Exercício 2

Sejam A e B dois eventos independentes, tais que $\mathbb{P}(B \mid A \cup B) = \frac{2}{3}$ e $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1}{2}$. Quanto vale $\mathbb{P}(B)$?

1.1 Gabarito

Temos que

$$\mathbb{P}(B \mid A \cup B) = \frac{2}{3},\ \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(B) = ?$$

Como A e B são dois eventos independentes, então temos como consequência:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}.$$

Desse fato, podemos deduzir a seguinte expressão:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Podemos então usar $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, na expressão a probabilidade da união dos eventos:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B),$$

que fica reescrita como:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B). \tag{1}$$

Desenvolvendo a expressão da probabilidade condicional $\mathbb{P}(B \mid A \cup B)$, temos:

$$\mathbb{P}(B \mid A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap (A \cup B))}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}\{(A \cap B) \cup (B \cap B)\}}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}\{(A \cap B) \cup B\}}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \cup B)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B \mid A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B \mid A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)} \tag{2}$$

Das equações 1 e 2 podemos determinar $\mathbb{P}(B)$.