Gabarito do 3º Práticas de demonstrações

Ferramentas disponíveis

Definição 1: Denotamos por || a relação de paralelismo entre duas retas, assim para duas retas r e s, r || s pode ser interpretado como r paralela à reta s.

Definição 2: Denotamos por $\perp$ a relação de perpendicularismo entre duas retas, assim para duas retas r e s, r $\perp$ s pode ser interpretado como r perpendicular à reta s.

Propriedade 1: As retas r: ax+by=c e s: a'x+b'y=c' são paralelas $\Leftrightarrow$ existe $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$ tal que (a', b') = k.(a, b) e c' $\neq$ k.c.

Propriedade 2: As retas r: ax + by = c e s: a'x + b'y = c' são perpendiculares $\Leftrightarrow$ seus vetores normais $\vec{w}$ = (a, b) e $\vec{z}$ = (a', b') são perpendiculares, ou seja, aa' + bb' = 0.

Enunciados a demonstrar

1) As retas r: y = mx+n e s: m'x+n' são paralelas $\Leftrightarrow$ m = m' e n $\neq$ n'.

Demonstração: De fato, como r: mx – y = -n e s: m'x – y = -n', temos que $\vec{v}$ = (m, -1) e $\vec{w}$ =(m', -1) são vetores normais às retas r e s, respectivamente.

Logo, pela propriedade 1, r e s são paralelas $\Leftrightarrow$ existe k $\neq$ 0 tal que

$$(m', -1) = k.(m, -1) = (km, -k) \text{ e } -n' \neq -kn$$

Como -1 = -k, devemos ter k = 1. Então r paralela a s $\Leftrightarrow$ m = m' e n $\neq$ n'.

2) Sejam r: y = mx + n e s: y = m'x + n' duas retas tais que m $\neq$ 0 e m' $\neq$ 0. Então, r $\perp$ s $\Leftrightarrow$ m.m' = -1.

Demonstração: Como r: mx – y = -n e s: m'x – y = -n' temos, pela propriedade 2, que r perpendicular a s $\Leftrightarrow$ seus vetores normais $\vec{v}$ = (m, -1) e $\vec{w}$ = (m, -1) são ortogonais.

Logo, r perpendicular a s $\Leftrightarrow$ < $\vec{v}$, $\vec{w}$ > = mm' + 1 = 0 $\Leftrightarrow$ mm' = -1.