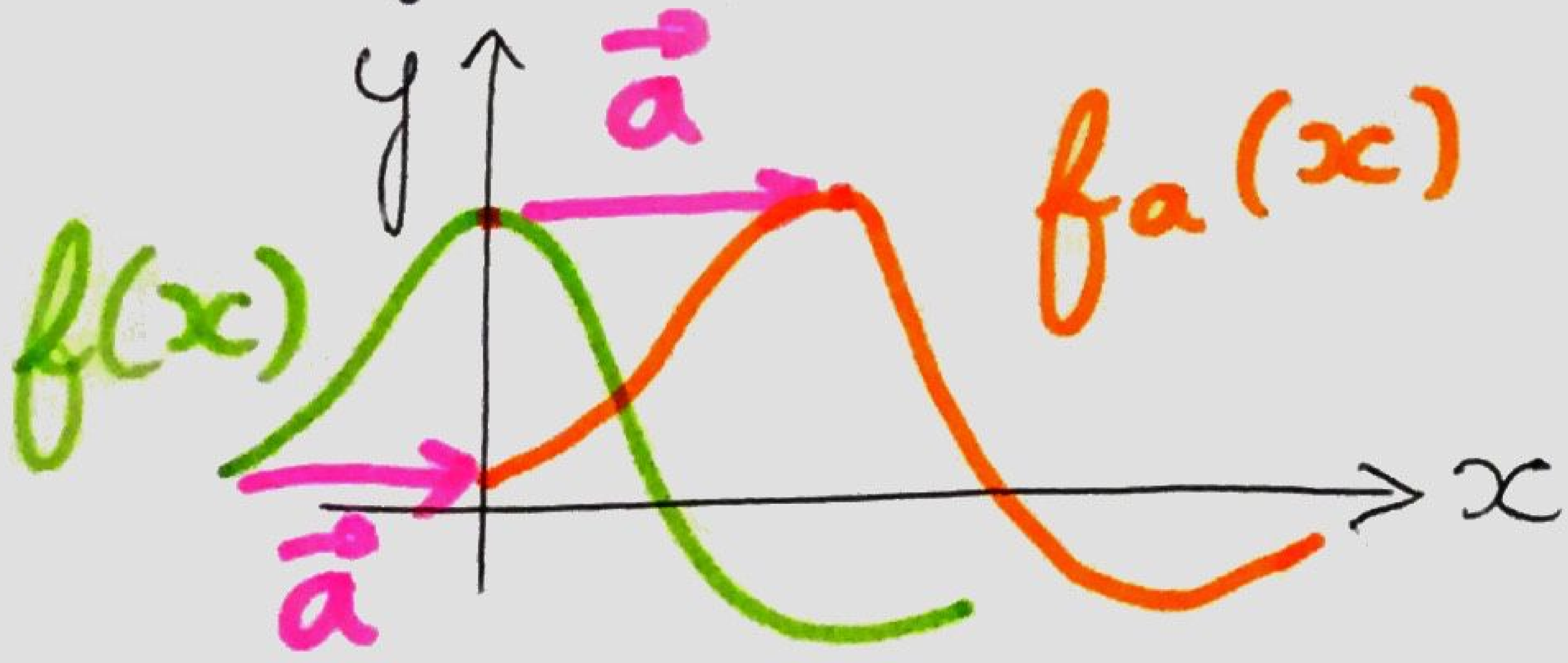
*PROPRIEDADES "OPERACIONAIS"

"PENSE EM REGULARES E GENERALIZE"

→ TRANSLAÇÃO

DADOS $a \in \mathbb{R}^n$ E $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, DEFINE-SE $f_a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ COMO

$$f_a(x) \equiv f(x-a), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$



$n=1$

" PENSAR NA REGULAR"

$$\langle f_a, h \rangle = \int d^n x \, f_a(x) h(x)$$
$$= \int d^n x \, f(x-a) h(x)$$
$$= \int d^n y \, f(y) h(y+a) = \langle f, h_{-a} \rangle$$

PARA QUALQUER $T \in \mathcal{D}'$,

"GENERALIZAR"

$$\boxed{\langle T_a, h \rangle \equiv \langle T, h_{-a} \rangle}$$

OU

CONHECIDA

NOVA DISTRIBUIÇÃO

$$\langle T(x-a), h(x) \rangle \equiv \langle T(x), h(x+a) \rangle$$

EXEMPLO:

$$\langle \delta_a, h \rangle \equiv \langle \delta, h_{-a} \rangle = h(a)$$

→ ESCALA OU DILATAÇÃO

SE $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

$$\boxed{\langle T(ax), h(x) \rangle \equiv \frac{1}{|a|^n} \left\langle T(x), h\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle},$$

$h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

→ PRODUTO DE DISTRIBUIÇÃO POR FUNÇÃO SUAVE

SE f FOR UMA FLI, h FOR TESTE E $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ FOR SUAVE, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, ENTÃO

NOVA DISTRIBUIÇÃO

$$\langle \psi f, h \rangle = \int \overbrace{[\psi(x) f(x)]}^{\text{FLI!}} h(x)\, d^n x$$

$$= \int f(x) \underbrace{[\psi(x) h(x)]}_{\text{TESTE!}} d^n x$$

$$= \langle f, \psi h \rangle .$$

PARA QUALQUER $T \in \mathcal{D}'$,

$$\boxed{\langle \psi T, h \rangle \equiv \langle T, \psi h \rangle}.$$

→ DERIVADA DE UMA DISTRIBUIÇÃO

$\to n=1$

SE $f, f' \in L^1_{LOC}(\mathbb{R})$,

$$\langle f', h \rangle = \int f'(x)\, h(x)\, dx$$

$$= \underbrace{\left[f(x)\, h(x) \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0,\ \text{TESTE}} - \underbrace{\int f(x)\, h'(x)\, dx}_{\text{EXISTE, } h \text{ É TESTE}}$$

$$= - \langle f, h' \rangle .$$

PARA QUALQUER $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\boxed{\langle T', h \rangle \equiv - \langle T, h' \rangle}$$

E

$$\boxed{\langle T^{(m)}, h \rangle \equiv (-1)^m \langle T, h^{(m)} \rangle} .$$

SEMPRE EXISTE

TODA DISTRIBUIÇÃO É INFINITAMENTE DIFERENCIÁVEL E SUAS SUCESSIVAS DERIVADAS SÃO DISTRIBUIÇÕES!!!

◇ EXEMPLOS:

(i) "A DELTA DE DIRAC É A DERIVADA DE HEAVISIDE" (COMO DISTRIBUIÇÕES!)

SE $\theta(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, QUEM É T_θ'?

$$\langle T_\theta', h \rangle \equiv -\langle T_\theta, h' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, h'(x)\, dx =$$

$$= -\int_0^\infty h'(x)\, dx = -\left[h(x)\right]_0^\infty = h(0)$$

$$\shortparallel$$

$$\langle \delta, h \rangle \quad , \forall h \in \mathcal{D}$$

FLI, MAS NÃO DIFERENCIÁVEL

DERIVADA DISTRIBUCIONAL

$$\langle \theta, \cdot \rangle = \int \theta(x)[\cdot]\, dx$$

DERIVADA USUAL?! NÃO, IMPOSSÍVEL!

$$\langle \delta, \cdot \rangle = \int \delta(x)[\cdot]\, dx$$

EXISTE! É DISTRIB. SINGULAR

NEM É FUNÇÃO; NEM EXISTE!!!

(ii) $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$

$$\langle T_f, \cdot \rangle = \int x^3 [\cdot]\, dx$$

$$\langle T_{f'}, \cdot \rangle = \int 3x^2 [\cdot]\, dx$$

DE FATO,

$$\langle T_{f'}, h \rangle = \int 3x^2 h(x)\, dx$$
$$= \left[x^3 h(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int x^3 h'(x)\, dx$$
$$= -\langle T_f, h' \rangle.$$

$a > 0$

(iii) $\log|x|$ É UMA FLI, "PORQUE"

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^a \log|x|\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^a \log x\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[x \log x - x\right]_\varepsilon^a = a \log a - a,$$

COM $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \log \varepsilon = 0$, POR L'HOSPITAL.

MAS, CLARO, NÃO É DIFERENCIÁVEL. MAS E A <u>DISTRIBUIÇÃO</u> $\log|x|$?

$$\langle (\log|x|)', h \rangle = -\langle \log|x|, h' \rangle =$$

$$= -\left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty}\right) \log|x|\, h'(x)\, dx =$$

$$= -\left\{ \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x)\, h'(x)\, dx \right.\right. +$$

$$+\int_{+\varepsilon}^{+\infty} \log(+x)\, h'(x)\, dx \Big] \Big\} \overset{\text{PARTES!}}{=}$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big\{$$

$$\Big[\log(-x)\, h(x)\Big]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{-x}(-1)\, h(x)\, dx \; +$$

$$+ \Big[\log(+x)\, h(x)\Big]_{+\varepsilon}^{+\infty} - \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\, h(x)\, dx \Big\} =$$

$$= \left\langle PV \frac{1}{x}, h(x) \right\rangle - \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0^+} \log \varepsilon \left[h(\varepsilon) - h(-\varepsilon)\right]}_{= M}.$$

$$\text{COMO } M = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\varepsilon \log \varepsilon\right] . \left\{ \frac{h(\varepsilon) - h(0)}{\varepsilon} + \frac{h(0) - h(-\varepsilon)}{\varepsilon} \right\} =$$

$$= 0 \, . \, [2h'(0)] = 0,$$

$$\boxed{(\log|x|)' = PV \frac{1}{x}} \, .$$